УДК 517.944:519.46

В. І. Фущич, чл.-кор. АН України,
В. І. Чопик, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН України, Київ)

УМОВНА СИМЕТРІЯ ТА НОВІ ЗОБРАЖЕННЯ АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

An effective method for finding conditional symmetry operators is constructed for a class of Galilei non-invariant parabolic equations. The obtained operators form a basis of the Galilei algebra. The additional conditions, under which the extension of a symmetry is possible, are obtained. For the equations under consideration, the antireduction is carried out and some exact solutions are found by using the conditional Galilei-invariance of its differential consequences.

Для класу Галілей-неінваріантних рівнянь параболічного типу запропоновано конструктивний метод знаходження операторів умовної симетрії, які утворюють базис алгебри Галілея. Описані додаткові умови, при яких можливе розширення симетрії. Проведено антиредукцію, а також знайдені деякі точні розв'язки розглядуваного нелінійного рівняння, виходячи з умовної Галілей-інваріантності його диференціальних наслідків.

Вступ. В роботі [1] вказано на такий парадоксальний факт: серед нелінійних рівнянь теплопровідності

$$u_0 + \partial_a (f_1(x, u)\, u_a) = f_2(x, u), \tag{1}$$

де

$$u_0 = \partial / \partial x_0,\ x_0 \equiv t,\ \partial_a = \partial / \partial x_a,\ u_a = \partial / \partial x_a,\ x = (x_1, \dots, x_n),\ a = \overline{1, n},$$

які широко застосовуються в різних областях математики та фізики, немає жодного рівняння, для якого б виконувався принцип відносності Галілея. З симетрійної точки зору це значить, що рівняння (1) ні при яких f_1, f_2 таких, що $f_1 \neq \text{const}$, $f_2 \neq \text{const}$ одночасно, не допускає алгебри Галілея. Але виявляється, що з множини розв'язків рівняння (1) можна виділити підмножини, які залишаються інваріантними при перетвореннях Галілея. Природньо постає питання знаходження цих розв'язків. Ці підмножини розв'язків можна знаходити, використовуючи оператори умовної симетрії рівняння [2], а також, як буде показано нижче, оператори умовної Галілей-інваріантності його диференційних наслідків.

Існує конструктивний метод для знаходження операторів $\mathfrak{Q}$-умовної симетрії [2]. Основним недоліком цих операторів є те, що вони не утворюють алгебри Лі. В роботах [3, 4] побудовано деякі оператори умовної симетрії для рівнянь типу (1), які утворюють алгебру разом з базисними операторами симетрії Лі цього рівняння. Зауважимо, що алгоритмічного методу знаходження операторів умовної симетрії, які утворювали б алгебру Лі, до цього часу не існує.

В даній роботі на прикладі нелінійного рівняння

$$(\partial_0 + u_a \partial_a)\, h(x, u) - \Delta u = F(u), \tag{2}$$

де

$$h_u \neq 0,\ \Delta = \partial^2 / \partial x_a \partial x_a,\ a = \overline{1, n},$$

n — число просторових змінних, запропоновано конструктивний метод знаходження алгебри умовної інваріантності. Цей метод грунтується на вимозі того, щоб оператори симетрії Лі рівняння разом з операторами умовної симетрії утворювали базис алгебри Галілея. Причому розглядаються різні зображення алгебри Галілея, які допускає рівняння типу (2). Завдяки цьому вдається описати додаткові умови, при яких можливі такі розширення симетрії.

Процес знаходження алгебри умовної інваріантності ми розіб'ємо на кілька етапів: перший етап — виділення з класу рівнянь (2) рівняння, для якого можливе розширення симетрії до алгебри Галілея; другий етап — знаходження зображення алгебри Галілея, інваріантність відносно якого ми будемо вимагати від виділеного нами рівняння; третій етап — знаходження умов, при яких наше рівняння умовно Галілей-інваріантне.

Очевидно, що наша робота буде мати зміст лише у тому випадку, коли одержана перевизначена система рівнянь буде сумісною. У цій статті питання сумісності ми окремо досліджувати не будемо, але наведемо деякі нетривіальні розв'язки одержаних перевизначених систем.

1. Інваріантність відносно перетворень типу Галілея. Опишемо всі дійсні функції $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{F}$ такі, при яких рівняння (2) інваріантне відносно операторів

$$X_a = f(x_0)\,\partial_a + g(x_0)\,x_a\partial_u, \quad \partial_u = \partial/\partial u, \tag{3}$$

які породжують такі скінченні перетворення:

$$x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_a \to x_a' = x_a + v_a f(x_0),$$

$$u \to u' = u + (x_a v_a + (1/2)\,v^2 f(x_0))\,g(x_0).$$

Зауважимо, що ці перетворення при $f(x_0) = x_0$ співпадають з перетвореннями Галілея.

За формулами Лі (див., наприклад, [2]) знайдемо друге продовження операторів (3):

$$\overset{(2)}{X} = X + (g'x_a - f'u_a)\,\partial_{u_0} + g\partial_{u_a}, \quad \text{де} \quad \partial_{u_0} = \partial/\partial u_0,\ \partial_{u_a} = \partial/\partial u_a,$$

і подіємо ним на рівняння (2). В результаті одержимо такі умови:

$$h_{uu}\,g x_a + h_{ua} f = 0, \qquad a = \overline{1, n}; \tag{4}$$

$$-f'\,h_u + 2g h_u + f\,h_{aa} + g x_a\,h_{au} = 0; \tag{5}$$

$$g' h_u x_a + h_a g - F' g x_a = 0. \tag{6}$$

Для знаходження розв'язку системи рівнянь (4)–(6) розглянемо два таких випадки: $h_u = \text{const}$ та $h_u \neq \text{const}$.

Випадок 1: $h_u = \text{const}$. Не зменшуючи загальності, можна прийняти, що $h_u = 1$. У цьому випадку рівняння (4) виконується тотожньо. Оскільки $h = h(u, x)$, а функції f і g залежать тільки від x_0, то рівняння (5) розпадається на такі рівняння:

$$h_{aa} = \beta, \quad f' - 2g = \beta f, \qquad \beta \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Диференціюючи рівняння (6) по u, одержуємо умову на F:

$$F'' = 0 \iff F = \alpha u + \alpha_1 \quad \{\alpha, \alpha_1\} \subset \mathbb{R}. \tag{8}$$

Враховуючи (7), (8), після диференціювання рівняння (6) по x_a маємо

$$g' + (\beta - \alpha) g = 0 \Rightarrow g = \lambda \exp\{(\alpha - \beta)\,x_0\}. \tag{9}$$

Підставляючи (9) в (7), одержуємо умову на $f(x_0)$:

$$f' - \beta f = 2\lambda \exp\{(\alpha - \beta) x_0\}.$$

Розв'язок останнього рівняння знаходиться у вигляді $f = A(x_0)\exp\{\beta x_0\}$, де $A(x_0)$ задовольняє рівняння

$$A' = 2\lambda \exp\{(\alpha - \beta) x_0\}.$$

Інтегруючи це рівняння, маємо

$$A = \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{\alpha - 2\beta} \exp\{(\alpha - 2\beta)x_0\} + \lambda_1 & \text{при } \alpha \neq 2\beta; \\ 2\lambda x_0 + \lambda_1 \ \text{при } \alpha = 2\beta. \end{cases}$$

Остаточно одержуємо

$$f = \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{\alpha - 2\beta} \exp\{(\alpha - \beta)x_0\} + \lambda_1 \exp\{\beta x_0\} & \text{при } \alpha \neq 2\beta; \\ 2\lambda x_0 \exp\{\beta x_0\} + \lambda_1 \exp\{\beta x_0\} \ \text{при } \alpha = 2\beta. \end{cases} \tag{10}$$

Підсумовуючи попередні результати, одержуємо, що рівняння

$$u_0 + u_a u_a + \beta x_a u_a - \Delta u = \alpha u, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

допускає оператори X_a, що визначаються (3), (9), (10) (використовуючи заміну $u = u' - \alpha_1 / \alpha$, константу α_1 в (8) можна прирівняти до нуля).

Зауваження. 1. Рівняння (11) при $\beta = \alpha / 2 - 1$ співпадає з рівнянням ренорм-групи (RG) Вільсона [5, 6]. Симетрія Лі цього рівняння знайдена в [7]. Підкреслимо, що випадок $\alpha = 2\beta$ не виконується для рівняння RG Вільсона.

2. При $\beta = 0$ рівняння (11) заміною

$$u = \ln v, \tag{12}$$

зводиться до нелінійного рівняння теплопровідності

$$v_0 - \Delta v = \alpha v \ln v. \tag{13}$$

Симетрійні властивості цього рівняння досліджені в роботі [4]. Далі ми покажемо, що рівняння (13) може допускати ще одне зображення алгебри Галілея.

Знайдемо максимальну алгебру інваріантності (МАІ) рівняння (11).

Теорема 1. *МАІ рівняння* (11) *задається таким набором базисних операторів*:

1)

$$P_0 = \partial x_0, \quad X_a^{(1)} = \exp\{\beta x_0\}\partial_a, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad M = \exp\{\alpha x_0\}\partial_u,$$

$$X_a^{(2)} = \exp\{(\alpha - \beta)x_0\}\left\{\frac{2}{\alpha - 2\beta}\partial_a + x_a\partial_u\right\} \quad \textit{при } \alpha \neq 2\beta; \tag{14}$$

2)

$$P_0, \quad X_a^{(1)} = \exp\{\beta x_0\}\partial_a, \quad J_{ab}, \quad M = \exp\{2\beta x_0\}\partial_u,$$

$$X_a^{(2)} = \exp\{\beta x_0\}\{2x_0\partial_a + x_a\partial_u\} \quad \textit{при } \alpha = 2\beta. \tag{15}$$

Доведення теореми проводиться за схемою Лі [2]. Оператори $X_a^{(1)}$, $X_a^{(2)}$ одержуються із X_a при $\lambda = 0$ та $\lambda_1 = 0$ відповідно. Базисні оператори (14) задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$[P_0, X_a^{(1)}] = \beta X_a^{(1)}, \quad [P_0, X_a^{(2)}] = \begin{cases} cX_a^{(2)} \ \text{при } \alpha \neq \beta, \ \alpha \neq 2\beta, \\ 0 \ \text{при } \alpha = 2\beta, \end{cases}$$

$$[P_0, M] = \alpha M, \quad [P_0, J_{ab}] = [X_a^{(1)}, M] =$$

$$= [J_{ab}, M] = [X_a^{(1)}, X_b^{(1)}] = [X_a^{(2)}, X_b^{(2)}] = 0,$$

$$[X_a^{(1)}, X_b^{(2)}] = \delta_{ab} M, \quad [X_a^{(1)}, J_{bc}] = \delta_{ab} X_c^{(1)} - \delta_{ab} X_b^{(1)},$$

$$[X_a^{(2)}, J_{bc}] = \delta_{ab}X_c^{(2)} - \delta_{ac}X_b^{(2)}, \quad [J_{ab}, J_{cd}] =$$
$$= \delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ad}J_{bc}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

З цих співвідношень випливає, що у кожному з випадків: 1) $\beta = 0$; 2) $\alpha = \beta$; 3) $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 2\beta$; рівнянню (11) відповідає інша алгебра Лі. Жодна з цих алгебр не є алгеброю Галілея (про алгебру Галілея див. [2, 8]).

Для випадку, коли $\alpha = 2\beta$, оператори (15) задовольняють співвідношення

$$[P_0, X_a^{(1)}] = \beta X_a^{(1)}, \quad [P_0, X_a^{(2)}] = \beta X_a^{(2)} + 2X_a^{(1)}, \quad [P_0, M] = 2\beta M,$$
$$[P_0, J_{ab}] = [X_a^{(1)}, M] = [J_{ab}, M] = [X_a^{(1)}, X_b^{(1)}] = [X_a^{(2)}, X_b^{(2)}] = 0,$$
$$[X_a^{(1)}, X_b^{(2)}] = \delta_{ab}M, \quad [X_a^{(1)}, J_{bc}] = \delta_{ab}X_c^{(1)} - \delta_{ac}X_b^{(1)}, \tag{16}$$
$$[X_a^{(2)}, J_{bc}] = \delta_{ab}X_c^{(2)} - \delta_{ac}X_b^{(2)},$$
$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ad}J_{bc}.$$

З (16) випливає, що при $\beta = 0$ алгебра, що породжується операторами (15), задовольняє стандартні комутаційні співвідношення алгебри Галілея $\mathfrak{AG}(1, n)$. Але цей випадок не викликає зацікавлення, оскільки при $\alpha = 2\beta = 0$ рівняння (11) заміною (12) зводиться до лінійного рівняння теплопровідності (13) ($\alpha = 0$). Надалі при $\alpha = 2\beta$ ми розглядатимемо тільки випадок, коли $\beta \neq 0$. У цьому випадку з (16) випливає, що рівняння (11) також не допускає алгебри Галілея.

Випадок 2: $h_u \neq \mathrm{const}$. Для цього випадку розв'язок системи (4) – (6) задається так:

$$h_u = d_1(u - \lambda x^2/2), \quad h_a = \lambda d_1 x_a(5\lambda x^2 - u) + d_2, \quad F' = \alpha, \quad d_k \in \mathbb{R},$$

а функції f і g із (3) мають вигляд

$$f = d\exp\{\lambda x_0\}, \quad g = \lambda d\exp\{\lambda x_0\}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Тобто рівняння

$$h_u(u_0 + u_a u_a) + h_a u_a - \Delta u = \alpha u$$

інваріантне відносно перетворень типу Галілея, що породжуються (3). Надалі ми обмежимося розглядом рівняння (11).

2. Знаходження потрібних представлень алгебри Галілея. З комутаційних співвідношень для (14), (15) випливає, що всі оператори, за винятком P_0, задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Галілея. В роботі [4] показано, що для алгебри Лі рівняння (13) (частковий випадок рівняння (11)) можна вказати такий оператор P_t, що

$$[P_t, X_a^{(1)}] = [P_t, M] = [P_t, J_{ab}] = 0, \quad [P_t, X_a^{(2)}] = c_1 X_a^{(1)}. \tag{17}$$

Легко бачити, що при виконанні (17) оператори P_t, $X_a^{(1)}$, $X_a^{(2)}$, M, J_{ab} утворюють базис алгебри Галілея, яку ми позначатимемо $\mathfrak{AG}^{(1)}(1, n)$. Нижче ми узагальнимо цей результат для рівняння (11) та вкажемо нове зображення алгебри Галілея $\mathfrak{AG}^{(1)}(1, n)$, що визначається співвідношеннями, відмінними від (17).

Випадок 1. Знайдемо явний вигляд оператора P_t такого, що виконуються співвідношення (17). Шукатимемо оператор P_t у вигляді

$$P_t = \xi^0\partial_0 + \xi^a\partial_a + \eta\partial_u, \quad \xi^\mu = \xi^\mu(x_0, \boldsymbol{x}, u),$$
$$\eta = \eta(x_0, \boldsymbol{x}, u), \quad \mu = \overline{0, n}. \tag{18}$$

З умови $[P_t, X_a^{(1)}] = 0$ одержимо такі умови на коефіцієнтні функції оператора P_t:

$$\beta\xi^0 = \xi_a^a, \quad \xi_a^0 = \xi_a^b = \eta_a = 0, \quad a \neq b. \tag{19}$$

Аналогічно одержуємо такі умови на функції ξ^μ, η:

$$\beta\xi^0 = \eta_u, \quad \xi^a = x_a\xi_a^a, \quad \xi_u^0 = \xi_u^a = 0,$$
$$(\alpha - \beta)\xi^0 x_a + \xi^a - x_a\eta_u = 0; \tag{20}$$

а також

$$2\exp\{(\alpha - 2\beta)x_0\}\,((\alpha - \beta)\xi^0 - \xi_a^a)/(\alpha - 2\beta) = c_1 \quad \text{при } \alpha \neq 2\beta,$$
$$2(\beta x_0 + 1)\,\xi^0 - 2x_0\,\xi_a^a = c_1 \quad \text{при } \alpha = 2\beta, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Розв'язуючи умови (19) – (21), знаходимо явний вигляд оператора P_t. Для випадків, коли $\alpha \neq 2\beta$ та $\alpha = 2\beta$, цей оператор можна записати у єдиному вигляді:

$$P_t = \exp\{(2\beta - \alpha)x_0\}\,(\partial_0 + \beta x_a\partial_a + (\alpha u + f(x_0))\,\partial_u). \tag{22}$$

В результаті ми довели таке твердження.

Лема 1. *Оператори* P_t, $X_a^{(1)}$, M, J_{ab}, $X_a^{(2)}$, *що мають вигляд* (14), (22) *при* $\alpha \neq 2\beta$ *та* (15), (22) *при* $\alpha = 2\beta$, *задають базис алгебри Галілея* $\mathfrak{AG}^{(1)}(1, n)$, *що визначається комутаційними співвідношеннями* (16), (17).

Випадок 2. Нехай оператор T такий, що виконуються

$$[T, X_a^{(2)}] = [T, M] = [T, J_{ab}] = 0, \quad [T, X_a^{(1)}] = c_1 X_a^{(2)}. \tag{23}$$

Легко переконатися, що при виконанні (23) оператори T, $X_a^{(1)}$, $X_a^{(2)}$, M, J_{ab} утворюватимуть базис алгебри Галілея, яку ми надалі позначатимемо $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n)$.

Оператор T шукатимемо у вигляді (18). З (23) одержимо такі умови на функції ξ^μ, η:

$$\xi_a^0 = \xi_a^b = \xi_u^0 = \xi_u^a = 0, \quad a \neq b, \quad \xi^a = x_a\xi_a^a, \tag{24}$$

а також

$$\xi_a^a = -c_2\,2\exp\{(\alpha - \beta)x_0\}/(\alpha - 2\beta), \quad (\alpha - \beta)\xi^0 = \xi_a^a,$$
$$(\alpha - \beta)x_a\xi^0 + \xi^a - 2\eta_a/(\alpha - 2\beta) - x_a\eta_u = 0, \quad \alpha\xi^0 = \eta_u, \tag{25}$$
$$\eta_a = -c_2\exp\{(\alpha - \beta)x_0\}\,x_a \quad \text{при } \alpha \neq 2\beta,$$

$$\eta_a = -c_2 x_a, \quad \beta x_0\xi^0 + \xi^0 - x_0\xi_a^a = 0,$$
$$2\beta\xi^0 = \eta_u, \quad \beta\xi^0 - \xi_a^a = 2c_2 x_0, \tag{26}$$
$$\beta x_a\xi^0 + \xi^a - 2x_0\eta_a - x_a\eta_u = 0 \quad \text{при } \alpha = 2\beta.$$

З умов (24), (25) одержуємо явний вигляд T при $\alpha \neq 2\beta$:

$$T = \exp\{(\alpha-\beta)x_0\}\,(\partial_0 + (\alpha-\beta)x_a\partial_a + (\alpha u + (\alpha - 2\beta)^2\frac{x^2}{4} + f_1(x_0))\,\partial_u). \quad (27)$$

З (24), (26) випливає

$$T = x_0^2\partial_0 + (\beta x_0 + 1)\,x_0 x_a\,\partial_a + (\frac{x^2}{4} + 2\beta x_0^2 u + f_2(x_0))\,\partial_u) \qquad \text{при } \alpha = 2\beta. \quad (28)$$

Лема 2. *Оператори* T, $X_a^{(1)}$, M, J_{ab} $X_a^{(2)}$, *що мають вигляд* (14), (27) *при* $\alpha \neq 2\beta$ *та* (15), (28) *при* $\alpha = 2\beta$, *реалізують представлення алгебри Галілея* $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n)$. *Алгебра* $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n)$ *задається комутаційними співвідношеннями* (16), (23).

3. Умовна Галілей-інваріантність рівняння (11).

Випадок 1. Вимагатимемо інваріантність рівняння (11) відносно алгебри Галілея $\mathfrak{AG}^{(1)}(1, n)$. Для цього подіємо другим продовженням оператора (22):

$$\overset{(2)}{P_t} = P_t + \exp\{(2\beta-\alpha)x_0\}[\{f' + (2\beta-\alpha)(\alpha u + f) - \beta(2\beta-\alpha)x_a u_a +$$
$$+ 2(\alpha-\beta)u_0\}\partial_{u_0} + (\alpha-\beta)u_a\}\,\partial_{u_a} + (\alpha-2\beta)u_{aa}\partial_{u_{aa}})]$$

на рівняння (11). Одержуємо:

$$\overset{(2)}{P_t}\{u_0 + u_a u_a + \beta x_a u_a - \Delta u - \alpha u\} =$$
$$= 2(\alpha-\beta)\exp\{(2\beta-\alpha)x_0\}\{u_0 + u_a u_a +$$
$$+ \beta x_a u_a - \Delta u - \alpha u\} + \exp\{(2\beta-\alpha)x_0\}[\alpha\,\Delta u + 2(\beta-\alpha)\,f + f']. \quad (29)$$

З (29) випливає, що при $\alpha = 0$, $2\beta f + f' = 0$ рівняння (11) інваріантне (у сенсі Лі) відносно $\mathfrak{AG}^{(1)}(1, n)$. Але при $\alpha = 0$ рівняння (11) заміною (12) зводиться до лінійного рівняння

$$v_0 + \beta\,x_a v_a - \Delta\,v = 0,$$

симетрія якого нескінченна [7]. Надалі ми обмежимось розглядом таких α, що $\alpha \neq 0$.

Подіємо $\overset{(2)}{P_t}$ на рівняння

$$\alpha\,\Delta u + 2(\beta-\alpha)\,f + f' = 0. \quad (30)$$

Одержимо

$$\overset{(2)}{P_t}\{\alpha\Delta u + 2(\beta-\alpha)\,f + f'\} =$$
$$= (\alpha - 2\beta)\,\exp\{(\alpha-2\beta)x_0\}\,\{\alpha\,\Delta u + 2(\beta-\alpha)\,f + f'\}, \quad (31)$$

якщо функція $f_0(x)$ задовольняє рівняння:

$$f'' + (4\beta - 3\alpha)\,f' + 2(\alpha-\beta)\,f = 0. \quad (32)$$

Згідно з критерієм умовної інваріантності (див., наприклад, [2, 3]), з (29), (31) випливає, що рівняння (11) умовно інваріантне відносно оператора P_t (22), якщо f задовольняє (32), тобто

$$f = c_1\exp\{(\alpha-2\beta)x_0\} + c_2\exp\{2(\alpha-\beta)x_0\}, \quad (33)$$

причому додаткова умова (30) з урахуванням (33) має вигляд

$$\Delta u = c_1 \exp\{(\alpha - 2\beta)x_0\}. \tag{34}$$

Теорема 2. *Рівняння* (11) *умовно інваріантне відносно алгебри Галілея* $\mathfrak{AG}^{(1)}(1, n) = \langle P_t, X_a^{(1)}, M, J_{ab}, X_a^{(2)} \rangle$, *де оператор* P_t *задається* (22), (33), *а оператори* $X_a^{(1)}$, M, J_{ab}, $X_a^{(2)}$ *мають вигляд* (14) *при* $\alpha \neq 2\beta$ *та* (15) *при* $\alpha = 2\beta$. *Додаткова умова має вигляд* (34).

Для доведення теореми нам залишається перевірити інваріантність додаткової умови (34) відносно операторів $X_a^{(1)}$, M, J_{ab}, $X_a^{(2)}$. Легко переконатись, що ці оператори є абсолютними інваріантами для цього рівняння. Цей факт підтверджує справедливість теореми.

Зауваження 3. Якщо вимагати додатково інваріантність відносно оператора P_0, то з (34) випливає умова $c_1 = 0$. В роботі [4] знайдено МАІ перевизначеної системи рівнянь (11), (34) при $\beta = c_1 = 0$. Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$u = (d_0 + d_a x_a - d^2\alpha^{-1} \exp\{\alpha x_0\}) \exp\{\alpha x_0\},$$

де

$$d^2 = d_a d_a, \quad d_\mu \in \mathbb{R}, \quad a = \overline{1, n}, \quad \mu = \overline{0, n}.$$

Випадок 2. Вимагатимемо інваріантність рівняння (11) відносно алгебри Галілея $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n)$ при $\alpha \neq 2\beta$. Для цього подіємо другим продовженням оператора T (27) на рівняння (11). Одержимо

$$\overset{(2)}{T}\{u_0 + u_a u_a + \beta x_a u_a - \Delta u - \alpha u\} =$$
$$= \exp\{(\alpha - \beta)x_0\}[\beta\{u_0 + u_a u_a + \beta x_a u_a - \Delta u - \alpha u\} + L_1],$$

де

$$L_1 = \beta u_a u_a + \beta(2\beta - \alpha)x_a u_a - (\beta - \alpha)\Delta u +$$
$$+ (\beta/4)(\alpha - 2\beta)^2 \mathbf{x}^2 - \beta f_1 + f_1' - (n/2)(\alpha - 2\beta)^2.$$

Справедлива рівність

$$\overset{(2)}{T}\{L_1\} = \exp\{(\alpha - \beta)x_0\}[2\beta L_1 + L_2], \tag{35}$$

причому

$$L_2 = \alpha(\beta - \alpha)\Delta u + f_1'' - \beta f_1' + 2\beta^2 f_1 + (n/2)(\alpha - 2\beta)^2(\alpha + \beta). \tag{36}$$

З (35), (36) випливає, що рівняня $L_1 = 0$ інваріантне (у сенсі Лі) відносно оператора T лише у таких випадках:

1) $$\alpha = \beta, \quad f_1'' - \beta f_1' + 2\beta^2 f_1 + (n/2)(\alpha - 2\beta)^2(\alpha + \beta) = 0; \tag{37}$$

2) $$\beta = 0, \quad f'' + \alpha f_1' = 0. \tag{38}$$

Для випадку (38) справедлива теорема.

Теорема 3. *Рівняння* (11) *при* $\alpha \neq 2\beta$ *та* $\beta = 0$ *умовно інваріантне відносно алгебри Галілея* $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n) = \langle T, X_a^{(1)}, M, J_{ab}, X_a^{(2)} \rangle$, *де*

$$T = \exp\{\alpha x_0\}(\partial_0 + \alpha x_a \partial_a + (\alpha u + \alpha^2 \frac{\mathbf{x}^2}{4} + f_1(x_0))\partial_u), \qquad X_a^{(1)} = \partial_a, \tag{39}$$

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad M = \exp\{\alpha x_0\}\,\partial_u, \quad X_a^{(2)} = \exp\{\alpha x_0\}\{(2/\alpha)\partial_a + x_a\partial_u\},$$

причому додаткова умова має вигляд

$$L_1 = \alpha\,\Delta u + f_1' - (n/2)\,\alpha^2 = 0, \tag{40}$$

де функція f_1 *задовольняє лінійне рівняння* (38).

При $f_1 = \mathrm{const}$ рівняння (11), (40) інаріантні відносно алгебри $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n)$ (39), доповненої оператором P_0.

Наслідок. *Нелінійне рівняння теплопровідності* (13) *умовно інваріантне відносно таких алгебр*:

1) $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n) = \langle T,\ X_a^{(1)}, M, J_{ab}, X_a^{(2)}\rangle,$

де

$$T = \exp\{\alpha x_0\}\,(\partial_0 + \alpha x_a\partial_a + (\alpha \ln v + \alpha^2\frac{\mathbf{x}^2}{4} + f_1(x_0))\,v\partial_v), \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a,$$

$$P_a = \partial_a, \quad M = \exp\{\alpha x_0\}v\partial_v, \quad X_a^{(2)} = \exp\{\alpha x_0\}\,\{(2/\alpha)\partial_a + x_a v\partial_v\} \tag{41}$$

при

$$f_1 = d_1 \exp\{-\alpha x_0\} + d_2, \quad \{d_1, d_2\} \subset \mathbb{R};$$

2) $\langle \mathfrak{AG}^{(2)}(1, n), P_0\rangle$ *при* $f_1 = d_2,$

причому додаткова умова має вигляд

$$\alpha\,(v\,\Delta v - v_a v_a) - (\alpha^2 n/2 + d_1 \exp\{-\alpha x_0\} + d_2)\,v^2 = 0. \tag{42}$$

Зауважимо, що формули (41), (42) одержуються відповідно з (39), (40) заміною (12).

Зауваження 4. Ми довели, що у випадку 1 рівняння (11) умовно інваріантне відносно оператора T при додатковій умові $L_1 = 0$. Але при цьому рівняння $L_1 = 0$ не допускає операторів $X_a^{(1)}$. Тому у випадку (37) рівняння (11) не є умовно інваріантним відносно алгебри $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n)$.

Подіємо другим продовженням $\overset{(2)}{T}$ на рівняння $L_2 = 0$, де L_2 визначено в (36). В результаті одержимо

$$\overset{(2)}{T}\{L_2\} = \exp\{(\alpha - \beta)x_0\}\,[(2\beta - \alpha)L_2 + F(x_0)],$$

де

$$F(x_0) = f_1''' + (\alpha - 2\beta)\,f'' + \beta(4\beta - \alpha)\,f_1' + 2\beta^2(\alpha - 2\beta)^2 f_1 + n\,(\alpha - 2\beta)^2\,\beta^2.$$

Звідси робимо висновок, що рівняння (11) при додаткових умовах $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ та умові на функцію f_1: $F(x_0) = 0$, інваріантне відносно оператора T. Але, як і у випадку (37), рівняння (11) при цьому не допускає алгебри $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n)$.

Випадок 3. Вимагатимемо інваріантність рівняння (11) відносно алгебри Галілея $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n)$ при $\alpha = 2\beta$. Для цього подіємо другим продовженням оператора T (28) на рівняння (11). Одержимо:

$$\overset{(2)}{T}\{u_0 + u_a u_a + \beta x_a u_a - \Delta u - \alpha u\} =$$

$$= 2x_0(\beta x_0 - 1)\,\{u_0 + u_a u_a + \beta x_a u_a - \Delta u - \alpha u\} + L_1,$$

де

$$L_1 = 2\beta x_0^2 / \Delta u - 2\beta f_2 + f_2' - n/2. \tag{43}$$

Справедливе рівняння

$$\overset{(2)}{T}\{L_1\} = x_0^2(f_2'' - 2\beta f_2' + \beta n).$$

Згідно з критерієм умовної інваріантності одержуємо, що рівняння (11) при додатковій умові

$$L_1 = 2\beta x_0^2 \Delta u - 2\beta / f_2 + f_2' - n/2 = 0 \tag{44}$$

інваріантне відносно оператора T (28), якщо виконується

$$f_2'' - 2\beta f_2' + \beta n = 0. \tag{45}$$

Загальний розв'язок останнього рівняння задається так:

$$f_2(x_0) = d\exp\{2\beta x_0\} + nx_0/2 + c, \quad d \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Теорема 4. *Рівняння* (11) *при* $\alpha = 2\beta$ *умовно інваріантне відносно алгебри Галілея* $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n) = \langle T,\ X_a^{(1)}, M, J_{ab}, X_a^{(2)}\rangle$, *де*

$$T = x_0^2\partial_0 + (\beta x_0 - 1)x_0 x_a\partial_a + (\frac{\mathbf{x}^2}{4} + 2\beta x_0^2 u + nx_0/2 + c)\,\partial_u, \tag{46}$$

якщо виконується додаткова умова $2x_0^2\Delta u - nx_0 - 2c = 0$.

***Зауваження* 5.** Оператор T (46) при $\beta = c = 0$ співпадає з стандартним оператором проективних перетворень [2]. У цьому випадку рівняння (11) інваріантне відносно оператора (46) у розумінні Лі.

Аналогом оператора масштабних перетворень для рівняння (11) при $\alpha = 2\beta \neq 0$ є оператор

$$D = 2x_0\partial_0 + (2\beta x_0 + 1)x_a\partial_a + (4\beta x_0 u + f_2')\,\partial_u. \tag{47}$$

Подіявши другим продовженням оператора (47) на рівняння (11), будемо мати

$$\overset{(2)}{D}\{u_0 + u_a u_a + \beta x_a u_a - \Delta u - \alpha u\} =$$

$$= 2(2\beta x_0 - 1)\{u_0 + u_a u_a + \beta x_a u_a - \Delta u - \alpha u\} + L_1,$$

де

$$L_1 = 4\beta x_0 \Delta u - 2\beta f_2' + f_2''. \tag{48}$$

Виконується рівність $\overset{(2)}{D}\{L_1\} = 2x_0(f_2''' - 2\beta f_2'')$. Таким чином, ми показали, що рівняння (11), (48) при

$$f_2''' - 2\beta f_2'' = 0 \tag{49}$$

інваріантне відносно оператора D, що має вигляд (47).

Теорема 5. *Рівняння* (11) *при* $\alpha = 2\beta$ *умовно інваріантне відносно розширеної алгебри Галілея*

$$\mathfrak{AG}_1^{(2)}(1, n) = \langle T,\ X_a^{(1)}, M, J_{ab}, X_a^{(2)}, D\rangle,$$

де оператори T *і* D *задаються* (46), (47), *при виконанні додаткових умов* (44), (45) *та умови третього порядку*

$$\partial_0(\Delta u) = 0. \tag{50}$$

Для доведення теореми достатньо перевірити, що при диференціюванні по x_0 додаткова умова (44) співпадатиме з (48), (50), а умова на функцію f_2 (45) визначатиме умову (49).

4. Висновки. З використанням запропонованого методу знаходження алгебр умовної інваріантності ми досягли таких результатів:

1) для нелінійного рівняння (11) знайдено дві різних алгебри Галілея $\mathfrak{AG}^{(1)}(1, n)$ та $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n)$, які є його алгебрами умовної інваріантності (див. теореми 2 – 4). Причому кожна з цих алгебр допускає по два різних зображення (леми 1, 2);

2) знайдено додаткові умови, при яких наше рівняння умовно Галілей-інваріантне (див. (34), (40), (44), (50));

3) для редукції рівняння (11) можна скористатися підалгебрами алгебр $\mathfrak{AG}^{(1)}(1, n)$ та $\mathfrak{AG}^{(2)}(1, n)$, оскільки структура алгебр Галілея досить добре вивчена [8];

4) розв'язки рівняння можна нетривіальним чином розмножувати по операторах умовної симетрії при умові, що ці розв'язки задовольняють відповідні додаткові умови.

5. Антиредукція нелінійного рівняння (11). Розглянемо такий анзац:

$$u = \varphi_0(x_0) + x_a\varphi_a(x_0) + \boldsymbol{x}^2 / 4x_0, \tag{51}$$

де $\varphi_\mu(x_0)$ — довільні функції від x_0, $\boldsymbol{x}^2 = x_a x_a$, $a = \overline{1, n}$. Після підстановки (51) в рівняня (11) одержимо

$$\varphi_0' + \varphi_a\varphi_a - \alpha\varphi_0 - (n/2)x_0 + x_a(\beta\varphi_a + \varphi_a' +$$

$$+ \varphi_a/x_0 - \alpha\varphi_a) + \boldsymbol{x}^2(2\beta - \alpha)/4x_0 = 0.$$

З останнього рівняння ми можемо зробити такий висновок: анзац (51) редукує рівняння (11) для функції u від $(n+1)$ змінної x_μ при $\alpha = 2\beta$ до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_a' + \varphi_a/x_0 - \beta\varphi_a = 0; \\ \varphi_0' + \varphi_a\varphi_a - 2\beta\varphi_0 - n/2x_0 = 0, \end{cases} \tag{52}$$

для $(n+1)$ функції φ_μ від x_0. Тобто анзац (51) здійснює при $\alpha = 2\beta$ антиредукцію [9] рівняння (11) до системи (52), що складається із $(n+1)$ рівнянь.

Система рівнянь (52), на відміну від рівняння (11), легко інтегрується. Загальний розв'язок системи (52) має вигляд

$$\varphi_a = d_a \exp\{\beta x_0\}/x_0, \quad \varphi_0 = \exp\{2\beta x_0\}(nF(x_0)/2 + \boldsymbol{d}^2/x_0), \tag{53}$$

де

$$F(x_0) = \int (x_0 \exp\{2\beta x_0\})^{-1} dx_0, \quad \boldsymbol{d}^2 = d_a d_a, \quad d_a \in \mathbb{R}, \quad a = \overline{1, n}.$$

Підстановка (53) в анзац (51) задає нам багатопараметричну сім'ю розв'язків нелінійного рівняння (11).

Анзац (51) породжується набором таких операторів:

$$G_a = 2x_0\,\partial_a + \partial_{u_a}, \quad u_a = \partial u/\partial x_a. \tag{54}$$

Нелокальні оператори G_a по змінних x_a породжують стандартні перетворення Галілея $x_a \to x_a' = x_a + v_a x_0$, де v_a — групові параметри. Але, як ми вище довели, рівняння (11) не допускає цих перетворень (як у розумінні Лі, так і в термінах умовної інваріантності).

Оскільки анзац (51), побудований по операторах (54), редукує рівняння (11), то виникає питання про зв'язок цього рівняння з нелокальними операторами Галілея (54). Справедлива така теорема.

Теорема 6. *Диференціальні наслідки рівняння* (11) *умовно інваріантні відносно нелокальних операторів* G_a (54), *причому додаткова умова має вигляд* $G_a u = 0$.

Доведення теореми проведемо для випадку $n = 1$. Продиференціюємо рівняння (11) по x_1 та проведемо у ньому нелокальну заміну

$$V^1 = u_1. \tag{55}$$

Одержимо рівняння

$$V_0^1 + \beta x_1 V_1^1 + 2V^1 V_1^1 - V_{11}^1 + (\beta - \alpha)V^1 = 0, \tag{56}$$

де

$$V^1 = V^1(x_0, x_1), \qquad V_0^1 = \partial V^1 / \partial x_0, \qquad V_1^1 = \partial V^1 / \partial x_1.$$

Після використання (55) оператор G_1 набуває вигляду

$$G_1 = 2x_0\partial_1 + \partial_{V^1}. \tag{57}$$

Діючи другим продовженням оператора G_1 (57) на (56), одержуємо

$$\overset{(2)}{G_1}\{ V_0^1 + \beta x_1 V_1^1 + 2V^1 V_1^1 - V_{11}^1 + (\beta - \alpha)V^1\} = \beta G_1 V^1 \quad \text{при } \alpha = 2\beta.$$

Згідно з критерієм умовної інваріантності [2, 3] рівняння (56) $\mathfrak{Q}$-умовно інваріантне відносно оператора Галілея (57) при $\alpha = 2\beta$. Враховуючи, що ми провели заміну (55), переконаємося у справедливості теореми 6 при $n = 1$.

Підсумовуючи попередні результати, ми можемо зробити такий важливий висновок: *для редукції та знаходження точних розв'язків нелінійних рівнянь важливо знати симетрійні властивості не тільки самого рівняння, а й симетрію його диференціальних наслідків.*

1. *Фущич В. И.* Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 4–16.
2. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1990. – 336 с.
3. *Фущич В. И., Серов Н. И., Чопик В. И.* Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – №9. – С. 17–20.
4. *Myronyuk P., Chopyk V.* Conditional Galilei-invariance of multidimensional nonlinear heat equation // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics.– Kiev: Inst. Math. Ukr. Acad. Sci., 1992. – P. 66–68.
5. *Tokar V. I.* A new renormalization scheme in the Landau–Ginzburg–Wilson model // Phys. Lett. – 1984. – **104 A**, №3. – P. 135–139.
6. *Filippov A. E., Breus S. A.* On the physical branch of the exact (local) RG equation // Ibid. – 1991. – **158 A**, №6. – P. 300–306.
7. *Shtelen W., Spichak S.* Lie and Q-conditional symmetry and exact solutions of local Wilson renormalization group equation // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. – Kiev: Inst. Math. Ukr. Acad. Sci., 1992. – P. 50–54.
8. *Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 299 с.
9. *Фущич В. И., Серов Н. И., Репета В. К.* Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения // Докл. АН Украины. Сер. А. – 1991, №5. – С. 29–34.

Одержано 16.02.93