УДК 517.983

Л. М. Герштейн, канд. физ.-мат. наук (Воронеж. высш. воен. авиацион. инж. уч-ще)

О РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

For the complete second-order differential equation with unbounded operator coefficients $u'' + A(t)u' + B(t)u = f$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$, the Cauchy problem is studied. By using the "commutant method", we construct the coercive solution of this problem is in the Hölder space in the case where the operator B has the same "strength" as the operator A^2.

Розглядається задача Коші для повного диференціального рівняння другого порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами $u'' + A(t)u' + B(t)u = f$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$. За допомогою „методу комутанта" встановлюється коерцитивний розв'язок задачі в просторі Гельдера у випадку, коли оператор B має „силу" оператора A^2.

В настоящей работе рассматривается полное дифференциальное уравнение второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами следующего вида:

$$u'' + A(t)u' + B(t)u = f. \tag{1}$$

Здесь u — неизвестная функция, определенная на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве E; $A(t)$, $B(t)$ — при каждом $t \in [0, T]$ неограниченные линейные операторы с плотными в пространстве E областями определения $D(A(t)) = D_1$, $D(B(t)) = D_2$ соответственно; f — известная функция, определенная на отрезке $[0, T]$ и принимающая значения в пространстве E.

Под решением уравнения (1) будем понимать дважды непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0, T]$ функцию u, для которой определены и непрерывны функции $A(t)u'$, $B(t)u$, удовлетворяющую при $t \in [0, T]$ уравнению (1).

Задача Коши для уравнения (1) изучалась в работах [1 – 3]. При этом предполагалось, что резольвенты операторов $A(t)$, $B(t)$ удовлетворяют различного рода оценкам, оператор-функции A, B достаточно гладкие, и операторы $B(t)$ при всех $t \in [0, T]$ имеют "силу" строго меньшую чем $A^2(t)$. Для дифференциальных операторов $A(t)$ и $B(t)$ порядков n и m соответственно последнее условие означает, что $m < 2n$.

"Метод коммутанта", предложенный в [4, 5], позволил рассмотреть случай, когда оператор B подчинен лишь оператору A^2, но имеет специальный вид [5].

В настоящей работе полученная в [6] теорема о возмущении производящего оператора полугруппы в сочетании с "методом коммутанта" используется для снятия ограничений на структуру оператора B. Устанавливается коэрцитивная оценка решения задачи с постоянными операторами, которая позволяет доказать разрешимость задачи с переменными операторами при минимальных требованиях гладкости.

1. Рассмотрим сначала задачу Коши для уравнения (1) с постоянными коэффициентами

$$u'' + Au' + Bu = f, \tag{2}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{3}$$

Следуя [2], сведем уравнение (2) к системе уравнений первого порядка. С этой целью сделаем замены $v(t) = u'(t)$, $w(t) = v(t) + Au(t)$. Тогда задача (2), (3) примет следующий вид:

$$\begin{cases} v' + Av - BA^{-1}v + BA^{-1}w = f, \\ w' - BA^{-1}v + BA^{-1}w = f, \end{cases} \tag{4}$$

$$v(0) = u_1, \quad w(0) = u_1 + Au_0. \tag{5}$$

Запишем теперь систему (4) как одно уравнение первого порядка в пространстве $\tilde{E} = E \times E$. Для этого введем обозначения $C = BA^{-1}$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -C & C \\ -C & C-A \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix},$$

получим следующую задачу

$$x' + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x = \tilde{f}, \tag{6}$$

$$x = x_0. \tag{7}$$

Если под решением задачи (6), (7) понимать сильное решение [2], то задачи (1), (2) и (6), (7) эквивалентны в том смысле, что однозначная разрешимость одной влечет однозначную разрешимость другой и наоборот.

Выделяя в правой части уравнения (6) диагональный оператор, рассматриваем это уравнение как возмущенное относительно уравнения

$$x + \mathfrak{A}x = \tilde{f}. \tag{8}$$

К уравнению (8) будет применяться теорема о возмущении, в которой предполагается подчиненность коммутанта операторов, что для матричных операторов в общем случае места не имеет.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1° $D(B) = D(A^2)$; *оператор* A *имеет обратный и оператор* BA^{-2} *ограничен в пространстве* E;

2° *оператор* A *сильно позитивен в пространстве* E;

3° *операторный пучок* $Q_\lambda(A, B) = \lambda^2 - \lambda A + B$ *при* $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0$ *имеет обратный и выполняется оценка*

$$\| Q_\lambda^{-1}(A, B) \|_{E \to E} \le M(1 + |\lambda|)^{-2}; \tag{9}$$

4° *существуют числа* $\alpha, \beta, \rho > 0$ *такие, что* $0 < \alpha + \beta < 3 - \rho$, *и оператор* $\Delta(A, B) = AB - BA$ *удовлетворяет оценке*

$$\| A^{-\alpha} \Delta(AB) A^{-\beta} \| \le M; \tag{10}$$

5° *функция* f *удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $\alpha > 0$ *и* $u_0 \in D_2$, $u_1 \in D_1$.

Тогда задача (2), (3) *имеет единственное решение.*

Доказательство проведем по указанной выше схеме. В [2] показано, что из условия 2° следует, что оператор $\mathfrak{A}$ порождает в пространстве $\tilde{E}$ аналитическую полугруппу. Кроме того, из условия 5° следует, что $\tilde{f} \in C^\alpha([0, T], \tilde{E})$ и $x_0 \in D(\mathfrak{A})$. Тогда задача Коши для уравнения (8) имеет единственное решение [2]. Проверим теперь условия теоремы о возмущении из [6]. Имеем

$$\Delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \Delta(C,A) & \Delta(A,C) \\ \Delta(C,A) & \Delta(A,C) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Воспользуемся тождеством

$$\Delta(A, C) = -\Delta(C, A) = \Delta(A, B)A^{-1}$$

и обратимостью оператора $\mathfrak{A}$, которая следует из условия 1°. Тогда из формулы (11) и условия 3° получаем

$$\| \mathfrak{A}^{-\alpha}\Delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\, \mathfrak{A}^{-\beta} \|_{\tilde{E}\to\tilde{E}} \leq M \tag{12}$$

при тех же α, β, ρ, что и в оценке (10). Таким образом, установлена необходимая подчиненность коммутанта $\Delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Рассмотрим теперь резольвенту оператора $-\mathfrak{B}$. Из формулы

$$R_\lambda(\mathfrak{B}) = (\lambda I + \mathfrak{B})^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda+C-A)Q_\lambda^{-1}(A,B) & -CQ_\lambda^{-1}(A,B) \\ CQ_\lambda^{-1}(A,B) & (\lambda+C)Q_\lambda^{-1}(A,B) \end{pmatrix},$$

вытекает следующая оценка

$$\begin{gathered} \| R_\lambda(\mathfrak{B}) \|_{L(\tilde{E})} \leq \max\left\{ \| \lambda Q_\lambda^{-1}(A, B) \|_{L(E)}, \| CQ_\lambda^{-1}(A, B) \|_{L(E)}, \right. \\ \left. \| AQ_\lambda^{-1}(A, B) \|_{L(E)} \right\} \leq M \max\left\{ \| \lambda Q_\lambda^{-1}(A, B) \|_{L(E)}, \| AQ_\lambda^{-1}(A, B) \|_{L(E)} \right\}, \end{gathered} \tag{13}$$

Из условия 4° и неравенства (13) следует оценка

$$\| R_\lambda(\mathfrak{B}) \|_{L(E)} \leq M\,(1 + |\lambda|)^{-1} \quad (\operatorname{Re}\lambda > \omega_0).$$

Последняя оценка означает, что оператор $-\mathfrak{B}$ порождает в пространстве $\tilde{E}$ сильно непрерывную и, более того, аналитическую полугруппу.

Таким образом, все условия названной теоремы проверены. Из нее следует, что оператор $-(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ порождает в пространстве $\tilde{E}$ аналитическую полугруппу. Это в свою очередь позволяет утверждать, что существует единственное решение задачи (6), (7). Теорема доказана.

Отметим, что оценка (9) операторного пучка Q_λ может быть заменена условием более грубым, но легче проверяемым. Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть выполнены условия*:

1) *оператор* B *сильно позитивен в пространстве* E, *т. е.*

$$\| R_\lambda(B) \| \leq M_B\, |\lambda|^{-1} \quad (\operatorname{Re}\lambda > \omega_0);$$

2) *оператор* B *имеет ограниченный обратный и справедливо неравенство* $\| AB^{-1/2} \| \leq M_{AB^{-1/2}}$;

3) *константы* M_B *и* $M_{AB^{-1/2}}$ *удовлетворяют условию* $M_B M_{AB^{-1/2}} < 1$.

Тогда справедлива оценка (9) *условия* 3° *теоремы* 1.

Доказательство. Воспользуемся тождеством

$$Q_\lambda(A, B) = \left[I - \lambda A(\lambda^2 + B)^{-1} \right] (\lambda^2 + B). \tag{14}$$

Кроме того, из условий 1 и 2 следует оценка

$$\| \lambda A(\lambda^2 + B)^{-1} \| \leq M_{AB^{-1/2}} |\lambda| \, \| B^{1/2}(\lambda^2 + B)^{-1} \| \leq M_{AB^{1/2}} M_B.$$

Условие 3 позволяет утверждать, что оператор $\lambda A(\lambda^2 + B)^{-1}$ ограничен и его норма меньше единицы для всех $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0$. Поэтому для таких λ оператор $I - \lambda A(\lambda^2 + B)^{-1}$ имеет ограниченный обратный. Тогда из тождества (14) следует необходимая оценка.

Для изучения задачи с переменными операторами установим коэрцитивную оценку решения задачи (2), (3) в пространстве Гельдера $C_0^\alpha([0,T],E)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда решение задачи* (2), (3) *удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{\tilde C^\alpha} \equiv \|u''\|_{C_0^\alpha} + \|Au'\|_{C_0^\alpha} + \|Bu\|_{C_0^\alpha} \le$$
$$\le M_\alpha\left(\|f\|_{C_0^\alpha} + \|A^2u_0\|_E + \|Au_1\|_E\right). \tag{15}$$

Доказательство. Воспользуемся опять эквивалентностью задач (2), (3) и (6), (7). Так как оператор $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ сильно позитивен в пространстве $\tilde E$ и $x_0 \in D(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$, то из [7] следует коэрцитивная оценка решения задачи (6), (7);

$$\|x'\|_{C_0^\alpha([0,T],\tilde E)} + \|\mathfrak{A}x\|_{C_0^\alpha([0,T],\tilde E)} \le M_\alpha\left(\|\tilde f\|_{C_0^\alpha([0,T],\tilde E)} + \|\mathfrak{A}x_0\|_{\tilde E}\right). \tag{16}$$

В силу сделанных выше обозначений и замен последняя оценка эквивалентна следующему неравенству:

$$\|v'\|_{C_0^\alpha} + \|w'\|_{C_0^\alpha} + \|Av\|_{C_0^\alpha} + \|Aw\|_{C_0^\alpha} =$$
$$= \|u''\|_{C_0^\alpha} + \|Au'\|_{C_0^\alpha} + \|u''+Au'\|_{C_0^\alpha} + \|Au'+A^2u\|_{C_0^\alpha} \le$$
$$\le M\left(\|f\|_{C_0^\alpha} + \|Au_1\|_E + \|Au_1 + A^2u_0\|_E\right).$$

Из этого неравенства, в частности, следует

$$\|u''\|_{C_0^\alpha} + \|Au'\|_{C_0^\alpha} \le M_1\left(\|f\|_{C_0^\alpha} + \|Au_1\|_E + \|A^2u_0\|_E\right). \tag{17}$$

Последнее слагаемое в левой части неравенства (15) оценивается в силу уравнения

$$\|Bu\|_{C_0^\alpha} = \|f-u''-Au'\|_{C_0^\alpha} \le \|u''\|_{C_0^\alpha} + \|Au'\|_{C_0^\alpha} + \|f\|_{C_0^\alpha}. \tag{18}$$

Из оценок (17), (18) следует оценка (15).

2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1):

$$u'' + A(t)u' + B(t)u = f, \tag{19}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{20}$$

Установленная в предыдущем пункте коэрцитивная разрешимость задачи (2), (3) позволяет исследовать задачу (19), (20) по стандартной схеме методом "замороженных коэффициентов".

Теорема 3. *Пусть операторы* $A(t)$ *и* $B(t)$ *при каждом* $t \in [0,T]$ *удовлетворяют условиям* $2^\circ - 5^\circ$ *и*:

6° $D(A(t)) = D_1$, $D(B(t)) = D_2$, $D(A^2(t)) = D_2$;

7° *операторы* A *при всех* $t \in [0,T]$ *имеют ограниченные обратные, оператор-функции* $A(t)A^{-1}(0)$, $B(t)A^{-2}(0)$ *удовлетворяют условию Гельдера с показателем* $\alpha > 0$.

Тогда задача (19), (20) *имеет единственное решение и справедлива оценка*

$$\|u\|_{\tilde C^\alpha} \equiv \|u''\|_{C_0^\alpha} + \|A(0)u'\|_{C_0^\alpha} + \|B(0)u\|_{C_0^\alpha} \le$$
$$\le M_\alpha\left(\|f\|_{C_0^\alpha} + \|A(0)u_1\|_E + \|A^2(0)u_0\|_E\right). \tag{21}$$

Доказательство. Сведем задачу (19), (20) к задаче с однородными граничными условиями. Рассмотрим для этого задачу с постоянными операторами

$$v'' + A(0)v' + B(0)v = f, \quad v(0) = u_0, \quad v'(0) = u_1. \tag{22}$$

При сделанных предположениях из теорем 1 и 2 следует, что задача (22) имеет единственное решение из пространства $\tilde{C}^\alpha$ и справедливо неравенство (15). Сделав замену $u = \bar{u} + v$, получим задачу

$$\bar{u}'' + A(t)\bar{u}' + B(t)\bar{u} = \bar{f}, \quad \bar{u}(0) = \bar{u}'(0) = 0, \tag{23}$$

где

$$\bar{f}(t) = f(t) + v''(t) + A(t)v'(t) + B(t)v(t).$$

Функция $\bar{f} \in C_0^\alpha$ и удовлетворяет оценке

$$\| \bar{f} \|_{C_0^\alpha} \le M\Big(\|f\|_{C_0^\alpha} + \|A^2(0)u_0\|_E + \|A(0)u_1\|_E \Big). \tag{24}$$

Покажем разрешимость задачи (23) на малом отрезке $[0, \delta]$. Для этого запишем ее в виде

$$L\bar{u} \equiv \bar{u}'' + A(0)\bar{u}' + B(0)\bar{u} =$$

$$= \bar{f} - [A(t) - A(0)]\, A^{-1}(0)A(0)\bar{u}' - [B(t) - B(0)]\, A^{-2}(0)A^2(0)\bar{u}, \tag{25}$$

ь

$$\bar{u}(0) = \bar{u}'(0) = 0. \tag{26}$$

Левая часть уравнения (25) и условия (26) определяют линейный оператор L, действующий в силу теорем 1 и 2 из пространства $\tilde{C}^\alpha$ в пространство C_0^α. Сделаем еще одну замену $L\bar{u} = w$ и обратим оператор L. Получим равенство $\bar{u} = L^{-1}w$. Задача (25), (26) таким образом свелась к уравнению

$$w + Kw = \bar{f}. \tag{27}$$

Здесь оператор K задается формулой

$$(Kg)(t) = [A(t) - A(0)]\, A^{-1}(0)A(0)(L^{-1}g)'(t) +$$

$$+ [B(t) - B(0)]\, A^{-2}(0)A^2(0)(L^{-1}g)(t).$$

Из теоремы 2 следует, что операторы $A^2(0)L^{-1}$ и $A(0)\dfrac{d}{dt}L^{-1}$ ограниченно действуют в пространстве C_0^α. Кроме того, из условия 7° вытекает неравенство

$$\| [A(t) - A(0)]\, A^{-1}(0) \|_{L(E)}, \ \| [B(t) - B(0)]\, A^{-2}(0) \|_{L(E)} \le M\delta^\alpha. \tag{28}$$

Поэтому для оператора K справедлива оценка ($g \in C_0^\alpha$)

$$\| (Kg)(t) \|_E \le \delta^\alpha \| g \|_{C_0^\alpha} \Big[\Big\| A(0)\frac{d}{dt}L^{-1} \Big\|_{L(E)} + \| A^2(0)L^{-1} \|_{L(E)} \Big]. \tag{29}$$

Оценим коэффициент Гельдера функции Kg. Имеем равенство

$$(Kg)(t + \Delta t) - (Kg)(t) = [A(t + \Delta t) - A(t)]\, A^{-1}(0)A(0)\frac{d}{dt}(L^{-1}g)(t) +$$

$$+ [B(t + \Delta t) - B(t)]\, A^{-2}(0)A^2(0)(L^{-1}g)(t) +$$

$$+ [A(t) - A(0)]\, A^{-1}(0)A(0)\frac{d}{dt}[(L^{-1}g)(t + \Delta t) -$$

$$-(L^{-1}g)(t)] + [B(t) - B(0)]\,A^{-2}(0)A^{2}(0)[(L^{-1}g)(t+\Delta t) - (L^{-1}g)(t)]. \tag{30}$$

Последние два слагаемых правой части равенства (30) на основании оценки (28) и свойств оператора L^{-1} оцениваются величиной $\delta^{\alpha}\|g\|_{C_0^{\alpha}}\Delta t^{\alpha}\cdot t^{-\alpha}$. Первые два слагаемых этого равенства с учетом условия 7° оцениваются величиной $\|g\|_{C_0^{\alpha}}\Delta t^{\alpha}$. Поэтому справедливо неравенство

$$t^{\alpha}\Delta t^{-\alpha}\|(Kg)(t+\Delta t) - (Kg)(t)\|_E \le M\|g\|_{C_0^{\alpha}}(\delta^{\alpha} + t^{\alpha}) \le 2M\|g\|_{C_0^{\alpha}}\delta^{\alpha}. \tag{31}$$

Из неравенств (29) и (31) следует оценка $\|K\|_{C_0^{\alpha}\to C_0^{\alpha}} \le M\delta^{\alpha}$, из которой вытекает, что при достаточно малом $\delta > 0$ оператор K сжимающий в пространстве C_0^{α}.

Таким образом, уравнение (27) имеет единственное решение $w = [I + K]^{-1}\bar{f}$, а функция $u = L^{-1}[I + K]^{-1}\bar{f}$ является единственным решением задачи (23) на отрезке $[0, \delta]$. Отсюда следует однозначная разрешимость задачи (19), (20) на этом отрезке. Из сказанного также следует, что оператор $L^{-1}[I + K]^{-1}$ действует из пространства C_0^{α} в пространство $\tilde{C}^{\alpha}$. Поэтому справедлива оценка

$$\|\bar{u}\|_{\tilde{C}^{\alpha}} \le M_{\alpha}\|\bar{f}\|_{C_0^{\alpha}}, \tag{32}$$

из которой вытекает коэрцитивная оценка (21) на малом отрезке. Заметим, что величина отрезка $[0, \delta]$ зависит лишь от констант в неравенствах (28), норм операторов $A^{2}(0)L^{-1}$, $A(0)\dfrac{d}{dt}L^{-1}$ и константы в неравенстве коэрцитивности (15), поэтому полученное решение u может быть продолжено на отрезок $[\delta, 2\delta]$. В силу единственности решения и оценки (32) функция u может быть гладко продолжена на отрезок $[0, 2\delta - \varepsilon]$. Повторив этот процесс, получим утверждение теоремы.

1. *Соболевский П. Е.* О дифференциальных уравнениях второго порядка в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. – 1962. – **10**, № 4. – С. 774–777.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1967. – 464 с.
3. *Якубов С. Я.* О задаче Коши для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. – 1966. – **168**, № 4. – С. 759–762.
4. *Герштейн Л. М., Соболевский П. Е.* Об одном новом подходе к исследованию разрешимости эволюционных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 10. – С. 9–14.
5. *Герштейн Л. М.* Метод коммутанта исследования новых классов дифференциальных уравнений с частными производными // Общая теория граничных задач. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 258.
6. *Герштейн Л. М.* О возмущении производящего оператора аналитической полугруппы // Функцион. анализ и его прил. – 1988. – **22**, вып. 1. – С. 62–63.
7. *Соболевский П. Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 1. – С. 52–55.

Получено 28.02.91