УДК 517.53

В. В. Маймескул, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О СКОРОСТИ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ НА СОПРИКАСАЮЩИХСЯ КОНТИНУУМАХ

The upper estimates and, in some special cases, the lower estimates of the rate of rational approximation of piecewise-analytic functions defined on touching continuums are established. The upper and the lower estimates are consistent and depend on the mutual location of these continuums.

Встановлюються оцінки зверху та оцінки знизу швидкості рівномірного раціонального наближення кусково-аналітичних на стичних континуумах функцій, які узгоджуються в деяких спеціальних випадках, залежно від взаємного розміщення цих континуумів.

1. Введение. Пусть K_j, $j = 1, 2$, — ограниченные континуумы со связными дополнениями в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющие единственную общую точку z_0, т. е. $K_1 \cap K_2 = \{z_0\}$. Положим $K = K_1 \cup K_2$ и пусть $f(z) = f_j(z)$, $z \in K_j$, $j = 1, 2$, где каждая из функций $f_j(z)$ аналитична на соответствующем множестве K_j и $f_1(z_0) = f_2(z_0)$. Определенная таким образом функция $f(z)$ является непрерывной на континууме K, аналитической в его внутренних точках и, следовательно, правомерным является вопрос об исследовании скорости ее равномерного рационального приближения.

Обозначим через $R_n(f, K)$ наилучшее равномерное приближение функции $f(z)$ рациональными дробями порядка не выше n

$$R_n(f, K) := \inf_{r_n} \|f - r_n\|_K,$$

где под $\|\cdot\|_K$ понимается равномерная норма, а точная нижняя грань берется по всем рациональным функциям порядка $\le n$. Напомним, что порядком рациональной дроби $r = p/q$ называется максимальная из степеней полиномов p и q.

Через $C, c, C_1, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, каждый раз, вообще говоря, различные, которые либо являются абсолютными, либо зависят от несущественных для рассуждений параметров. При необходимости такую зависимость будем указывать.

Для $A > 0$, $B > 0$ символ $A \preccurlyeq B$ означает порядковое неравенство. В случае $A \preccurlyeq B$ и $B \preccurlyeq A$ одновременно будем использовать обозначение $A \asymp B$.

В вещественном случае хорошо известен классический результат Ньюмена [1] о поведении $R_n(f, [-1, 1])$ для $f(x) = |x|$. Соответствующую теорему можно кратко сформулировать так:

$$c_1\sqrt{n} \le \ln \frac{1}{R_n(f, [-1, 1])} \le c_2\sqrt{n}. \qquad (1)$$

С другой стороны, С. Н. Бернштейном установлено, что наилучшие равномерные полиномиальные приближения этой функции имеют порядок $1/n$. Таким образом, функция $|x|$, $x \in [-1, 1]$, является одним из примеров функций, приближаемых рациональными дробями по порядку существенно лучше, чем полиномами.

Исследованию классов функций, имеющих указанное свойство, посвящен ряд работ известных математиков. В частности, используя результат Ньюмена, Туран и Шуш [2] установили справедливость правой части формулы (1) для кусочно-аналитических функций на $[-1, 1]$. А. А. Гончар [3, 4] предложил метод получения оценок снизу $R_n(f, [-1, 1])$, позволивший установить справедливость левой части (1) для достаточно широкого класса кусочно-аналитических функций.

В комплексном случае отметим результаты И. И. Микаеляна [5], получившего двусторонние оценки $R_n(f, K)$ в случаях, когда K_j, $j = 1, 2$ являются симметричными относительно мнимой оси треугольниками или окружностями, а $f_j(z) = (-1)^j z$. В первом из этих случаев результат аналогичен (1), а второй имеет принципиальное отличие.

Целью настоящей работы является получение оценок сверху и для специального вида множеств и функций оценок снизу скорости убывания наилучших равномерных рациональных приближений для достаточно широкого класса соприкасающихся континуумов и кусочно-аналитических на них функций.

2. Основные обозначения и результаты. В дальнейшем для упрощения рассуждений ограничимся случаем, когда континуумы K_j, $j = 1, 2$, являются замыканиями жордановых областей, а функции $f_j(z)$ — целыми функциями. Пусть также $f(z_0) = z_0 = 0$.

Пусть $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Компактифицируем область Ω простыми концами по Каратеодори. При этом точка 0 является телом двух простых концов, которые мы обозначим через $\mathfrak{Z}_1$ и $\mathfrak{Z}_2$.

Для жордановой дуги L (т. е. разомкнутой кривой) и точек $z_1, z_2 \in L$ через $L(z_1, z_2)$ будем обозначать ее поддугу, лежащую между этими точками. Пусть также $U(z, r)$, $r > 0$, обозначает круг с центром в точке z и радиуса r, а $d(z, M)$ — расстояние от точки z до множества M.

Жорданова дуга L называется регулярной (в смысле Альфорса [6]), если для любых точки $z \in \mathbb{C}$ и $r > 0$

$$\operatorname{mes}(L \cap U(z, r)) \preccurlyeq r.$$

Если L — регулярная дуга, $D = \operatorname{diam} L$, $d = d(z, L)$, хорошо известно, что

$$\int_L \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \preccurlyeq \ln \frac{D + d}{d}. \tag{2}$$

Основной геометрической характеристикой континуума K, используемой в работе, является существование некоторой дуги, разделяющей в $\mathbb{C}$ континуумы K_1 и K_2 и имеющей определенные свойства.

Пусть $\varphi(x) \in \operatorname{Lip} 1$ — произвольная неотрицательная функция, заданная на $[0, +\infty)$, со следующими свойствами:

1) $\varphi(0) = 0$;

2) $0 < \varphi(x) \le x$ при $x > 0$.

Отметим, что при достаточно малом $c > 0$, зависящем только от константы Липшица функции φ,

$$\varphi(x)/2 \le \varphi(t) \le 2\varphi(x) \quad \forall x \in (0, +\infty), \quad \forall t \in [x - c\varphi(x),\ x + c\varphi(x)]. \tag{3}$$

Обозначим через $\varphi^*(x)$ неубывающую миноранту функции φ, т. е.

$$\varphi^*(x) = \inf_{t \ge x} \varphi(t).$$

Пусть также

$$\hat{\varphi}(x) = \left(\int_x^1 \frac{dt}{\varphi(t)} \right)^{-1}, \quad \check{\varphi}(x) = \left(\int_x^1 \frac{t\,dt}{\varphi^2(t)} \right)^{-1}.$$

В полученных ниже результатах континуум K удовлетворяет одному из следующих условий:

i) существуют регулярные дуги L_j, $j = 1, 2$, с естественной параметризацией $\zeta_j(s)$, $s \in [0, \infty)$, $\zeta_j(0) = 0$, соединяющие соответствующий простой конец $\mathfrak{Z}_j$ с ∞ такие, что:

а) жорданова дуга $L = L_1 \cup L_2$ разделяет множества $K_1 \setminus \{0\}$ и $K_2 \setminus \{0\}$ в $\mathbb{C}$, т. е. разбивает $\mathbb{C}$ на две подобласти Ω_1 и Ω_2, для которых $K_j \setminus \{0\} \subset \Omega_j$, $j = 1, 2$;

б) $\forall\, s \in [0, \infty)$ и $j = 1, 2$

$$d(\zeta_j(s), K) \ge \varphi(s); \tag{4}$$

ii) существует жорданова дуга $L \ni \infty$ со свойствами:

с) L разделяет множества $K_1 \setminus \{0\}$ и $K_2 \setminus \{0\}$ в $\mathbb{C}$;

d) $\forall\, z \in L$

$$d(z, K) \ge \varphi(|z|). \tag{5}$$

Пусть ν_f обозначает минимальный из порядков нулей функций f_j, $j = 1, 2$, в точке 0,

$$\varphi_f(x) = \int\limits_x^1 \frac{t^{\nu_f}}{\varphi(t)} \ln \frac{2t}{\varphi(t)}\, dt.$$

Основными результатами работы, устанавливающими оценки сверху величины $R_n(f, K)$, являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть континуум K удовлетворяет условию i). Тогда*

$$R_n(f, K) \precsim \inf_{t \in (0,\, 1)} \left\{ t^{\nu_f} \ln \frac{2t}{\varphi(t)} + \exp(-cn\hat{\varphi}(t)) \ln \frac{2}{\varphi^*(t)} \right\}$$

для любой кусочно-аналитической на K функции f.

В частности, определив t_n из равенства $t_n^{\nu_f} = \exp(-c\, n\hat{\varphi}(t_n))$, получим такие следствия.

***Следствие* 1.** *Если континуум K удовлетворяет условию i), то для любой кусочно-аналитической на K функции f*

$$R_n(f, K) \precsim t_n^{\nu_f} \ln \frac{C}{\varphi^*(t_n)}.$$

***Следствие* 2.** *Если Ω является областью Джона, то*

$$R_n(f, K) \precsim \exp(-c\sqrt{n\nu_f})$$

для любой кусочно-аналитической на K функции f.

***Следствие* 3.** *Существует континуум K такой, что Ω не является областью Джона, однако*

$$R_n(f, K) \precsim \exp(-c\sqrt{n\nu_f})$$

для любой кусочно-аналитической на K функции f.

***Следствие* 4.** *Если область Ω удовлетворяет локальному* Lip $1/\alpha$-*условию, $\alpha > 1$, то*

$$R_n(f, K) \precsim \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\nu_f/(\alpha-1)} \ln n$$

для любой кусочно-аналитической на K функции f.

Определения и свойства областей Джона и локальных $\mathrm{Lip}\,1/\alpha$-областей можно найти соответственно в [7, 8].

Теорема 2. *Пусть континуум K удовлетворяет условию ii). Тогда*

$$R_n(f, K) \preccurlyeq \inf_{t \in (0,\,1)} \left\{ t^{\nu_f} \ln \frac{2t}{\varphi(t)} + \exp\left(-cn\check{\varphi}(t)\right) \varphi_f(t) \right\}$$

для любой кусочно-аналитической на K функции f.

***Замечание* 1.** Приведенные теоремы достаточно установить для случая (что мы и будем предполагать в дальнейшем), когда одна из функций, например, $f_2(z) \equiv 0$, поскольку представляя $f(z)$ в виде $f(z) = f^{(1)}(z) + f^{(2)}(z)$, где

$$f^{(j)}(z) = \begin{cases} f_j(z), & z \in K_j; \\ 0, & z \in K_{3-j}, \end{cases}$$

получаем

$$R_n(f, K) \le \sum_{j=1}^{2} R_{[n/2]}(f^{(j)}, K).$$

***Замечание* 2.** Теоремы 1 и 2 очевидным образом распространяются на конечное число соприкасающихся континуумов (как в одной точке, так и последовательно).

О точности полученных результатов на рассматриваемых классах функций свидетельствуют следующие утверждения.

Пусть $\psi_1(x),\ \psi_2(x) \in \mathrm{Lip}\,1$ — неотрицательные на $[0, 1]$ функции, $\psi_j(0) = 0$, $0 < \psi_j(x) \le x$ при $x \in (0, 1]$, $j = 1, 2$. Положим

$$\psi(x) = (\psi_1(x) + \psi_2(x))/2,$$

$$K_1 = \{z = x + iy\colon\ \psi_1(x) \le y \le 2,\ 0 \le x \le 1\};$$

$$K_2 = \{z = x + iy\colon\ -2 \le y \le -\psi_2(x),\ 0 \le x \le 1\};$$

$$K_\psi = K_1 \cup K_2.$$

Полагая

$$L_1 = \{z = x + iy\colon\ y = 0,\ x \le 0\},$$

$$L_2 = \{z = x + iy\colon\ y = (\psi_1(x) - \psi_2(x))/2,\ x \ge 0\},$$

нетрудно убедиться, что континуум K_ψ удовлетворяет условию i) с функцией $\varphi(x) \succcurlyeq \psi(x)$.

Рассмотрим на K_ψ функцию

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in K_1; \\ 0, & z \in K_2, \end{cases}$$

где $f_1(z) = z^k + \ldots$ — целая функция. Очевидно, $\nu_f = k$, $|f_1(z)| \asymp |z|^k$ при достаточно малых $|z|$.

Теорема 3. *В принятых обозначениях*

$$R_n(f, K_\psi) \succcurlyeq \sup_{t \in (0,\,1)} \left\{ \frac{t^k}{\exp\left(Cn\hat{\psi}(t)\right)+1} \right\}.$$

***Следствие* 5.** *Поскольку* $\psi(x) \preccurlyeq x$, *то*

$$R_n(f, K_\psi) \succcurlyeq \exp(-C_1\sqrt{nk}).$$

***Следствие* 6.** *Если* $\psi(x) \preccurlyeq x^\alpha$, $\alpha > 1$, *то*

$$R_n(f, K_\psi) \succcurlyeq \left(\frac{1}{n}\right)^{k/(\alpha-1)}.$$

Отметим, что при выполнении в условиях следствий 5 и 6 обратных неравенств для функции ψ величина $R_n(f, K_\psi)$ по теореме 1 допускает оценки сверху, аналогичные следствиям 2 и 4. Таким образом, можно говорить о точности полученных результатов (во втором случае — с точностью до логарифма).

3. Доказательство теоремы 1. Соединим точки $z_j = \zeta_j(2)$, $j = 1, 2$, в области $\Omega_1 \setminus K_1$ спрямляемой жордановой дугой γ. Тогда область G, ограниченная кривой $\Gamma = L(z_1, z_2) \cup \gamma$, содержит множество $K_1 \setminus \{0\}$, $\overline{G} \cap (K_2 \setminus \{0\}) = \varnothing$ и по формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad z \in K\setminus\{0\}.$$

Функция

$$g_4(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

является аналитической на K и, как следствие известной теоремы Бернштейна – Уолша (см., например, [9]), имеем

$$R_{[n/3]}(g_4, K) \preccurlyeq \exp(-c_1 n). \tag{6}$$

Интеграл по дуге $L(z_1, z_2)$ разобьем на три части следующим образом. Пусть $t \in (0, 1)$ — произвольное фиксированное. Положим

$$z_{j,t} = \zeta_j(t), \quad l_j = L_j(z_{j,t}, z_j), \quad j = 1, 2, \quad l_3 = L(z_{1,t}, z_{2,t}),$$

$$g_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_k} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Для построения рациональной функции, приближающей $g_1(z)$, воспользуемся тождеством (см., например, [9, с. 338])

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(\xi-\zeta)^r}{(\xi - z)^{r+1}} + \frac{(\xi-\zeta)^m}{(\xi-z)^m(\zeta - z)}, \tag{7}$$

справедливым $\forall\, \xi \in \mathbb{C}$ и произвольного натурального m. А именно, разобьем отрезок $[t, 2]$ точками

$$s^{(1)} = t, \quad s^{(p)} = s^{(p-1)} + c_2\varphi(s^{(p-1)}), \quad p = 2, \ldots, N(t),$$

где $N(t)$ — последнее число, для которого $s^{(p)} < 2$, постоянная $c_2 = \min[1/2, c]$, а c выбрано так, чтобы выполнялось соотношение (3). Обозначим также

$s^{(N(t)+1)} = 2$, $z^{(p)} = \zeta_1(s^{(p)})$. Тогда при $\zeta \in l_1(z^{(p)}, z^{(p+1)})$ в силу (4)

$$|z^{(p)} - \zeta| \le \operatorname{mes} l_1(z^{(p)}, z^{(p+1)}) \le \frac{1}{2}\varphi(s^{(p)}) \le \frac{1}{2} d(z^{(p)}, K).$$

С другой стороны, при всех $z \in K$, очевидно, $|z^{(p)} - z| \ge d(z^{(p)}, K)$. Следовательно, полагая при $\zeta \in l_1(z^{(p)}, z^{(p+1)})$, $p = 1, \ldots, N(t)$

$$R_{1,m}(\zeta, z) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(z^{(p)} - \zeta)^r}{(z^{(p)} - z)^{r+1}}$$

и принимая во внимание (7), для $\zeta \in l_1$, $z \in K$, получаем

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - R_{1,m}(\zeta, z) \right| \le \frac{2^{-m}}{|\zeta - z|}. \tag{8}$$

Определяя далее

$$r_{1,m}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} f_1(\zeta) R_{1,m}(\zeta, z)\, d\zeta,$$

с учетом (8) при $z \in K$ имеем

$$|g_1(z) - r_{1,m}(z)| \precsim \int_{l_1} |f_1(\zeta)| \left| \frac{1}{\zeta - z} - R_{1,m}(\zeta, z) \right| |d\zeta| \precsim 2^{-m} \int_{l_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}.$$

Последний интеграл легко оценивается с использованием (2):

$$\int_{l_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \precsim \ln \frac{C}{\varphi^*(t)}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\|g_1 - r_{1,m}\|_K \precsim 2^{-m} \ln \frac{C'}{\varphi^*(t)}. \tag{9}$$

Осталось оценить $N(t)$. В силу выбора константы c_2 и справедливости, следовательно, соотношения (3), заключаем, что

$$N(t) = \sum_{1}^{N(t)} \frac{\varphi(s^{(p)})}{\varphi(s^{(p)})} \precsim \sum_{p=1}^{N(t)} \min_{x \in [s^{(p)},\, s^{(p+1)}]} \frac{1}{\varphi(x)} (s^{(p+1)} - s^{(p)}) \precsim \int_t^1 \frac{dx}{\varphi(x)} = \frac{1}{\hat{\varphi}(t)}. \tag{10}$$

Таким образом,

$$\deg r_{1,m} \precsim \frac{m}{\hat{\varphi}(t)}.$$

Следовательно, полагая при достаточно малом c_3 $m = [c_3 n \hat{\varphi}(t)]$, получаем $\deg r_{1,m} \le [n/3]$, и из (9) вытекает неравенство

$$R_{[n/3]}(g_1, K) \precsim \exp(-c_4 n \hat{\varphi}(t)) \ln \frac{C_1}{\varphi^*(t)}. \tag{11}$$

Аналогично строится рациональная функция $r_{2,m}(z)$, приближающая $g_2(z)$.

Оценим теперь $\|g_3\|_K$. Пусть $z \in K \setminus \{0\}$ — произвольная точка. Согласно (4)

$$\min_{j=1,\,2} |z - z_{j,t}| \geq \varphi(t), \quad \operatorname{mes} l_3 = 2t, \quad |z_{1,t} - z_{2,t}| \geq 2\varphi(t). \tag{12}$$

Если $d(z, l_3) \geq \varphi(t)/2$, то, воспользовавшись (2), получим

$$|g_3(z)| \preccurlyeq t^{\nu_f} \ln\left(1 + \frac{2t}{d(z,\ l_3)}\right) \preccurlyeq t^{\nu_f} \ln\left(\frac{5t}{\varphi(t)}\right). \tag{13}$$

В противном случае, построим окружность σ, для которой точки $z_{j,t}$, $j = 1, 2$ являются диаметрально противоположными. Согласно (12) радиус $\sigma \geq \varphi(t)$. Если σ_1 и σ_2 — полуокружности с концами в этих точках, то благодаря первому соотношению в (12), при каком-либо j $d(z, \sigma_j) \geq \varphi(t)/2$. Заметим, что

$$g_3(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_j} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \pm \begin{cases} \text{либо } 0; \\ \text{либо } f_1(z). \end{cases}$$

Для интеграла по σ_j в силу (2) имеем оценку, аналогичную (13). Таким образом,

$$\| g_3 \|_K \preccurlyeq t^{\nu_f} \ln \frac{C_2 t}{\varphi(t)}.$$

Учитывая это неравенство, (6) и (11) и переходя к точной нижней грани по t, получаем требуемое.

В условиях следствий 2 и 4 имеем соответственно оценки $\hat\varphi(x) \succcurlyeq (\ln(1/x))^{-1}$ и $\hat\varphi(x) \succcurlyeq x^{\alpha-1}$. Поэтому для их доказательства достаточно применить теорему 1, вычислив стоящее под inf выражение при $t_n = \exp\left(-\sqrt{n/\nu_f}\right)$ и $t_n = C(\alpha, \nu_f)(\ln n/n)^{1/(\alpha-1)}$ соответственно.

В порядке доказательства следствия 3 возьмем функцию

$$f(x) = \begin{cases} (1 + 2x_n + 2x_{n+1})x - x_{n+1}(1 + x_n)^2, & x_{n+1} < x \leq d_n, \\ x_{n+1} + x_n - x, & d_n < x \leq x_n, \\ 1/4, & x > x_0 = 1/2, \end{cases}$$

где $\log_2 x_n = -2^n$, $d_n = (x_n + x_{n+1})/2$, $n = 0, 1, \ldots$. Положим

$$K = \{z = x + iy : |y| \geq f(|x|)\} \cap \{|z| \leq 1\},$$

K_1 и K_2 — части K, лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. В этом случае, очевидно, Ω не является областью Джона. Элементарными рассуждениями, взяв в качестве дуги L вещественную ось, убеждаемся, что K удовлетворяет условию i) с $\varphi(x) \succcurlyeq f(x)$.

Пусть $t > 0$ — достаточно мало. Выбирая N так, что $x_{N+1} < t \leq x_N$ и повторяя выкладки [10], получаем

$$\int\limits_t^1 \frac{dx}{f(x)} \preccurlyeq \ln \frac{1}{x_{N+2}} = 4 \ln \frac{1}{x_N} \preccurlyeq \ln \frac{1}{t}.$$

Выбирая далее t_n как и в доказательстве следствия 2, получаем требуемую оценку.

4. Доказательство теоремы 2. В отличие от доказательства теоремы 1 мы не можем воспользоваться формулой Коши для интегрального представления функции $f(z)$, поскольку L может быть локально неспрямляемой. Для применения же представления Коши – Грина необходимо предварительно провести сглаживание исходной функции.

Продолжим функцию f на множество $\mathbb{C} \setminus L$, полагая $f(z) = f_j(z)$ при $z \in \Omega_j$, $j = 1, 2$. Определим усредняющее ядро $\mathcal{K}(\xi)$, исходя из равенства

$$\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{K}(|\xi|) = \begin{cases} c \exp\left\{\dfrac{1}{|\xi|^2 - 1}\right\}, & \text{при } |\xi| < 1; \\ 0, & \text{при } |\xi| \geq 1, \end{cases}$$

где константа c выбрана таким образом, что

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{K}(\xi)\, d\sigma_\xi = 1. \tag{14}$$

Пусть $\delta(z)$ — регуляризованное расстояние от точки z до континуума K [11, с. 203], т. е. бесконечно дифференцируемая в Ω функция со свойствами

1) $\delta(z) \asymp d(z, K)$;

2) $|\delta_x(z)| + |\delta_y(z)| \preccurlyeq 1$.

Обозначим

$$\tilde{K} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ d(z, K) \leq 1/4\, \varphi(|z|)\}.$$

Если $z \in \tilde{K}$, то, выбирая $c_1 = \min(1/2, c)$, где c взято из условия (3), для всех $\zeta \in U(z, c_1 d(z, K))$ получаем

$$d(\zeta, K) \leq \frac{3}{2} d(z, K) \leq \frac{3}{8} \varphi(|z|) \leq \frac{3}{4} \varphi(|\zeta|).$$

Другими словами, в силу (5) $L \cap U(z,\ c_1 d(z,\ K)) = \varnothing$. Положим теперь $d_z = c_2 \delta(z)$, где c_2 таково, что $d_z \leq c_1 d(z, K)$. Последнее возможно в силу свойства 1 функции $\delta(z)$. Тогда при $z \in \tilde{K}$

$$L \cap U(z, d_z) = \varnothing. \tag{15}$$

Пусть

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \iint_{\mathbb{C}} f(z + d_z \xi) \mathcal{K}(\xi) d\sigma_\xi, & z \in \Omega; \\ f(z), & z \in K. \end{cases} \tag{16}$$

Отметим следующие свойства полученной функции:

1. $\tilde{f}(z)$ бесконечно дифференцируема в Ω.

Действительно, равенство (16) простой заменой переменной сводится к виду

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{d_z^2} \iint\limits_{\mathbb{C}} f(\xi)\, \mathcal{K}\left(\frac{z - \xi}{d_z}\right) d\sigma_\xi \tag{17}$$

и требуемое следует непосредственно из бесконечной дифференцируемости функций d_z (в Ω) и $\mathcal{K}(\xi)$.

2. $\tilde{f}(z) = f(z)$ при $z \in \tilde{K}$.

При $z \in \tilde{K} \setminus K$ это утверждение вытекает из кругового свойства аналитических функций, (15) и равенства (14). Если же $z \in K$, то $\tilde{f}(z) = f(z)$ по определению. Следовательно, $\tilde{f}(z)$ является бесконечно дифференцируемой в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функцией, совпадающей с $f(z)$ в $\tilde{K}$.

3. $|\tilde{f}(z) - f(z)| \preccurlyeq |z|^{\nu_f}$ при $z \in U(0, R)$, $R = \max(2 \operatorname{diam} K, 2)$.

4. Для формальной производной $\tilde{f}_{\bar{z}}$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \tilde{K}$ справедлива оценка

$$|\tilde{f}_{\bar{z}}(z)| \preccurlyeq \frac{|z|^{\nu_f}}{d_z} \preccurlyeq \frac{|z|^{\nu_f}}{\varphi(|z|)}. \tag{18}$$

Указанное неравенство легко следует из представления (17) и свойств функций $\mathcal{K}(\xi)$ и $\delta(z)$.

Пусть $t \in (0, 1)$ — произвольное фиксированное, $\gamma = \partial U(0, t)$, $D = U(0, R) \setminus U(0, t)$ и

$$f^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(0,\ R)} \frac{\tilde{f}(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\tilde{f}(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \iint\limits_{D} \frac{\tilde{f}_{\bar{\zeta}}(\zeta) d\sigma_\zeta}{\zeta - z} = g_1(z) + g_2(z) + g_3(z).$$

Очевидно,

$$f^*(z) = \begin{cases} \tilde{f}(z), & |z| \in (t,\ R); \\ 0, & |z| < t. \end{cases}$$

Следовательно, учитывая свойство 3 функции $\tilde{f}$, получаем

$$\| f^* - \tilde{f} \|_{K \setminus \gamma} \preccurlyeq t^{\nu_f}. \tag{19}$$

Функция $g_1(z)$ является аналитической на K и аналогично (6) имеем

$$R_{[n/2]}(g_1, K) \preccurlyeq \exp(-c_1 n). \tag{20}$$

Для оценки $R_n(g_3, K)$ снова воспользуемся представлением (7). Для этого разобьем кольцо D следующим образом. Выберем $c > 0$ так, чтобы выполнялось соотношение (3) и положим $c_3 = \min\{c, 1/64\}$. Пусть далее

$$r^{(1)} = t, \quad r^{(p)} = r^{(p-1)} + c_3 \varphi(r^{(p-1)}), \quad p = 2, \dots, N(t),$$

и при каждом $p = 1, \dots, N(t)$

$$z^{(p,j)} = r^{(p)} \exp\left(2ij \arcsin \frac{\varphi(r^{(p)})}{64 r^{(p)}}\right), \quad j = 0, \dots, M(p, t).$$

Через $N(t)$ и $M(p, t)$ мы обозначили соответственно последние значения p и j, для которых $r^{(p)} < R$ и $\arg z^{(p,j)} < 2\pi$ (имеется в виду непрерывная ветвь аргумента). Пусть также $r^{(N(t)+1)} = R$, $z^{(p, M(p,t)+1)} = z^{(p,0)}$. Очевидно,

$$M(p, t) \asymp \frac{r^{(p)}}{\varphi(r^{(p)})}.$$

Положим теперь

$$D_{p,j} = \{z : r^{(p)} \le |z| \le r^{(p+1)},\ \arg z^{(p,j)} \le \arg z \le \arg z^{(p,j+1)}\},$$

$$p = 1, 2, \ldots, N(t), \quad j = 0, \ldots, M(p,t).$$

Тогда

$$g_3(z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{N(t)} \sum_{j=0}^{M(p,t)} \iint_{D_{p,j}} \frac{\tilde{f}_{\bar\zeta}(\zeta) d\sigma_\zeta}{\zeta - z}.$$

Отметим, что интегрирование в плоском интеграле производится фактически по множеству $D^* = D \setminus \tilde{K}$ и поэтому суммирование производится только по тем индексам p и j, для которых $D_{p,j} \cap D^* \ne \varnothing$. В этом случае в силу выбора c_3, если $\zeta_0 \in D_{p,j} \cap D^*$ — произвольная точка, имеем

$$d(z^{(p,j)}, K) \ge \frac{1}{4}\varphi(|\zeta_0|) - |z^{(p,j)} - \zeta_0| \ge$$

$$\ge \frac{1}{8}\varphi(r^{(p)}) - \frac{3}{64}\varphi(r^{(p)}) \ge \frac{5}{64}\varphi(r^{(p)}). \tag{21}$$

С другой стороны, при $\zeta \in D_{p,j}$

$$|z^{(p,j)} - \zeta| \le \frac{1}{32}\varphi(r^{(p)}) + \frac{1}{64}\varphi(r^{(p)}) = \frac{3}{64}\varphi(r^{(p)}). \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует, что при $\zeta \in D_{p,j}$, $z \in K$,

$$\frac{|\zeta - z^{(p,j)}|}{|z - z^{(p,j)}|} \le \frac{3}{5}.$$

Следовательно, полагая при $\zeta \in D_{p,j}$, $z \in K$

$$R_{m,p,j}(\zeta, z) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(z^{(p,j)} - \zeta)^r}{(z^{(p,j)} - z)^{r+1}},$$

получаем

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - R_{m,p,j}(\zeta, z) \right| \le \left(\frac{3}{5}\right)^m \frac{1}{|\zeta - z|}. \tag{23}$$

Определяя далее

$$r_{m,p,j}(z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{N(t)} \sum_{j=0}^{M(p,t)} \iint_{D_{p,j}} \tilde{f}_{\bar\zeta}(\zeta) R_{m,p,j}(\zeta, z)\, d\sigma_\zeta,$$

с учетом (23) и оценки (18) на формальную производную, при $z \in K$ имеем

$$|g_3(z) - r_{m,p,j}(z)| \preccurlyeq \left(\frac{3}{5}\right)^m \sum_{p=1}^{N(t)} \sum_{j=0}^{M(p,t)} \iint_{D_{p,j} \cap D^*} \frac{|\zeta|^{\nu_f}}{\varphi(|\zeta|)} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|} \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \left(\frac{3}{5}\right)^m \iint_{D^*} \frac{|\zeta|^{\nu_f}}{\varphi(|\zeta|)} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|} \preccurlyeq \left(\frac{3}{5}\right)^m \int_t^R \frac{x^{\nu_f}}{\varphi(x)}\, dx \int_{\partial U(0,x) \cap D^*} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \left(\frac{3}{5}\right)^m \int_t^R \frac{x^{\nu_f}}{\varphi(x)} \ln \frac{Cx}{\varphi(x)}\, dx \preccurlyeq \left(\frac{3}{5}\right)^m \varphi_f(t).$$

Степень $r_{m,p,j}$ оценивается аналогично (10):

$$\deg r_{m,p,j} \precsim \frac{m}{\check{\varphi}(t)}.$$

Выбирая теперь c_4 достаточно малым и полагая $m = [c_4 n \check{\varphi}(t)]$, окончательно имеем

$$R_{[n/2]}(g_3, K) \precsim \exp(-c_5 n \check{\varphi}(t))\, \varphi_f(t). \tag{24}$$

Оценим $\| g_2 \|_{K \setminus \gamma}$. Пусть $\tilde{K}_j = \tilde{K} \cap \Omega_j$, $\gamma_j = \gamma \setminus \tilde{K}_{3-j}$, $j = 1, 2$. Тогда по свойству 2 функции $\tilde{f}(z)$ интеграл в определении $g_2(z)$ берется фактически по множеству γ_1. Заметим, что

$$d(\gamma_j, K_{3-j}) \geq \frac{1}{4}\varphi(t), \qquad j = 1, 2. \tag{25}$$

Пусть $z \in K_2$, $\gamma' = \gamma \setminus U(z, 1/8\varphi(t))$. Тогда согласно (25) $\gamma' \supset \gamma_1$ и, применяя (2) к γ', получаем

$$|g_2(z)| \precsim \int_{\gamma_1} \frac{|\tilde{f}(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \precsim \int_{\gamma'} \frac{|\tilde{f}(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \precsim t^{\nu_f} \ln \frac{Ct}{\varphi(t)}. \tag{26}$$

Пусть теперь $z \in K_1 \setminus \gamma$. Положим

$$\tilde{g}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f_1(z), & |z| < t; \\ 0, & |z| > t \end{cases}$$

и пусть

$$\tilde{g}_2(z) = g_2(z) + \tilde{g}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1(\zeta) - \tilde{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

В этом случае интегрирование производится только по γ_2. Поэтому аналогично (26) заключаем, что

$$|g_2(z)| \leq |\tilde{g}_2(z)| + |\tilde{g}(z)| \precsim t^{\nu_f} \ln \frac{Ct}{\varphi(t)}.$$

Таким образом,

$$\| g_2 \|_{K \setminus \gamma} \precsim t^{\nu_f} \ln \frac{Ct}{\varphi(t)}. \tag{27}$$

Принимая во внимание свойство 2 функции $\tilde{f}(z)$, (19), (20), (24) и (27), и переходя к нижней грани по t, получаем утверждение теоремы.

5. Доказательство теоремы 3. Будем следовать схеме получения оценок снизу $R_n(f, K)$, предложенной в вещественном случае в [3].

Для произвольного $t \in (0, 1)$ обозначим $D_t = \{z = x + iy : |x| < t, |y| < t\}$, $K_{j,t} = K_j \setminus D_t$, $j = 1, 2$, $K_t = K_{1,t} \cup K_{2,t}$. Очевидно, $K_{j,t}$ — континуумы, неразбивающие плоскость, и $\mathbb{C} \setminus K_t$ — двусвязная область.

Пусть функция $r_n(z)$ такова, что

$$\| f - r_n \|_{K_\psi} = R_n(f, K_\psi) =: R_n.$$

Тогда

$$|r_n(z)| \le R_n, \quad z \in K_{2,t}, \tag{28}$$

$$|r_n(z)| \ge c\,|z|^k - R_n, \quad z \in K_{1,t}. \tag{29}$$

В [12] установлено, что справедливость (28) влечет, с одной стороны, выполнение неравенства $\min\limits_{z\in K_{1,t}} |r_n(z)| \le \rho^n$, где $\rho = \rho(t)$ — риманов модуль области $\mathbb{C}\setminus K_t$, а с другой — из (29) вытекает $\min\limits_{z\in K_{1,t}} |r_n(z)| \ge ct^k - R_n$. Следовательно,

$$R_n \succcurlyeq t^k(\rho^n+1)^{-1}. \tag{30}$$

Пусть m обозначает модуль семейства кривых, соединяющих в $\mathbb{C}$ континуумы $K_{1,t}$ и $K_{2,t}$. Обозначая через m^* модуль семейства кривых, соединяющих по множеству $\{z = x+iy:\ -\psi_2(x) \le y \le \psi_1(x),\ t \le x \le 1\}$ графики функций ψ_1 и $-\psi_2$, в силу монотонности модуля и известной оценки (см., например, [13, с. 56]) имеем

$$m \ge m^* \ge \int\limits_t^1 \frac{dx}{2\psi(x)} = \frac{1}{2\hat{\psi}(t)}.$$

Учитывая теперь связь ρ и m, из (30) заключаем, что

$$R_n \succcurlyeq t^k[\exp(4\pi n\hat{\psi}(t))+1]^{-1}.$$

Переход к верхней грани по t завершает доказательство.

1. *Newman D. J.* Rational approximation to $|x|$ // Mich. Math. J. – 1964. – **11**, № 1. – P. 11 – 14.
2. *Туран P.* О приближении кусочно-аналитических функций рациональными функциями // Совр. пробл. теории аналит. функций. – М.: Наука, 1966. – С. 296 – 300.
3. *Гончар А. А.* Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения // Мат. сб. – 1967. – **72**, № 3. – С. 489 – 503.
4. *Гончар А. А.* Скорость рациональной аппроксимации и свойство однозначности аналитической функции в окрестности изолированной особой точки // Там же. – 1974. – **94**, № 2. – С. 265 – 283.
5. *Микаелян И. И.* О наилучших приближениях рациональными функциями в соприкасающихся областях // Докл. АН АрмССР. – 1973. – **57**, № 3. – С. 134 –139.
6. *David G.* Operateurs integraux singuliers sur certain courbes du plan complexe // Ann. Sci. Ecole norm. super. – 1984. – **17**. – P. 157 – 189.
7. *Martio O., Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. – 1978–1979. – **4**. – P. 383 – 401.
8. *Johnston E.* Growth of derivatives and the modulus of continuity of analytic functions // Rocky Mountain J. Math. – 1979. – **9**, № 4. – P. 671 – 682.
9. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.– М.: Наука, 1977. – 512 с.
10. *Маймескул В. В.* Оценки роста сопряженных гармонических полиномов в областях комплексной плоскости // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 6. – С.– 772 – 777.
11. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.– М.: Мир, 1973. – 342 с.
12. *Гончар А. А.* Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций // Тр. междунар. конгресса математиков. – М.: Мир, 1968. – С. 329 – 356.
13. *Ahlfors L.* Conformal invariants. Topics in geometric function theory. – New York: McGraw-Hill, 1973. – 157 p.

Получено 26.04.93