УДК 517.51

А. А. Конюшков, канд. физ.-мат. наук (Моск. инж.-физ. ин-т)

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ B И C И РАВЕНСТВЕ ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ КЛАССА C ИЛИ ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ – СТИЛТЬЕСА

We study the problem on restrictions that should be imposed on the number sequences $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ so that, for any $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$, $a_n \geq \alpha_n$, $b_n \geq \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ would not belong to the classes B and C.

Вивчається питання про обмеження на послідовності чисел $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, при яких для будь-яких $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ з $a_n \geq \alpha_n$, $b_n \geq \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ не належать класу B або C.

1. Пусть функция $f(x)$ из $\mathfrak{L}(0, 2\pi)$ принадлежит некоторому классу K. Тогда говорят, что ее ряд Фурье

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

принадлежит классу K. Будем рассматривать следующие классы K функций периода 2π: B — класс существенно ограниченных функций на $[0, 2\pi]$, C — класс непрерывных функций периода 2π.

В п. 1 данной статьи изучается вопрос об ограничениях на последовательности $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, при которых для любых

$$\{a_n\},\ \{b_n\} \quad \text{с} \quad a_n \geq \alpha_n, \quad b_n \geq \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

не принадлежит классу B или C.

Определение. *Если* $\beta_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *и существует такое число* $\tau \geq 0$, *что* $\{n^{-\tau}\beta_n\}$ *почти не возрастает с коэффициентом* $D > 0$, *т. е.* $n_2^{-\tau}\beta_{n_2} \leq \leq D n_1^{-\tau}\beta_{n_1}$ *при* $n_2 \geq n_1$, *то* $\{\beta_n\} \in A_{\tau, D}$.

Обозначим через $d(n)$ величину $[n/2] + 1$.

Лемма. *Пусть* $\{\beta_n\} \in A_{\tau, D}$. *Тогда*

$$2^{\tau+1} D \sum_{k=d(n)}^{n} \beta_k / k \geq \beta_n$$

и при $d(n) \leq k \leq n$ *справедливо неравенство* $\beta_k \geq \beta_n/(2^{\tau} D)$.

Доказательство. При $n_1 \leq n_2$ $\ n_1^{-\tau}\beta_{n_1} \geq D^{-1} n_2^{-\tau}\beta_{n_2}$. Далее имеем

$$n - [n/2] \geq n - n/2 = n/2, \qquad [n/2] + 1 > n/2.$$

При $d(n) \leq k \leq n$ имеем

$$\beta_k = \beta_k k^{-\tau} k^{\tau} \geq D^{-1} \beta_n u^{-\tau} (n/2)^{\tau} = \beta_n / (2^{\tau} D).$$

Поэтому

$$\sum_{k=d(n)}^{n}(\beta_k/k) \geq 2^{-\tau}D^{-1}\beta_n n^{-1}\sum_{k=d(n)}^{n}1\cdot \geq 2^{-\tau}D^{-1}\beta_n n^{-1}n/2 = 2^{-(\tau+1)}D^{-1}\beta_n.$$

Теорема 1. *Пусть* $\{\beta_n\} \in A_{\tau, D}$. *Для того чтобы при любой* $\{b_n\}$, $b_n \geq \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \notin B$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\beta_n \neq$ $\neq O(1/n)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть любой указанный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \notin B$. Предположим, что $\beta_n = O(1/n)$. Тогда $\beta_n \geq M/n$, $n = 1$, $2, \ldots$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^{\tau+1}D\sum_{k=d(n)}^{\infty}(\beta_k/k))\sin nx. \tag{1}$$

В силу леммы его коэффициенты не меньше чем β_n, $n = 1, 2, \ldots$, и они не возрастают. Имеем

$$\sum_{k=d(n)}^{\infty}\beta_k/k \leq M\sum_{k=d(n)}^{\infty}1/k^2 \leq M_1/n.$$

Тогда ряд (1) принадлежит B [1, с. 294], что противоречит предположению.

Достаточность. Пусть $\beta_n \neq O(1/n)$ и существует $\{b_n\}$, $b_n \geq \beta_n$, $n = 1$, $2, \ldots$, такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \in B$. Так как $b_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то по теореме Пели [2, с. 277] частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ равномерно ограничены, $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx\right| \leq M$ (M не зависит от n и x). Для любого натурального $n \geq 2$

$$\sum_{k=d(n)}^{n} b_k \sin kx \leq 2M.$$

Положим $x = \pi/(2n)$. При $k = d(n), \ldots, n$ будет

$$k\pi/(2n) \leq n\pi/(2n) = \pi/2, \quad k\pi/(2n) > (n/2)\pi/(2n) = \pi/4.$$

Далее,

$$b_k \geq \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad \beta_k \geq \beta_n/(2^{\tau}D), \quad k = d(n), \ldots, n.$$

Имеем

$$2M \geq \sum_{k=d(n)}^{n} b_k \sin(k\pi/(2n)) \geq \sum_{k=d(n)}^{n}\beta_k \sin(k\pi/(2n)) \geq$$

$$\geq D^{-1}2^{-\tau}\beta_n \sin(\pi/4)\sum_{k=d(n)}^{n}1 \geq D^{-1}2^{-\tau}\beta_n \sin(\pi/4)n/2.$$

Получаем $\beta_n = O(1/n)$, что противоречит предположению.

Теорема 2. *Пусть* $\{\beta_n\} \in A_{\tau, D}$. *Для того чтобы при любой* $\{b_n\}$, $b_n \geq \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \notin C$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\beta_n \neq$ $\neq o(1/n)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx \notin C$. Предположим, что $\beta_n = o(1/n)$. Рассмотрим ряд (1). Согласно лемме его коэффициенты не меньше чем β_n, $n = 1, 2, \ldots$, и они не возрастают. В силу $\beta_n = o(1/n)$ справедливы равенства

$$\sum_{k=d(n)}^{\infty} \beta_k / k = o\Big(\sum_{k=d(n)}^{\infty} 1/k^2\Big) = o(1/n).$$

Тогда ряд (1) принадлежит C [1, с. 293], что противоречит предположению.

Достаточность. Пусть $\beta_n \neq o(1/n)$ и существует $\{b_n\}$, $b_n \geq \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \in C.$$

Так как $b_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то по теореме Пели [2, с. 277] $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ сходится равномерно. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при любом натуральном $m > N$, любом натуральном p и любом x выполняется неравенство $\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} b_k \sin kx\right| < \varepsilon$. Выберем натуральное n так, чтобы $[n/2] > N$. Тогда

$$\left|\sum_{k=d(n)}^{n} b_k \sin kx\right| < \varepsilon$$

при любом x. Возьмем $x = \pi/(2n)$. Как при доказательстве теоремы 1, получим

$$\varepsilon > \sum_{k=d(n)}^{n} b_k \sin(k\pi/(2n)) \geq D^{-1} 2^{-\tau} \beta_n \sin(\pi/4)\, n/2.$$

Следовательно, $\beta_n = o(1/n)$, что противоречит предположению.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. *Для того чтобы при любой* $\{a_n\}$, $a_n \geq \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \notin B$ (*или* $\notin C$), *необходимо и достаточно, чтобы* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть любой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \notin C$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \in C$, что противоречит предположению.

Достаточность. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ и существует $\{a_n\}$, $a_n \geq \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \in B$. Тогда $(C, 1)$ — средние $\sigma_n^{(1)}(0)$ частных сумм $s_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ при $x = 0$ ограничены [1, с. 144]. Отсюда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, ибо при $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ имели бы $s_n(0) \to +\infty$ и, значит, $\sigma_n^{(1)}(0) \to +\infty$ [1, с. 127], что не так. Из $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ и $0 \leq \alpha_n \leq a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, следует $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$, что противоречит предположению.

Пусть a_n, b_n — коэффициенты ряда Фурье $S[f]$, $f \in C$, a_n', b_n' — коэффициенты ряда Фурье – Стилтьеса $S[dG]$. Тогда справедлива формула (равенство

Парсеваля):

$$\frac{a_0a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_na_n' + b_nb_n') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\,dG(x),$$

где ряд в левой части суммируем (C, ε) для любого $\varepsilon > 0$ (при $\varepsilon = 1$ [1, с. 255]).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы ряд*

$$\frac{a_0a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_na_n' + b_nb_n') \tag{2}$$

при фиксированном ряде

$$\frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx + b_n'\sin nx) \tag{3}$$

сходился (или имел ограниченные частные суммы) при любой функции $f \in C$ с рядом Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы нормы в L частных сумм ряда (3) были равномерно ограничены.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть частные суммы ряда (2) ограничены при любой $f \in C$. Положим

$$\hat{s}_n = \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k'\cos kx + b_k'\sin kx).$$

Тогда

$$\frac{a_0a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_ka_k' + b_kb_k') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\,\hat{s}_n dx.$$

Следовательно, последовательность $\int_0^{2\pi} f\,\hat{s}_n dx$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена для любой $f \in C$. Тогда $\|\hat{s}_n\|_L$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены [1, с. 267].

Достаточность. Пусть нормы в L частных сумм ряда (3) ограничены, $\|\hat{s}_n\|_L \le M$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда ряд (3) — ряд Фурье – Стилтьеса $S[dG]$ [1, с. 222]. Пусть f — любая функция из C с рядом (4).

Согласно теореме Салема [3] существует выпуклая последовательность $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \to 0$, такая, что ряд

$$\frac{a_0}{2\lambda_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

будет рядом Фурье непрерывной фукции f_1. Пусть $|f_1(x)| \le M_1$ на $[0, 2\pi]$. Рассмотрим ряд

$$\frac{a_0'\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(a_n'\cos nx + b_n'\sin nx).$$

Он будет рядом Фурье функции $g \in L$ [1, с. 284]. Применяя преобразование Абеля при любых m, n, $m > n$, получаем

$$s_m(g) - s_n(g) = \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k (a'_k \cos kx + b'_k \sin kx) = \sum_{k=n+1}^{m-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \hat{s}_k + \lambda_m \hat{s}_m - \lambda_{n+1} \hat{s}_n.$$

Тогда

$$| s_m(g) - s_n(g) | \le \sum_{k=n+1}^{m} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) | \hat{s}_k | + \lambda_m | \hat{s}_m | + \lambda_{n+1} | \hat{s}_n |.$$

Интегрируя на $[0, 2\pi]$, имеем

$$\| s_m(g) - s_n(g) \|_L \le M \left[\sum_{k=n+1}^{m-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) + \lambda_m + \lambda_{n+1} \right] = M \cdot 2\lambda_{n+1} \to 0$$

при $n \to \infty$. При любых $m, n, m > n$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} (a_k a'_k + b_k b'_k) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} ((a_k / \lambda_k) a_k a'_k + (b_k / \lambda_k) \lambda_k b'_k) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1 [s_m(g) - s_n(g)] \, dx \right| \le \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} | f_1 | \, | s_m(g) - s_n(g) | \, dx \le$$

$$\le \frac{M_1}{\pi} \| s_m(g) - s_n(g) \|_L \to 0$$

при $n \to +\infty$. По критерию Коши ряд (2) сходится.

Теорема 5. *Для того чтобы ряд* (2) *при фиксированном ряде* (4) *имел ограниченные частные суммы при любой функции* G *с ограниченным изменением* (*или любой абсолютно непрерывной фукции* G) *с рядом Фурье – Стилтьеса* (3), *необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда* (4) *были равномерно ограничены.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть частные суммы ряда (2) ограничены при любой абсолютно непрерывной фукции G с рядом Фурье – Стилтьеса (3). Положим

$$s_n = a_0 / 2 + \textstyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тогда

$$\frac{a_0 a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k a'_k + b_k b'_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_n \, dG(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_n G'(x) \, dx;$$

$G'(x)$ может быть любой функцией из $L(0, 2\pi)$; $\| s_n \|_{L_\infty}$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены [1, с. 267].

Достаточность. Пусть $\| s_n \|_{L_\infty} \le M$, $n = 1, 2, \ldots$. При любой функции L с ограниченным изменением и рядом Фурье – Стилтьеса (3) будет

$$\left| \frac{a_0 a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k a'_k + b_k b'_k) \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_n \, dG(x) \right| \le \frac{1}{\pi} \| s_n \|_{L_\infty} \overset{2\pi}{\underset{0}{V}} G \le \frac{1}{\pi} M \overset{2\pi}{\underset{0}{V}} G.$$

Следовательно, частные суммы ряда (2) ограничены.

Теорема 6. *Для того чтобы ряд* (2) *при фиксированном ряде* (4) *сходился при любой функции* G *с ограниченным изменением и рядом Фурье – Стилтьеса* (3), *необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда* (4) *были равномер-*

но ограничены и ряд (4) *сходился на* $[0, 2\pi]$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ряд (2) сходится при любой функции G с ограниченным изменением и рядом Фурье – Стилтьеса (3). Тогда частные суммы ряда (2) ограничены. Согласно теореме 5 частные суммы ряда (4) равномерно ограничены. Зафиксируем любое $x_0 \in [0, 2\pi]$. Рассмотрим при $0 \le x_0 < 2\pi$ функцию

$$G(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le x_0, \\ 1, & x_0 < x \le 2\pi, \end{cases}$$

при $x_0 = 2\pi$ функцию

$$G(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < 2\pi, \\ 0, & x = 2\pi. \end{cases}$$

Имеем равенство $\int_0^{2\pi} h(x)\, dG(x) = h(x_0)$ для любой $h \in C$. Тогда

$$\frac{a_0 a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k a_k' + b_k b_k') = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} s_n(x)\, dG(x) = \frac{1}{\pi} s_n(x_0).$$

По предположению ряд (2) сходится при любой G с ограниченным изменением. Поэтому последовательнoть $\{s_n(x_0)\}$ сходится, т. е. ряд (4) сходится в точке x_0.

Достаточность. Пусть частные суммы $s_n(x)$ ряда (4) равномерно ограничены и ряд (4) сходится на $[0, 2\pi]$. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n(x)$. Рассмотрим любую возрастающую (строго) функцию G с рядом Фурье – Стилтьеса (3). Пусть G^{-1} — обратная функция к G с $G^{-1}(y) = \sup\limits_x \{x \in [0, 2\pi],\ G(x) \le y\}$ на $[c, d] = [G(0), G(2\pi)]$. Функция $G^{-1}(y)$ непрерывна на $[c, d]$. Имеем

$$\frac{a_0 a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k a_k' + b_k b_k') = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} s_n\, dG(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_c^{d} s_n(G^{-1}(y))\, dy \to \frac{1}{\pi} \int\limits_c^{d} f(G^{-1}(y))\, dy.$$

Следовательно, ряд (2) сходится. Пусть $G(x)$ — любая функция с ограниченным изменением и рядом Фурье – Стилтьеса (3). Пусть $G(x) = G_1(x) - G_2(x)$, где G_1 и G_2 возрастают (строго). Тогда

$$\frac{a_0 a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k a_k' + b_k b_k') = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} s_n(x)\, dG(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} s_n(x)\, dG_1(x) - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} s_n(x)\, dG_2(x)$$

имеет конечный предел при $n \to \infty$, и ряд (2) сходится.

Замечание. Существуют ряд (4), удовлеворяющий заключению теоремы 5 и не удовлетворяющий заключению теоремы 6 [1, с. 473].

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 616 с.
2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
3. *Salem R.* Sur les transformations des séries de Fourier // Fundam. math. – 1945. – **33**. – P. 108 – 114.

Получено 10.06.91