УДК 517.52

В. В. Волчков, канд. физ.-мат. наук (Донец. ун-т)

О ПРОБЛЕМЕ ПОМПЕЙЮ И НЕКОТОРЫХ ЕЕ ОБОБЩЕНИЯХ

The functions are investigated, the integrals of which over a given collection of sets are zero. The Pompeiu sets are described in terms of the approximation of their indicators by linear combinations of indicators of balls with special radii.

Досліджуються функції з нульовими інтегралами за даним набором множин. Одержано опис множин Помпейю в термінах апроксимації їх індикаторів лінійними комбінаціями індикаторів куль зі спеціальними радіусами.

1. Введение. Пусть K — компакт в вещественном евклидовом пространстве R^n $(n \geq 2)$, $f \in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$ и

$$\int_{AK} f(u)\,du = 0 \qquad (1)$$

для любого множества $AK \subset R^n$, конгруентного компакту K. Верно ли, что $f = 0$ почти всюду? Для многих K ответ положительный (см. [1, 2] и библиографию к этим работам). Известная проблема Помпейю состоит в том, чтобы описать все множества K с этим свойством, называемые множествами Помпейю.

В п. 2 данной работы при некоторых ограничениях получено описание множеств Помпейю в терминах аппроксимации их индикаторов по $L(R^n)$-норме линейными комбинациями индикаторов шаров со специальными радиусами.

В п. 3 изучен ряд обобщений рассмотренной задачи в случае, когда K — эллипсоид или параллелепипед. При этом получено также обобщение известной "задачи трех квадратов" (см., например, [3]).

В п. 4 рассмотрен случай, когда f с условием (1) задана на ограниченной области.

Введем следующие обозначения: $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в R^n, $|x| = \sqrt{(x,x)}$ — евклидова норма в R^n, $\Omega_{n-1} = \{x \in R^n\colon |x| = 1\}$, ρ, σ — полярные координаты ($\forall\, x \in R^n$, $x = \rho\sigma$, где $\rho = |x|$, $\sigma \in \Omega_{n-1}$). Как обычно, $\hat{f}$ — преобразование Фурье суммируемой функции f, $\varphi * \psi$ — свертка функций φ и ψ, I_m — функция Бесселя первого рода порядка m. Возрастающую последовательность всех положительных корней $I_{n/2}$ обозначим через $\{\nu_m\}_{m=1}^{\infty}$. Пусть также $\{Y_l^{(k)}(\sigma)\}$ $(1 \leq l \leq a_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ — базис сферических гармоник в $L^2(\Omega_{n-1})$, χ_k — индикатор множества K.

2. Описание множеств Помпейю.

Теорема 1. *Для того чтобы существовала ненулевая функция медленного роста с нулевыми интегралами по всем множествам из R^n, конгруэнтным K, необходимо и достаточно, чтобы индикатор K был пределом в $L(R^n)$ последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров с радиусами, пропорциональными положительным корням $I_{n/2}$.*

Доказательство достаточности. Из условия следует, что функцию $\hat{\chi}_k$ можно аппроксимировать с любой точностью в $C(R^n)$ пробразованиями Фурье линейных комбинаций индикаторов рассматриваемых шаров. Поскольку радиусы этих шаров пропорциональны корням $I_{n/2}$, преобразования Фурье их индикаторов имеют общую сферу нулей. Следовательно, на этой сфере $\hat{\chi}_k = 0$. Если r — радиус этой сферы, то функция $e^{ir(x,\sigma)}$ при любом фиксированном $\sigma \in \Omega_{n-1}$ имеет требуемые свойства.

Доказательство необходимости. Из условия следует [4], что $\hat{\chi}_k = 0$ на некоторой сфере в R^n с центром в нуле. Не ограничивая общности, можно считать эту сферу единичной. Пусть T — подпространство в $L(R^n)$, состоящее из функций, которые являются пределами в $L(R^n)$ последовательностей финитных функций из $L^\infty(R^n)$, преобразования Фурье которых обращаются в нуль на Ω_{n-1}. Достаточно доказать, что система U индикаторов всех шаров с радиусами $\nu_1, \nu_2, \ldots$ полна в T. Это эквивалентно тому, что всякий линейный непрерывный функционал из T^*, аннулирующий индикаторы этих шаров, аннулирует все T (или любую финитную функцию в $T \cap L^\infty$, так как множество таких функций всюду плотно в T). Продолжая по теореме Хана – Банаха всякий $\varphi \in T^*$ на все $L(R^n)$, получаем по теореме Риса $\forall\, g \in T$

$$\varphi(g) = \int_{R^n} g(u)\psi(u)\,du, \quad \text{где } \psi \in L^\infty.$$

Пусть $\forall\, \omega \in U$ $\varphi(\omega) = 0$. Достаточно доказать, что для любой финитной $g \in T$ $\varphi(g) = 0$. При этом можно считать, что $\psi \in C^\infty(R^n)$. Действительно, если это верно для таких ψ, то для любой финитной $h \in C^\infty(R^n)$ функция $\psi * h \in C^\infty(R^n)$, и тогда $\psi * h * g = 0 = \psi * g * h$, откуда в силу произвольности h $\varphi(g) = 0$. Из условия $\varphi(\omega) = 0$ $\forall\, \omega \in U$ следует, что справедливо разложение

$$\psi(\rho\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} c_{k,l} \frac{I_{n/2+k-1}(\rho)}{\rho^{(n-2)/2}} Y_l^{(k)}(\sigma), \tag{2}$$

причем ряд сходится равномерно на компактах в R^n ([5], см. также [6, с. 36]). Далее, поскольку $g \in T$, то $\forall\, \eta \in \Omega_{n-1}$

$$\int_{R^n} g(x) e^{-i(x,\eta)}\,dx = 0.$$

Умножая это равенство на $Y_l^{(k)}(\eta)$ и интегрируя по Ω_{n-1}, после перемены порядка интегрирования получаем [6, с. 40]

$$\int_{R^n} g(x) \frac{I_{n/2+k-1}(\rho)}{\rho^{(n-2)/2}} Y_l^{(k)}(\sigma) = 0.$$

Отсюда и из (2) вытекает $\varphi(g) = 0$. Теорема 1 доказана.

3. Некоторые обобщения. В дальнейшем запись $\xi \to \infty$ для $x \in R^n$ означает любое стремление x к бесконечности, т. е. $|x| \to +\infty$.

Теорема 2. *Пусть K_1 и K_2 — произвольные эллипсоиды в R^n, $f, g \in C(R^n)$ и $f * \chi_{K_1} \equiv g * \chi_{K_2} \equiv 0$. Тогда:*

1) *если при $x \to 0$*

$$f(x) - g(x) = o\big(|x|^{(1-n)/2}\big),$$

то $f \equiv g$;

2) *существуют различные* f и g, *удовлетворяющие условию теоремы, для которых*

$$f(x) - g(x) = O(|x|^{(1-n)/2}).$$

Для доказательства потребуется следующая лемма.

Лемма. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *возрастающая последовательность положительных чисел*, $\nu > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty \quad и \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k I_{\nu-1/2}(\lambda_k t).$$

Тогда если $\varphi(t) = o(1/\sqrt{t})$ *при* $t \to +\infty$, *то все* $c_k = 0$.

Доказательство. Из асимптотических разложений для бесселевых функций [7, с. 173] имеем

$$\sqrt{t}\,\varphi(t) = O(1/t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_k}} \cos\left(\lambda_k t - \frac{\pi\nu}{2}\right)$$

при $t \to +\infty$. Отсюда из условия леммы следует

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} \sqrt{t}\,\varphi(t) \cos\left(\lambda_p t - \frac{\pi\nu}{2}\right) dt =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x} \int_{-x}^{x} \cos\left(\lambda_p t - \frac{\pi\nu}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\sqrt{\lambda_k}} \cos\left(\lambda_k t - \frac{\pi\nu}{2}\right) dt = \frac{c_p}{2\sqrt{\lambda_p}},$$

что и требовалось доказать.

Докажем первое утверждение теоремы. Рассмотрим случай, когда K_1 — шар радиуса a, $f \in C^{\infty}$, $g \equiv 0$. Из условия следует [5, с. 17], что

$$f(\rho\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{k,l}(\rho)\, Y_l^{(k)}(\sigma),$$

где

$$f_{k,l}(\rho) = \int_{\Omega_{n-1}} f(\rho\sigma)\, \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}\, d\sigma = \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} \frac{I_{n/2+k-1}\left(\frac{\nu_m \rho}{a}\right)}{\rho^{(n-2)/2}}, \tag{3}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_{m,k,l}| < \infty,$$

и функции $f_{k,l}(\rho)\, Y_l^{(k)}(\sigma)$ имеют нулевые интегралы по всем шарам радиуса a. Отсюда и из леммы получаем $f \equiv 0$. Далее, если $f \in C^{\infty}$, $g \equiv 0$, K_1 — произвольный эллипсоид, то, применяя сжатие, переводящее K_1 в шар, снова получаем $f \equiv 0$. Рассмотрим теперь общий случай. Не ограничивая общности, можно считать $f, g \in C^{\infty}(R^n)$ [5, с. 5]. Пусть $\psi = f - g$, тогда

$$\psi * \chi_{K_2} \equiv f * \chi_{K_2} = o(|x|^{(1-n)/2})$$

при $x \to \infty$. Но $(f * \chi_{K_2}) * \chi_{K_2} \equiv 0$ и $f * \chi_{K_2} \equiv 0$. Отсюда $\psi * \chi_{K_2} \equiv 0$, но $\psi = o(|x|^{(1-n)/2})$ при $x \to \infty$ и $\psi \equiv 0$.

Второму утверждению теоремы удовлетворяют функции, полученные из функции $I_{(n-2)/2}(\rho)/\rho^{(n-2)/2}$ подходящими сжатиями (см., например, [5, с. 17]).

Теорема 3. *Пусть* Π_1 и Π_2 — *произвольные параллелепипеды в* R^n,

$$f, g \in C(R^n), \quad f * \chi_{\Pi_1} \equiv g * \chi_{\Pi_2} \equiv 0.$$

Тогда: 1) *если при* $x \to \infty$ $f - g \to 0$, *то* $f \equiv g$; 2) *существуют различные* f *и* g, *удовлетворяющие условию теоремы, для которых* $f - g = O(1)$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2, достаточно рассмотреть случай, когда $g \equiv 0$, $f \in C^\infty$, Π_1 — единичний куб. Из условия следует (см., например, [8]), что смешанная разность от f по значениям в вершинах любого единичного куба, полученного из Π_1 сдвигом, равна нулю. Очевидно, это же верно для любого куба с целочисленными длинами сторон, гомотетичного Π_1. Отсюда следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение известно (см., например, [4]).

Теорема 4. *Пусть* K_1 — *эллипсоид, а* Π — *параллелепипед в* R^n,

$$f, g \in C(R^n), \quad f * \chi_K \equiv g * \chi_\Pi \equiv 0.$$

Тогда: 1) *если при* $x \to \infty$ $f - g = o(|x|^{(1-n)/2})$, *то* $f \equiv g$; 2) *существуют различные* f и g, *удовлетворяющие условию теоремы, для которых*

$$f - g = O(|x|^{(1-n)/2}).$$

Доказательство. Пусть $\psi = f - g$, тогда

$$g * \chi_K \equiv -\psi * \chi_K = o(|x|^{(1-n)/2})$$

при $x \to \infty$. Поскольку $(g * \chi_K) * \chi_\Pi \equiv 0$, то по теореме 3 $g * \chi_K \equiv 0$ и $\psi * \chi_K \equiv$ $\equiv 0$. Теперь из теоремы 2 получаем первое утверждение. Второму утверждению удовлетворяют $g \equiv 0$ и f — функция, полученная из $I_{(n-2)/2}(\rho)/\rho^{(n-2)/2}$ подходящим сжатием.

Пусть $\{\Pi\} = \{\Pi_1, \dots, \Pi_m\}$ — произвольный набор попарно гомотетичных параллелепипедов в R^n. Обозначим $N(\{\Pi\})$ — множество общих нулей преобразований Фурье индикаторов $\Pi_1, \dots, \Pi_m$. Следующий результат является обобщением "задачи трех квадратов" [3].

Теорема 5. *Пусть* $f_1, \dots, f_m \in C(R^n)$ *и для некоторого*

$$\{\Pi\} = \{\Pi_1, \dots, \Pi_m\} \quad f_k * \chi_{\Pi_k} \equiv 0$$

при всех $1 \le k \le m$. *Пусть также при всех* $1 \le k, l \le m$ $f_k - f_l \to 0$ *при* $x \to \infty$. *Тогда если* $N(\{\Pi\}) = \varnothing$, *то все* $f_k \equiv 0$. *В противном случае существуют ненулевые функции с указанным условием*.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что все f_k тождественно совпадают. Отсюда получаем [5, с. 59], что при $N(\{\Pi\}) = \varnothing$ все $f_k \equiv 0$. При $N(\{\Pi\}) \neq$ $\neq \varnothing$ см. [4].

Теорема 6. *Пусть* K_1 — *произвольный эллипсоид, отличный от шара, и для каждого эллипсоида* K_α, *полученного из* K *вращением, существует функция* $f_\alpha \in C(R^n)$ *такая, что* $f_\alpha * \chi_{K_\alpha} \equiv 0$ *и при*

$$x \to \infty \quad f_\alpha - f_\beta = o(|x|^{(1-n)/2})$$

при всех α и β. *Тогда все* $f_\alpha \equiv 0$.

Доказательство следует из теоремы 2 и того, что эллипсоид, отличный от шара, — множество Помпейю (см., например, [2]).

Из теоремы 3 следует аналогичный результат для случая, когда K — параллелепипед. При этом условие

$$f_\alpha - f_\beta = o(|x|^{(1-n)/2})$$

заменяется более слабым $f_\alpha - f_\beta \to 0$.

4. Проблема Помпейю на ограниченной области. Рассмотрим случай, когда f с условием (1) задана на шаре $B_r^n = \{x \in R^n\colon |x| < r\}$. Будем говорить, что K принадлежит классу $\mathfrak{M}_{a,n}$, если для некоторого множества AK, конгруэнтного K, функция

$$\lambda(\rho) = \int\limits_{\Omega_{n-1}} \chi_{AK}(\rho\sigma)\, d\sigma$$

постоянна при $0 < \rho \le a$ и равна нулю при $\rho > a$. Например, все шаровые секторы радиуса a принадлежат $\mathfrak{M}_{a,n}$.

Теорема 7. *Пусть* $K \in \mathfrak{M}_{a,n}$, $r > 3a/2$, *и существует ненулевая функция* $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_r^n)$, *имеющая нулевые интегралы по всем подмножествам* B_r^n, *конгруэнтным* K. *Тогда* K — *шар*.

Доказательство. Можно считать, что $f \in C^\infty(B_r^n)$ [5, с. 5]. Из определения класса $\mathfrak{M}_{a,n}$ следует, что f имеет нулевые интегралы по всем шарам радиуса a. Тогда каждую функцию $\psi_{k,l} = f_{k,l}(\rho)\, Y_l^{(k)}(\sigma)$ в (3) можно продолжить по формуле (3) на все R^n, причем $\psi_{k,l}$, а значит, и свертка $\psi_{k,l} * \chi_K$ имеют нулевые интегралы по всем шарам радиуса a в R^n. Из условия следует, что эта свертка равна нулю в некотором шаре радиуса a. По теореме единственности [5, с. 49] $\psi_{k,l} * \chi_K \equiv 0$. Если теперь K не является шаром, то [2] $\psi_{k,l} \equiv 0$, откуда $f \equiv 0$, что противоречит условию.

1 *Заставный В. П., Тригуб Р. М.* О функциях с нулевым интегралом по множествам, конгруэнтным данному // Теория функций и приближений. Тр. 3-й Саратов. зим. шк. (27 янв. – 7 февр. 1986 г.). – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, ч. II. – 240 с.
2 *Williams S.* A partial solution of the Pompeiu problem // Math. Ann. – 1976. – **223**. – P. 84–91.
3. *Laird P. G.* A reconsideration of “there squares” problem // Aequat. mat. – 1980. – **21**, № 1. – P. 98–104.
4. *Заставный В. П.* Теорема о нулях преобразования Фурье индикатора и ее применение. – Новосибирск, 1986. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 701–В.87.
5. *Волчков В. В.* О функциях с нулевыми интегралами по некоторым множествам. – Донецк, 1991. – 20 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 301-Ук91.
6. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 736 с.
7. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 284 с.
8. *Волчков В. В.* О функциях с нулевыми интегралами по кубам // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 6. – С. 859–863.

Получено 18. 10. 91