УДК 517.54

В. Я. Гутлянский, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)
А. О. Зайдан, канд. физ.-мат. наук (Ливия)

О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

The article deals with the development of P. P. Kufarev's method for finding unknown parameters in the Schwarz–Christoffel integral for a conformal mapping of polygonal domains in the case of boundary normalizations.

Присвячена розвитку методу П. П. Куфарєва визначення невідомих параметрів в інтегралі Шварца–Крістоффеля при конформному відображенні полігональних областей у випадку граничних нормувань.

1. Введение. Проблема построения конформных отображений канонических областей на полигональные области остается актуальной до настоящего времени в связи с новыми приложениями теории комплексного потенциала в различных областях естествознания (см., например, [1]). В связи с известным интегральным представлением таких отображений [2, с. 162; 1, с. 65], проблема, по существу, состоит в определении неизвестных параметров, входящих в формулу Шварца–Кристоффеля.

К настоящему времени разработаны различные эффективные методы численного определения этих параметров (см. [1–4] и цитируемую там литературу). Один из таких методов восходит к известной работе П.П. Куфарева [5] (более подробно см. [6, с. 296]), который на основе сочетания принципа симметрии и параметрического метода К. Левнера [7] редуцировал проблему определения неизвестных параметров в формуле Шварца–Кристоффеля к задаче численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Развивая идеи работы [5] и комбинируя их с современными методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Т. Хопкинс и Д. Робертс [8] достигли на этом пути новых глубоких результатов.

В ряде случаев требуется найти конформное отображение круга или полуплоскости на многоугольную область при надлежащих граничных нормировках, например, типа "три точки — в три точки". Отметим, например, что если в качестве таких трех точек в области выбрать вершины многоугольника, то число подлежащих определению параметров уменьшается на три. Далее, если область неограничена, то включение в число таких точек надлежащих вершин многоугольника, расположенных в бесконечности, оказывается целесообразным с вычислительной точки зрения.

Данная работа посвящена дальнейшему развитию метода П. П. Куфарева применительно к случаю конформного отображения верхней полуплоскости на полигональные области при наличии граничных нормировок. В. п. 2 даны постановка задачи и некоторые предварительные результаты. В следующем пункте выводится дифференциальное уравнение Левнера для полуплоскости с разрезом вдоль кривой Жордана при условии, что точки 0, 1 и ∞ остаются неподвижными. Далее проблема определения неизвестных параметров в формуле Шварца–Кристоффеля редуцируется к задаче Коши интегрирования некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. П. 5 посвящен вопросам разрешимости и единственности этой задачи и исследованию качественных свойств решения.

2. Постановка задачи. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ — расширенная комплексная плоскость и H^+ — ее верхняя полуплоскость. Обозначим через D_n внутренность n-угольника с внутренними углами при вершинах A_k, равными $a_k\pi$, $k = 1, \ldots, n$. Для любого многоугольника выполняется простое соотношение между числами a_k:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n-2.$$

Если A_k являются конечными вершинами, то $0 \le \alpha_k \le 2$. Мы не требуем, однако, чтобы D_n была ограниченной. Если вершина A_k находится в бесконечности, то угол между двумя прямыми с вершиной в этой точке определяется как угол в конечной точке их пересечения, взятый со знаком минус. При таком определении угла в бесконечности остается в силе соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n-2.$$

Центральным результатом в теории конформного отображения полигональных областей является следующая теорема [2, с. 162; 1, с. 65].

Теорема 1. *Пусть D_n — односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная многоугольником с вершинами в точках $A_1, \dots, A_n$ и внутренними углами $\pi\alpha_k$, где $0 \le \alpha_k \le 2$, если A_k конечны, и $-2 \le \alpha_k \le 0$, если $A_k = \infty$. Тогда существует конформное отображение верхней полуплоскости H^+ на D_n и любое такое отображение может быть представлено в виде*

$$f(z) = c\int_0^z \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{\alpha_k - 1} dz + c_1. \tag{1}$$

Здесь $a_1, \dots, a_n$ — прообразы вершин $A_1, \dots, A_n$.

Комплексные постоянные $a_1, \dots, a_n, c$ и c_1, входящие в формулу (1), называются *акцессорными параметрами* интеграла Шварца–Кристоффеля. Основная проблема конформного отображения полигональных областей состоит в определении этих акцессорных параметров.

На вещественной оси комплексной плоскости $\mathbb{C}$ зафиксируем три точки $a_{n-2} = 0$, $a_{n-1} = 1$, $a_n = \infty$, и среди множества конформных отображений вида (1) выберем то единственное, которое переводит эти точки соответственно в вершины A_{n-2}, A_{n-1} и A_n, которые, не теряя общности, будем считать конечными.

Далее мы поступим следующим образом. Зафиксируем на части границы области D_n, не содержащей вершин A_{n-2}, A_{n-1}, A_n, точку A^* и проведем из этой точки внутрь области D_n прямолинейный разрез $\Lambda(t)$ переменной длины $|\Lambda(t)|$, зависящей от вещественного параметра t. Пусть $|\Lambda(0)| = 0$. Область с разрезом обозначим через $D_n(t)$. Поскольку $D_n(t)$ — полигональная область, то функцию $f(z, t)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость H^+ на $D_n(t)$ и удовлетворяющую прежним условиям нормировки, можно представить в виде

$$f(z,t) = c(t)\int_0^z (z-\lambda(t)) \prod_{k=-1}^{n-1} (z-a_k(t))^{\sigma_k} dz + A_{n-2}, \tag{2}$$

если $A^* \ne A_k$, $k = 1, \dots, n-3$. Здесь $a_{n-1} \equiv 1$, $a_{n-2} \equiv 0$, $\sigma_k = \alpha_k - 1$, при этом параметры α_{-1} и α_0 связаны соотношением $\alpha_{-1} + \alpha_0 = 1$.

Если $A^* = A_p$, $p = 1, \dots, n-3$, то формула (2) не содержит множитель при

$k = p$, и $\alpha_{-1} + \alpha_0 = \alpha_p$.

Необходимо отметить, что в обоих случаях $\lambda(t)$ обозначает прообраз конца $\Lambda(t)$ разреза при отображении $f(z, t)$.

Пусть при $t = 0$ известно конформное отображение $f(z, 0): H^+ \to D_n(0) = D_n$:

$$f(z, 0) = c_0 \int_0^z \prod_{k=1}^{n-1} (z - a_k)^{\sigma_k} dz + A_{n-2},$$

т. е. известны значения всех параметров, входящих в эту формулу.

Требуется определить конформное отображение $f(z, t)$: $H^+ \to D_n(t)$ при всех допустимых значениях параметра t или, что то же, найти при таких t акцессорные параметры $a_k(t)$, $\lambda(t)$ и $c(t)$.

Отметим, что поскольку начальную область $D_n(0)$ можно выбрать достаточно простой, то на этом пути последовательно, с использованием известной теоремы Каратеодори о сходимости к ядру (см., например, [12, с. 56]) можно получить конформные отображения полуплоскости на произвольные полигональные области.

3. Уравнение Левнера для полуплоскости. В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим однопараметрическое семейство $D(t)$, $0 \le t \le T$, односвязных областей, которые получаются из односвязной области $D = D(T)$ с кусочно-гладкой границей проведением разреза вдоль кривой Жордана $w = w(t)$, $0 \le t \le T$, лежащего в D, кроме одного из своих концов $w(T)$, принадлежащего ∂D. Пусть $D(0)$ — область с полным разрезом, а $D(T)$ — исходная область. Зафиксируем на ∂D три точки A_1, A_2, A_3 и, не теряя общности, будем предполагать, что $w(t)$ не принадлежит дуге, связывающей эти точки.

По теореме Римана существует единственное конформное отображение $w = f(z, t)$ верхней полуплоскости H^+ на $D(t)$, нормированное условиями $f(0, t) = A_1$, $f(1, t) = A_2$, $f(\infty, t) = A_3$.

Теорема 2. *Пусть* $f(z, t): H^+ \to D(t)$, $0 \le t \le T$, *— однопараметрическое семейство конформных отображений, нормированных условиями:* $f(0, t) = A_1$, $f(1, t) = A_2$, $f(\infty, t) = A_3$. *Существует единственная параметризация разреза, при которой* f *дифференцируема по* t *локально равномерно относительно* $z \in H^+$ *и удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial z} \frac{z(z-1)}{\lambda - z}. \tag{3}$$

Здесь $\lambda = \lambda(t)$ *— прообраз подвижного конца разреза при отображении* $f(z, t)$.

Отметим, что в формулировке теоремы можно отказаться от кусочной гладкости границы, если под A_k, $k = 1, 2, 3$, понимать три простых конца в смысле Каратеодори.

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, сформулируем одно из следствий известной леммы Шварца.

Предложение 1. *Пусть* $w(t)$ *— конформное отображение* H^+ *на* H^+ *с разрезом вдоль аналитической кривой, выходящим из точки* λ, $-\infty < \lambda < 0$, *нормированное условиями* $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(\infty) = \infty$. *Тогда* $w(z)$ *голоморфно при* $z = 1$ *и* $w'(1) \le 1$. *В случае знака равенства* $w(z) \equiv z$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная ось и $[\alpha, \beta]$ — отрезок отрицательной части $\mathbb{R}$, который переходит в разрез Γ при отображении $w(z)$. В силу принципа симметрии Римана–Шварца $w(z)$ продолжается в нижнюю полуплоскость через $\mathbb{R}\setminus[\alpha, \beta]$ и представляет конформное отображение $\mathbb{C}\setminus[\alpha, \beta]$ на $\mathbb{C}\setminus[\Gamma\cup\Gamma^*]$. Здесь Γ^* — зеркальное отражение Γ относительно вещественной оси. В частности, $w(z)$ голоморфна в точке $z = 1$ и $\operatorname{Im} w'(1) = 0$. Обозначим через φ конформное отображение круга $|\zeta| < 1$ на плоскость с разрезом вдоль $\mathbb{R}^-$. Очевидно,

$$\varphi(\zeta) = \left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)^2 = 1 + \ldots .$$

Голоморфная функция $h(\zeta) = \varphi^{-1}\circ\omega\circ\varphi$ в круге $|\zeta| < 1$, где $\varphi^{-1}(1) = 0$, удовлетворяет условиям леммы Шварца. Значит, $h'(0) = w'(1) \le 1$. В случае знака равенства $h(\zeta) \equiv \zeta$, т. е. $w(z) \equiv z$.

Доказательство теоремы 2. Введем в рассмотрение функцию $w(z, t) = f^{-1}(f(z, 0), t)$, отображающую конформно H^+ на H^+ с разрезом. При этом, очевидно, $w(z, 0) \equiv z$ и отображение оставляет неподвижными точки $0, 1$ и ∞. Не теряя общности, будем предполагать, что конец разреза, принадлежащий $\mathbb{R}$, расположен левее начала координат. По теореме Каратеодори о сходимости к ядру $w(z, \cdot)$ непрерывна на $[0, T]$ при $z \in H^+$. В силу предложения 1 и теоремы Вейерштрасса о сходимости последовательности голоморфных функций $w'(1, t) = \alpha(t)$ — неотрицательная, непрерывная монотонно убывающая функция параметра t, $0 \le t \le T$.

Действительно, если $0 \le s \le t < T$, то к функции $h(z) = w^{-1}(w(z, t), s)$ применимо предложение 1, согласно которому $h'(1) = w'(1, t)/w'(1, s) < 1$. Поскольку выбор параметризации разреза произволен, то можно положить $\alpha(t) = e^{-t}$.

При выбранной параметризации разреза, при любых $0 \le s \le t < T$ в полуплоскости H^+ рассмотрим функцию $h(z, s, t) = f^{-1}(f(z, s), t)$, конформно отображающую H^+ на H^+ с разрезом и сохраняющую неподвижными точки $0, 1$ и ∞. По формуле Шварца для полуплоскости

$$h(z, s, t) = z + \frac{z(z-1)}{\pi}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\operatorname{Im} h(x,s,t)\,dx}{(x-z)(x-1)\,x}. \tag{4}$$

Отметим, что при обоих предельных переходах $s \to t$ и $t \to s$ отрезок $[\alpha, \beta]$ стягивается в точку $\lambda(t)$ (соответственно $\lambda(s)$) (ср. с [12, с. 91]). Далее, из (4) при $z \to 1$ находим

$$h'(1, s, t) = e^{s-t} = 1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{Im} h(x,s,t)\,dx}{(x-1)^2\,x}. \tag{5}$$

Так как $h(w(z, s), s, t) = w(z, t)$, то из (4) следует

$$w(z, t) - w(z, s) = \frac{w(z,s)(w(z,s)-1)}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{Im} h(x,s,t)\,dx}{(x-w(z,s))(x-1)\,x}. \tag{6}$$

Эту формулу по теореме о среднем можно записать в виде

$$w(z,t)-w(z,s) = \frac{w(z,s)(w(z,s)-1)}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\operatorname{Im} h(x,s,t)\,dx}{(x-1)^2 x}\{\ldots\},$$

где

$$\{\ldots\} = \Re\left\{\frac{x^{**}-1}{x^{**}-w(z,s)}\right\} + i\operatorname{Im}\left\{\frac{x^{*}-1}{x^{*}-w(z,s)}\right\}$$

и x^{**}, x^{*} — некоторые точки из $[\alpha, \beta]$. Далее, из соотношений (5) и (6) следует

$$\lim_{s\to t}\frac{w(z,t)-w(z,s)}{t-s}\,\frac{t-s}{e^{s-t}-1} = \frac{w(z,s)(w(z,s)-1)}{\lambda-w(z,t)}\,(\lambda-1).$$

Аналогичный результат получим, устремив $t\to s$.

Таким образом, при выбранной параметризации разреза функция $w(z,t)$ дифференцируема по t локально равномерно относительно $z\in H^+$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (1-\lambda)\,\frac{w(w-1)}{\lambda-w}.$$

Здесь $\lambda=\lambda(t)$ — прообраз на $\mathbb{R}$ подвижного конца разреза при отображении $f\colon H^+\to D(t)$.

Поскольку $w(z,t)=f^{-1}(f(z,0),t)$, то

$$f(w(z,t),t) = f(z,0).$$

Отсюда и из известной теоремы Витали следует, что $f(z,t)$ дифференцируема по t локально равномерно относительно z в верхней полуплоскости и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{z(z-1)}{\lambda-z}(\lambda-1).$$

Замечая, что $\lambda(t)<0$, и переходя к новому параметру $t\to\int(1-\lambda)\,dt$, приходим к уравнению (3). Такую параметризацию разреза будем называть стандартной.

Отметим здесь, что близкие вопросы, связанные с исследованием полугрупп конформных отображений полуплоскости и круга при наличии граничных условий, рассматривались ранее в работах [9, с. 335; 10].

4. Уравнения для акцессорных параметров. Возвращаясь к первоначально поставленной задаче и предполагая, что прямолинейный разрез в области $D_n(t)$ запараметризован стандартным образом, приходим к заключению, что функция $f(z,t)$, конформно отображающая верхнюю полуплоскость на область $D_n(t)$ и нормированная при всех t, $0\le t\le T$, условиями

$$f(0,t)=A_1,\quad f(1,t)=A_2,\quad f(\infty,t)=A_3,$$

одновременно удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial z} = c(t)(z-\lambda(t))\prod_{k=-1}^{n-1}(\lambda(t)-a_k(t))^{\sigma_k}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{z(z-1)}{\lambda(t)-z}. \tag{8}$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Для всех $0 \le t \le T$ акцессорные параметры удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{da_k(t)}{dt} = -\frac{a_k(t)(a_k(t)-1)}{\lambda(t)-a_k(t)}, \quad k=-1,\dots,n-3, \tag{9}$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \lambda(t)(\lambda(t)-1)\sum_{k=-1}^{n-1}\sigma_k\frac{1}{\lambda(t)-a_k(t)} + 2\lambda(t) - 1, \tag{10}$$

$$\frac{d\ln c(t)}{dt} = -\sum_{k=-1}^{n-1}\sigma_k - 2 \tag{11}$$

и начальным условиям

$$a_k(0) = a_k, \quad k=1,\dots,n-3,$$
$$a_{-1}(0) = a_0(0) = \lambda(0) = \lambda_0 = f^{-1}(A^*,0), \tag{12}$$
$$c(0) = c_0.$$

***Замечание* 1.** Если $A^* = A_p$, $p=1,\dots,n-3$, то равенство (9) при $k=p$ нарушается, а в формулах (10), (11) должно отсутствовать слагаемое при $k=p$.

***Замечание* 2.** Из (9)–(12) следует

$$c(t) = c_0 e^{\alpha_n t}, \tag{13}$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = (1-\lambda(t))\left[\sum_{k=-1}^{n-3}\sigma_k\frac{d\ln(1-a_k(t))}{dt} + \alpha_n\right] + \alpha_{n-1}. \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(z,t) = \ln f'(z,s)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{z(z-1)}{\lambda-z} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-z)^2} - 1. \tag{15}$$

Поскольку

$$\varphi(z,c) = \ln c + \ln(z-\lambda(t)) + \prod_{k=-1}^{n-1}\sigma_k\ln(z-a_k(t)), \tag{16}$$

то ее частные производные относительно параметра t и переменной z имеют вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c'(t)}{c(t)} - \frac{\lambda'(t)}{z-\lambda(t)} - \sum_{k=-1}^{n-1}\sigma_k\frac{a_k'(t)}{z-a_k(t)}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{z-\lambda(t)} + \sum_{k=-1}^{n-1}\sigma_k\frac{1}{z-a_k(t)}. \tag{18}$$

Подставляя (17) и (18) в уравнение (15), получаем соотношение

$$\frac{c'(t)}{c(t)} - \frac{\lambda'(t)}{z-\lambda(t)} - \sum_{k=-1}^{n-1} \sigma_k \frac{a_k'(t)}{z-a_k(t)} = \left(\frac{1}{z-\lambda(t)} + \sum_{k=-1}^{n-1} \sigma_k \frac{1}{z-a_k(t)} \right) \times$$

$$\times \left\{ 1 - z - \lambda(t) + \frac{\lambda(t)(1-\lambda(t))}{z-\lambda(t)} \right\} + \frac{\lambda(t)(1-\lambda(t))}{(z-\lambda(t))^2} - 1, \qquad (19)$$

которое должно выполняться при всех значениях параметра t и всех z из верхней полуплоскости.

Приравнивая вычеты левой и правой частей уравнения (19) в точках $z = a_k(t)$, $\lambda(t)$ и сравнивая свободные члены, получаем систему (9)–(11). Начальные условия (12) очевидны.

Уравнения (9)–(11) вместе с начальными условиями (12) для акцессорных параметров позволяют путем интегрирования найти их значения в любой момент времени t, $0 \le t \le T$, а значит, решить поставленную выше задачу о конформном отображении верхней полуплоскости на данную полигональную область с прямолинейным разрезом при заданных граничных нормировках.

Отметим, что для вычисления длины разреза можно воспользоваться соотношением

$$|\Lambda(t)| = \int_0^t \left| c(t)\lambda(t)(1-\lambda(t)) \prod_{k=-1}^{n-1} (\lambda(t)-a_k(t))^{\sigma_k} \right| dt, \qquad (20)$$

если разрез выходит не из вершины многоугольника, и формулой

$$|\Lambda(t)| = \int_0^t \left| c(t)\lambda(t)(1-\lambda(t)) \prod_{k=-1,\, k\ne p}^{n-1} (\lambda(t)-a_k(t))^{\sigma_k} \right| dt, \qquad (21)$$

если разрез выходит из вершины A_p. Эти соотношения непосредственно вытекают из геометрического смысла параметра $\lambda(t)$ и уравнения Левнера (3).

5. Существование и единственность голоморфного решения. Следуя работе [5], докажем некоторые качественные свойства решений системы (9)–(11) вместе с начальными условиями (12).

Теорема 4. *Система* (9)–(11) *вместе с начальными условиями* (12) *имеет единственное аналитическое относительно* $t^{1/2}$ *решение на некотором интервале* $0 < t \le t_0$.

Доказательство. Выполнив в системе (9), (10) замену переменных по формуле $x = \sqrt{t}$, $0 \le t \le T$, и сохранив за неизвестными функциями прежние обозначения, получим

$$\frac{da_k}{dx} = -2x \frac{a_k(a_k-1)}{\lambda - a_k}, \quad k = -1, \ldots, n-3, \qquad (22)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = 2x\{2\lambda - 1 + \sigma_{n-2}(\lambda-1) + \sigma_{n-1}\lambda\} -$$

$$- \sum_{k=-1}^{n-3} \sigma_k \frac{da_k}{dx} - 2x(\lambda + a_k - 1). \qquad (23)$$

Будем искать решение системы (22), (23) при начальных условиях $\lambda(0) = a_k(0) = \lambda_0$, $k = -1, 0$, и $a_k(0) = a_{k,0}$, $k = 1, \ldots, n-3$, в виде степенных рядов

$$a_k(x) = \lambda_0 + a_{k,1}x + \ldots + a_{k,p}x^p + \ldots, \quad k = -1, 0,$$

$$a_k(x) = a_{k,0} + a_{k,1}x + \ldots + a_{k,p}x^p + \ldots, \quad k = 1, \ldots, n-3, \tag{24}$$

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_p x^p + \ldots .$$

Подставляя ряды (24) в уравнения (22), (23) и сравнивая коэффициенты при x в первой степени, получаем для определения первых коэффициентов этих рядов следующую систему уравнений:

$$a_{k,1} = \frac{-q}{\lambda_1 - a_{k,1}}, \quad k = -1, 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{q\sigma_0}{\lambda_1 - a_{0,1}} + \frac{q\sigma_{-1}}{\lambda_1 - a_{-1,1}},$$

$$a_{k,1} = 0, \ \ k = 1, \ldots, n-3,$$

где $q = 2\lambda_0(\lambda_0 - 1)$. Отсюда следует

$$a_{0,1} = \sqrt{\frac{q\alpha_{-1}}{\alpha_0}}, \quad a_{-1,1} = -\sqrt{\frac{q\alpha_0}{\alpha_{-1}}},$$

$$\lambda_1 = (\alpha_{-1} - \alpha_0)\sqrt{\frac{q}{\alpha_{-1}\alpha_0}}.$$

Продолжая этот процесс, имеем

$$\begin{aligned} a_{-1,1}\lambda_p + (p\,a_{0,1} - a_{-1,1})a_{-1,p} &= \varphi_{-1}, \\ a_{0,1}\lambda_p + (p\,a_{-1,1} - a_{0,1})a_{0,p} &= \varphi_0, \\ \lambda_p + \sum_{k=-1}^{n-3}\alpha_k a_{k,p} &= \varphi^*, \\ a_{k,p} &= \varphi_k, \quad k = 1, \ldots, n-3. \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь φ_k и φ^* зависят только от коэффициентов, предшествующих определяемому.

Исследование знакоопределенности определителя системы (25) сводится к изучению квадратного трехчлена

$$-a_{0,1}a_{-1,1}p^2 + (\alpha_{-1}a_{-1,1}^2 + \alpha_0 a_{0,1}^2)p - a_{0,1}a_{-1,1}(\alpha_{-1} + \alpha_0 - 1)$$

при всех значениях $p > 1$, так как $\lambda_1 - a_{-1,1} = a_{0,1}$ и $\lambda_1 - a_{0,1} = a_{-1,1}$.

Поскольку $a_{0,1}a_{-1,1} = -q$, а

$$\alpha_{-1}a_{-1,1}^2 + \alpha_0 a_{0,1}^2 = q(\alpha_0 + \alpha_{-1}),$$

то квадратный трехчлен приводится к виду

$$Q(p) = q\left(p^2 + (\alpha_0 + \alpha_{-1})\,p + \alpha_0 + \alpha_{-1} - 1\right).$$

Отсюда следует, что $Q(p) > 0$ для всех $p \ge 1$.

Таким образом, коэффициенты степенных рядов (24) определяются однозначно.

Теперь установим, что ряды (24) сходятся и, стало быть, представляют собой в круге сходимости единственное аналитическое решение системы (22), (23). Для этого перейдем в системе (22), (23) к новым переменным по формулам (ср. с [6, с. 325])

$$y_k = \frac{x}{\lambda - a_{k-2}} + B_k, \quad k = 1, 2,$$

$$y_k = \frac{x}{\lambda - a_{k-2}}, \quad k = 3, \ldots, n-1, \tag{26}$$

$$y_n = \lambda - \lambda_0,$$

где $B = -1/(\lambda_1 - a_{k-2,1})$, $k = 1, 2$. Выполнив надлежащие преобразования, получим

$$x\frac{dy_k}{dx} + \sum_{p=1}^{n} u_{k,p} y_p = f_k(x, y_1, \ldots, y_n), \tag{27}$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

Здесь $u_{k,p}$ — известные параметры, а $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$ представляют собой полиномы относительно указанных в скобках переменных, которые не содержат членов нулевого и первого измерений относительно переменных y_k.

Замечая, что $y_k(0) = 0$, представим решение системы (26) в виде

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} c_{k,m} x^m, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем для определения $c_{k,m}$ следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} (u_{1,1} + m)c_{1,m} + u_{1,2}c_{2,m} + \ldots + u_{1,n}c_{n,m} = B_{1,m}, \\ u_{2,1}c_{1,m} + (u_{2,2} + m)c_{2,m} + \ldots + u_{2,n}c_{n,m} = B_{2,m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n,1}c_{1,m} + u_{n,2}c_{2,m} + \ldots + (u_{n,n} + m)c_{n,m} = B_{n,m}, \end{gathered} \tag{29}$$

где $B_{k,m}$ — уже известные параметры.

Покажем теперь, что система (27) имеет голоморфное решение $y_1, \ldots, y_n$, обращающееся в нуль при $x = 0$.

Обозначим через Δ_m^* определитель системы (29). Разложим определитель $\Delta_{k,m}$, получаемый из определителя Δ_m^* заменой k-го столбца на столбец из правых частей системы (29), по элементам k-го столбца. Будем иметь

$$\Delta_{k,m} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,m} \delta_{k,j}^m,$$

где $\delta_{k,j}^m$ — алгебраические дополнения к элементам k-го столбца определителя $\Delta_{k,m}^{*}$. Пусть $c = \max |u_{k,j}|$ по всем $1 < k, j \le n$. Тогда, применяя к определителю $\delta_{k,j}^m$ теорему Адамара, получаем оценку

$$\delta_{k,j}^{m} \leq (c+m)^{n-1}\sqrt{(n-1)^{n-1}}.$$

Кроме того, выполняется неравенство

$$(c+m)^{n-1}|\Delta_m^*|^{-1} < N/m,$$

где N — некоторая постоянная, не зависящая от m.

Полученные оценки приводят к неравенству

$$|u_{k,m}| = |\Delta_{k,m}||\Delta_m^*|^{-1} \leq |\Delta_m^*|^{-1}\sum_{j=1}^{n}|B_{j,m}||\delta_{k,j}^{m}| \leq \beta_m,$$

где

$$\beta_m = m^{-1}D_n\sum_{j=1}^{n}|B_{j,m}| \quad \text{и} \quad D_n = N\sqrt{(n-1)^{n-1}}.$$

Обозначим через $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ функцию, мажорирующую каждую функцию $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Пусть $\tilde{u}_p(x)$, $p = 1, 2, \ldots, n$, — решение системы уравнений

$$x\frac{d\tilde{u}_p}{dx} = nD_nF(x, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$$

с нулевыми начальными условиями. Тогда функции $\tilde{u}_p(x)$ тождественно равны между собой и являются решением уравнения

$$x\frac{du}{dx} = nD_nF^*(x, u), \tag{30}$$

где $F^*(x, u) = F(x, u, \ldots, u)$. Если

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m, \tag{31}$$

то $d = m^{-1}nD_nG_m$, где G_m — полиномы от коэффициентов функций $u(x)$, предшествующих определяемому, и от коэффициентов тех слагаемых в разложении функции $F^*(x, u(x))$, которые содержат x в степени m. Отсюда следует оценка $\beta_m \leq d_m$. Т. е. ряд (31) мажорирует ряд

$$\beta(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m x^m. \tag{32}$$

С другой стороны, ряд (31) мажорируется решением уравнения

$$\tilde{u} = nD_nF^*(x, \tilde{u}), \tag{33}$$

с нулевым начальным условием, так как из теоремы о неявных функциях следует, что уравнение (33) имеет голоморфное решение

$$\tilde{u}(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\tilde{d}_m x^m$$

с коэффициентами $\tilde{d}_m = nD_n\tilde{G}_m$, где $\tilde{G}_m$ — полиномы от $\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_{m-1}$ и тех коэффициентов разложения $F^*(x, \tilde{u})$, которые содержат x в степени m, удовлетворяющими неравенству $d_m \le \tilde{d}_m$.

Таким образом, в области сходимости решения уравнения (33) сходится ряд (31), а вместе с ним и ряды (28), что доказывает существование аналитического решения системы (9)–(11).

Функция $F^*(x, \tilde{u})$ голоморфна в $\mathbb{C}^2$. Пусть R, $0 < R < \infty$, фиксировано и $M = M(R) = \max|F^*(x, \tilde{u})|$, в бикруге $|x| < R$, $|\tilde{u}| < R$. Тогда для коэффициентов $b_{k,p}$ разложения этой функции в ряд Тейлора

$$F^*(x, \tilde{u}) = \sum_{k,p=0}^{\infty} b_{k,p} x^k \tilde{u}^p, \quad b_{0,0} = 0, \quad b_{0,1} = 0, \tag{34}$$

в силу неравенства Коши [11, с. 276] справедливы оценки

$$|b_{k,p}| \le \frac{M}{R^{k+p}}.$$

Если положить $|b_{k,p}| = M/R^{k+p}$, $b_{0,0} = 0$, $b_{0,1} = 0$, то ряд (34) можно просуммировать в бикруге $|x| < R$, $|\tilde{u}| < R$ и получить явный вид мажорантной функции

$$\Phi(x, \tilde{u}) = \frac{MR^2}{(R-x)(R-\tilde{u})} - \frac{M\tilde{u}}{R} - M.$$

Наряду с уравнением (33) рассмотрим уравнение

$$v = nD_n\Phi(x, v). \tag{35}$$

Его аналитическое решение с нулевыми начальными данными мажорирует соответствующее решение уравнения (33), а значит, в силу неравенств $|c_{k,m}| \le \le \beta_m \le d_m \le \tilde{d}_m$, и решение исходной системы (28).

Оценим радиус сходимости рядов системы (28). Для этого достаточно заметить, что степенной ряд, представляющий собой искомое решение уравнения (35), имеет радиус сходимости $R^* = R^2/(R + 2nMD_n)^2$.

1. *Schinzinger R., Laura P.* Conformal mapping: methods and applications. – Amsterdam etc. : Elsevier, 1991. – 581 p.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 688 с.
3. *Gaier D.* Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. – Berlin: Springer, 1964.
4. *Trefethen L.* Numerical computation of the Schwarz–Christoffel transformation // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1980. – **1**, № 1. – P. 82 – 102.
5. *Куфарев П. П.* Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца – Кристоффеля // Докл. АН СССР. – 1947. – **57**, № 6. – С. 535 – 537.
6. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 344 с.
7. *Lowner K.* Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. – 1923. – **89**. – P. 103 – 121.
8. *Hopkins T. R., Roberts D. E.* Kufarev's method for determining the Schwarz–Christoffel parameters // Numer. Math. – 1979. – **33**. – P. 353 – 365.
9. *Lowner Ch.* Charles Loewner, Collected Papers. – Boston; Basel: Birkhauser, 1988. – 518 p.
10. *Горяйнов В. В.* Полугруппы конформных отображений // Мат. сб. – 1986. – **129**, № 4. – С. 451 – 472.
11. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
12. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

Получено 22. 10. 93