УДК 517.956; 519.21

С. Я. Махно, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

G-СХОДИМОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

The relation between the G-convergence of parabolic operators and the weak convergence of solutions to the diffusion equation is established. The constructive conditions for determining the coefficients of the G-limiting operator are obtained.

Встановлено зв'язок між G-збіжністю параболічних операторів і слабкою збіжністю розв'язків дифузійних рівнянь. Одержано конструктивні умови для визначення коефіцієнтів G-граничного оператора.

В настоящей работе рассматривается G-сходимость параболических операторов. Этот вопрос изучался как для дивергентных, так и для недивергентных эллиптических и параболических операторов [1–4]. Для параболических операторов второго порядка в [4] доказана теорема о компактности (эллиптический аналог имеется в [2, 3]). Здесь рассматриваются параболические операторы второго порядка недивергентного вида. При некотором сужении класса возможных G-предельных операторов устанавливается связь между их G-сходимостью и слабой сходимостью решений соответствующих диффузионных уравнений.

Результаты о предельном поведении этих решений [5] позволяют создать конструктивные методы построения G-предельного оператора.

Введем некоторые обозначения и понятия. Обозначим через E_d d-мерное евклидово пространство, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение его элементов, ∇ — символ градиента. Для функциональных пространств используются обычные обозначения [6, 7]: L_p, $L_{p,\mathrm{loc}}$, $W_p^{1,2}$, $W_{p,\mathrm{loc}}^{1,2}$, $C_0^\infty(A)$ и т. п. Нормы в L_p, $W_p^{1,2}$ обозначим через $\|\cdot\|_p$, $|||\cdot|||_p$. Символ loc обозначает их локализацию. При доказательстве результатов работы через c обозначим не зависящие от ε постоянные.

Пусть $\Theta(\lambda, K)$ — множество, элементами которого являются двойки (a, b), состоящие из симметрической $d\times d$-матричной функции $a(t,x)$ и d-мерной векторной функции $b(t,x)$, для которых:

1) $|a_{ij}(t,x)| + |b_i(t,x)| \le K$, $a_{ij}(t,x)$ — непрерывные функции (при $d=1$ лишь измеримые), $b_i(t,x)$ — измеримые функции, $i, j = \overline{1, d}$, $t\in[0,T]$, $T<\infty$, $x\in E_d$;

2) $\forall z\in E_d$ $(a(t,x)z, z) \ge \lambda |z|^2$.

Обозначим через $\mathfrak{L}(\lambda, K)$ семейство операторов вида

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}(a(t,x)\nabla, \nabla) + (b(t,x), \nabla),$$

где $(a,b)\in\Theta(\lambda,K)$.

Для функции $f(t,x)\in L_{d+1}([0,T]\times E_d)$ и операторов $L^\varepsilon\in\mathfrak{L}(\lambda,K)$ рассмотрим задачи Коши

$$\begin{aligned} L^\varepsilon u^\varepsilon(t,x) &= f(t,x), \\ u^\varepsilon(T,x) &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Известно [6, 8], что при каждом $\varepsilon > 0$ задача (1) имеет единственное решение в классе $W^{1,2}_{d+1}([0,T] \times E_d)$.

При исследовании G-сходимости утверждается, что из последовательности $u^\varepsilon(t, x)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на компактах к некоторой функции $u(t,x)$, и построить параболической оператор L такой, чтобы

$$L\,u(t,x) = f(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in E_d, \quad u(T,x) = 0. \tag{2}$$

В работе будет рассматриваться только случай, когда оператор $L \in \mathfrak{L}(\lambda, K)$.

Определение. *Пусть* L^ε, $L \in \mathfrak{L}(\lambda, K)$. *Будем говорить, что* L^ε G*-сходится к оператору* L $(L^\varepsilon \xrightarrow{G} L)$, *если для решений задач* (1), (2) *и любого компакта* $D \subset E_d$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{t \in [0,\,T] \\ x \in D}} |\, u^\varepsilon(t,x) - u(t,x) \,| = 0.$$

По коэффициентам операторов L^ε построим стохастические уравнения. Пусть $\xi^\varepsilon(t)$ — решения стохастических уравнений

$$\xi^\varepsilon(t) = x + \int_0^t b^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s))\,ds + \int_0^t \sigma^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s))\,dw(s). \tag{3}$$

Здесь $\sigma^\varepsilon(t,x)$ — $d \times d$-матричная функция такая, что $\sigma^\varepsilon(\sigma^\varepsilon)' = a^\varepsilon$, "$'$" означает транспонирование, $w(s)$ — стандартный винеровский процесс, $s \in [0,T]$. Поскольку $(a^\varepsilon, b^\varepsilon) \in \Theta(\lambda, K)$, уравнения (3) имеют единственные слабые решения [8, 10].

Аналогично определяется случайный процесс $\xi(t)$, соответствующий оператору L, — как решение стохастического уравнения

$$\xi(t) = x + \int_0^t b(s, \xi(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s))\,dw(s). \tag{4}$$

Пусть $\mathbb{C}(0,T)$ — пространство непрерывных функций $x(t)$, $t \in [0,T]$, со значениями в E_d, $\mathcal{M}_t = \sigma\{x(s), s \le t\}$. Обозначим через μ^ε и μ меры, порожденные на $\mathbb{C}(0,T)$ процессами ξ^ε и ξ соответственно. Слабую сходимость мер будем обозначать символом $\Rightarrow$, $\boldsymbol{E}$ — символ математического ожидания. Решения уравнений (3), (4) есть марковские процессы, и ниже используется обычная символика теории марковских процессов.

Известно [9] вероятностное представление решений задач (1), (2) как функционалов от случайных процессов (3), (4):

$$u^\varepsilon(t,x) = -\boldsymbol{E}_{t,x} \int_t^T f(s, \xi^\varepsilon(s))\,ds,$$

$$u(t,x) = -\boldsymbol{E}_{t,x} \int_t^T f(s, \xi(s))\,ds.$$

Из оценки Крылова [9] следует равномерная ограниченность функций $u^{\varepsilon}(t, x)$, $u(t, x)$:

$$|u^{\varepsilon}(t,x)| + |u(t,x)| \le C\,\|f\|_{d+1}. \tag{5}$$

Обозначим через $\chi(A)$ индикатор множества A.

Теорема 1. *Пусть* L^{ε}, $L \in \mathfrak{L}(\lambda, K)$. *Для того чтобы* $L^{\varepsilon} \xrightarrow{G} L$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mu^{\varepsilon} \Rightarrow \mu$.

Доказательство. *Необходимость.* Возьмем в (1), (2) $f = L\Phi$, $\Phi(t, x) \in C_0^{\infty}([0, T] \times E_d)$. Применим к процессу $\xi^{\varepsilon}(t)$ и функции $u^{\varepsilon}(t, x)$ формулу Ито [9]. Тогда для произвольного $\mathcal{M}_s$-измеримого функционала $\varphi_s(x)$ имеем

$$\boldsymbol{E}\,\varphi_s(\xi^{\varepsilon})\left[\Phi(t, \xi^{\varepsilon}(t)) - \Phi(s, \xi^{\varepsilon}(s)) - \int_s^t L\Phi(v, \xi^{\varepsilon}(v)\,dv)\right] =$$

$$= \boldsymbol{E}\,\varphi_s(\xi^{\varepsilon})\,[\Phi(t, \xi^{\varepsilon}(t)) - u^{\varepsilon}(t, \xi^{\varepsilon}(t))] -$$

$$- \boldsymbol{E}\,\varphi_s(\xi^{\varepsilon})\,[\Phi(s, \xi^{\varepsilon}(s)) - u^{\varepsilon}(s, \xi^{\varepsilon}(s))]. \tag{6}$$

Оценим правую часть в (6). Для произвольного $v \in [0, T]$

$$|\boldsymbol{E}\,\varphi_s(\xi^{\varepsilon})\,[\Phi(v, \xi^{\varepsilon}(v)) - u^{\varepsilon}(v, \xi^{\varepsilon}(v))]| =$$

$$= |\boldsymbol{E}\,\varphi_s(\xi^{\varepsilon})\,[\Phi(v, \xi^{\varepsilon}(v)) - u^{\varepsilon}(v, \xi^{\varepsilon}(v))]\,\chi(|\xi^{\varepsilon}(v)| \le R) +$$

$$+ |\boldsymbol{E}\,\varphi_s(\xi^{\varepsilon})\,[\Phi(v, \xi^{\varepsilon}(v)) - u^{\varepsilon}(v, \xi^{\varepsilon}(v))]\,|\chi(|\xi^{\varepsilon}(v)| > R) \le$$

$$\le |\boldsymbol{E}\varphi_s(\xi^{\varepsilon})\,[\Phi(v, \xi^{\varepsilon}(v)) - u^{\varepsilon}(v, \xi^{\varepsilon}(v))]\,\chi(|\xi^{\varepsilon}(v)| \le R) +$$

$$+ C\boldsymbol{P}\{|\xi^{\varepsilon}(v)| > R\} = I_1^{\varepsilon} + I_2^{\varepsilon}. \tag{7}$$

В силу имеющейся G-сходимости $u^{\varepsilon}(t, x)$ сходится к $\Phi(t, x)$ равномерно на компактах. Поэтому $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_1^{\varepsilon} = 0$. Согласно свойствам стохастических интегралов

$$\boldsymbol{P}\{|\xi^{\varepsilon}(v)| > R\} \le \frac{C}{R^2}.$$

Следовательно, переходя в (7) к пределу вначале по $\varepsilon \to 0$, а затем по $R \to \infty$, получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\boldsymbol{E}\,\varphi_s(\xi^{\varepsilon})\,[\Phi(v, \xi^{\varepsilon}(v)) - u^{\varepsilon}(v, \xi^{\varepsilon}(v))]| = 0 \qquad \forall\, v \in [0, T]. \tag{8}$$

Поскольку $(a^{\varepsilon}, b^{\varepsilon}) \in \Theta(\lambda, K)$, то семейство мер, порожденных процессами ξ^{ε}, слабо компактно. Пусть подпоследовательность μ^{ε^*} слабо сходится к некоторой предельной мере μ. Перейдем в (6) к пределу при $\varepsilon^* \to 0$, используя (8) и лемму 2 [5]. Тогда

$$\boldsymbol{E}^{\mu}\,\varphi_s(x)\left[\Phi(t, x(t)) - \Phi(s, x(s)) - \int_s^t L\Phi(v, x(v))\,dv\right] = 0,$$

где E^{μ} означает усреднение по мере μ.

Таким образом, мера μ является решением проблемы мартингалов для коэффициентов $(a, b) \in \Theta(\lambda, K)$. При сделанных предположениях решение проблемы мартингалов единственно [8, 10]. Следовательно, $\mu^{\varepsilon} \Rightarrow \mu$ — мере, соответствующей решению уравнения (4).

Достаточность. Так как $\mu^{\varepsilon} \Rightarrow \mu$, то $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}(t, x) = u(t, x)$. Это следует из вероятностного представления решений задач (1), (2) и леммы 2 [5]. Требуемая равномерная сходимость на компактах вытекает из равномерной по ε гельдеровости на компактах решений (1) [7]: $\forall\,(s, t) \in [0, T]$, $x, y \in D$

$$| u^{\varepsilon}(t, x) - u^{\varepsilon}(s, y) | \leq N \left(\sup_{\substack{t \in [0,\, T] \\ x \in D}} | u^{\varepsilon}(t,\ x) | + \| f \|_{d+1} \right) (| t - s |^{1/2} + | x - y |)^{\beta}$$

с некоторыми постоянными N, β, не зависящими от ε. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 1 следует, что любые условия, обеспечивающие слабую сходимость μ^{ε} к μ, являются достаточными для G-сходимости L^{ε} к L. Таковыми, например, являются условия (V), (N) работы [5]. Слабую сходимость в $L_{2,\,\mathrm{loc}}$ обозначим $\rightharpoonup$.

***Условие* (V).** Существует последовательность функций $V_k^{\varepsilon}(t, x) \in W_{d+1,\mathrm{loc}}^{1,2}$, $k = \overline{1,\ d}$, такая, что

1) $\hat{b}_k^{\varepsilon} \overset{\mathrm{def}}{=} b_k^{\varepsilon} + \frac{1}{2}(a^{\varepsilon}\nabla, \nabla) V_k^{\varepsilon} \rightharpoonup b_k$ при $\varepsilon \to 0$;

2) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{\substack{t \in [0,\, T] \\ x \in D}} | V_k^{\varepsilon}(t, x) | = 0$ для любой ограниченной области $D \subset E_d$;

3) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\| \dfrac{\partial V_k^{\varepsilon}}{\partial t} + (b^{\varepsilon},\ \nabla V_k^{\varepsilon}) + \hat{b}_k^{\varepsilon} - b_k \right\|_{d+1,\,\mathrm{loc}} = 0.$

***Условие* (N).** Существует последовательность функций $N_{kl}^{\varepsilon}(t, x) = N_{kl}^{\varepsilon}(t, x) \in$ $\in W_{d+1,\mathrm{loc}}^{1,2}$, $k, l \in \overline{1,\ d}$, такая, что

1) $\hat{a}_{kl}^{\varepsilon} \overset{\mathrm{def}}{=} \hat{a}_{kl}^{\varepsilon} + (a^{\varepsilon}\nabla, \nabla) N_{kl}^{\varepsilon} \rightharpoonup a_{kl}$ при $\varepsilon \to 0$;

2) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{\substack{t \in [0,\, T] \\ x \in D}} | N_{kl}^{\varepsilon}(t, x) | = 0$ для любой ограниченной области $D \subset E_d$;

3) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\| \dfrac{\partial N_{kl}^{\varepsilon}}{\partial t} + (b^{\varepsilon},\ \nabla N_{kl}^{\varepsilon}) + \dfrac{1}{2}\left(\hat{a}_{kl}^{\varepsilon} - a_{kl}\right) \right\|_{d+1,\,\mathrm{loc}} = 0.$

Из теоремы 1 и теоремы 2 [5] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть функции* $(a^{\varepsilon}, b^{\varepsilon}) \in \Theta(\lambda, K)$ *и для них выполнены условия* (V), (N) *с функциями* $(a, b) \in \Theta(\lambda, K)$. *Тогда* $L^{\varepsilon} \xrightarrow{G} L$.

Оказывается, что при дополнительном предположении условия (V), (N) являются и необходимыми для G-сходимости L^{ε} к L.

Пусть

$$g^\varepsilon(t,x) \in L_2([0,T]\times D), \quad z^\varepsilon(t,x) \in W_2^{1,2}([0,T]\times D)$$

— решение граничной задачи, D — ограниченная область с гладкой границей ∂D [6]:

$$L^\varepsilon z^\varepsilon = g^\varepsilon, \quad t\in[0,T], \quad x\in D,$$

$$z^\varepsilon(T,x) = z^\varepsilon(t,x)\big|_{\partial D} = 0.$$

***Условие* (*H*).** Если $\sup\limits_\varepsilon \| g^\varepsilon \|_2 \le C$, то $\sup\limits_\varepsilon ||| z^\varepsilon |||_2 \le C$.

Теорема 3. *Пусть* L^ε, $L \in \mathfrak{L}(\lambda, K)$, $L^\varepsilon \xrightarrow{G} L$ *и выполнено условие* (H). *Тогда выполнены условия* (V) *и* (N).

Эта теорема есть непосредственное следствие теоремы 1 и теоремы 3 работы [5].

Отметим, что условие (N) для $(a^\varepsilon, b^\varepsilon) \in \Theta(\lambda, K)$ выполняется, например, в следующих случаях: при $d=1$ [8, 11], при $d=2$ [12], если $a_{ij}^\varepsilon(t,x)$ имеют по x равномерно суммируемую производную [13], если матрица $a^\varepsilon(t,x)$ удовлетворяет условию Кордеса [14].

Пусть $\psi^\varepsilon(x) \in W_{d+1}^2(E_d)$ и равномерно ограничены, $f^\varepsilon(t,x) \in L_{d+1}([0,T]\times E_d)$. Рассмотрим задачи Коши:

$$L^\varepsilon n^\varepsilon(t,x) = f^\varepsilon(t,x), \quad t\in[0,T], \quad x\in E_d,$$
$$n^\varepsilon(T,x) = \psi^\varepsilon(x). \tag{9}$$

При каждом $\varepsilon > 0$ решения задач (9) существуют и единственны в классе $W_{d+1}^{1,2}([0,T]\times E_d)$ [6].

Теорема 4. *Пусть* L^ε, $L \in \mathfrak{L}(\lambda, K)$, $L^\varepsilon \xrightarrow{G} L$, $f^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L_{d+1}} f$, $\psi^\varepsilon(x)$ *равномерно на компактах сходится к непрерывно ограниченной функции* $\psi(x) \in W_{d+1}^{1,2}(E_d)$. *Тогда функция* $n^\varepsilon(t,x)$ *равномерно на компактах сходится к функции* $n(t,x) \in W_{d+1}^{1,2}([0,T]\times E_d)$ — *решению задачи Коши*

$$L\, n(t,x) = f(t,x), \quad t\in[0,T), \quad x\in E_d,$$
$$n(T,x) = \psi(x). \tag{10}$$

Доказательство. Используем вероятностное представление решения задачи (9):

$$n^\varepsilon(t,x) = \boldsymbol{E}_{t,x}\,\psi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(T)) - \boldsymbol{E}_{t,x}\int_t^T f(s,\xi^\varepsilon(s))\,ds. \tag{11}$$

Так как $\mu^\varepsilon \Rightarrow \mu$, то, как и при доказательстве теоремы 1,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{E}_{t,x}\int_t^T f(s,\xi^\varepsilon(s))\,ds = \boldsymbol{E}_{t,x}\int_t^T f(s,\xi^\varepsilon(s))\,ds. \tag{12}$$

Далее,

$$\boldsymbol{E}_{t,x}[\psi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(T)) - \psi(\xi(T))] = \boldsymbol{E}_{t,x}[\psi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(T)) - \psi(\xi^\varepsilon(T))]\,\chi(|\xi^\varepsilon(T)| \le R) +$$

$$+ \; \boldsymbol{E}_{t,x} \left[\psi^{\varepsilon}(\xi^{\varepsilon}(T)) - \psi(\xi^{\varepsilon}(T)) \right] \chi \left(| \xi^{\varepsilon}(T) | > R \right).$$

Первое слагаемое правой части стремится к нулю по условию теоремы, второе — к нулю равномерно по ε при $R \to \infty$ в силу равномерной ограниченности функций ψ^{ε}, ψ и свойств стохастических интегралов. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{E}_{t,x} \psi^{\varepsilon}(\xi^{\varepsilon}(T)) = \boldsymbol{E}_{t,x} \psi(\xi(T)). \tag{13}$$

Используя (12), (13), переходим к пределу в (11):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h^{\varepsilon}(t, x) = \boldsymbol{E}_{t,x} \psi(\xi(T)) - \boldsymbol{E}_{t,x} \int_t^T f(s, \xi(s))\, ds = h(t, x).$$

Функция $h(t, x)$ — вероятностное представление решения задачи Коши (10).

Равномерная сходимость на компактах h^{ε} к h следует из равномерной гельдеровости на компактах решений задачи (9) [7]. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров.

***Пример* 1.** Пусть $d = 1$ и операторы L^{ε} имеют вид

$$L^{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} a^{\varepsilon}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[b_1^{\varepsilon}(t, x) + b_2^{\varepsilon}(x) \right] \frac{\partial}{\partial x},$$

$(a^{\varepsilon}, b_1^{\varepsilon} + b_2^{\varepsilon}) \in \Theta(\lambda, K)$ и существуют функции $(A^{\varepsilon}(x), b(t, x)) \in \Theta(\lambda, K)$ такие, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| b_1^{\varepsilon} - b \|_{2, \mathrm{loc}} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \| a^{\varepsilon} - A^{\varepsilon} \|_{2, \mathrm{loc}} = 0.$$

Кроме того, будем считать, что слабо в $L_{2, \mathrm{loc}}$

$$\frac{b_2^{\varepsilon}}{A^{\varepsilon}} \longrightarrow B \quad \text{и} \quad \frac{1}{A^{\varepsilon}} \longrightarrow A \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Тогда G-предельным оператором для операторов L^{ε} является оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} A^{-1}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(b(t, x) + \frac{B(x)}{A(x)} \right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Действительно, нетрудно проверить, что условиям (V), (N) удовлетворяют функции

$$V^{\varepsilon}(x) = 2 \int_0^x \int_0^y \left(\frac{B(z)}{A^{\varepsilon}(z) A(z)} - \frac{b_2^{\varepsilon}(z)}{A^{\varepsilon}(z)} \right) dz\, dy,$$

$$N^{\varepsilon}(x) = \int_0^x \int_0^y \left(\frac{1}{A^{\varepsilon}(z) A(z)} - 1 \right) dz\, dy.$$

***Пример* 2.** Пусть операторы L^{ε} имеют вид

$$L^{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(a\left(t, \frac{t}{\varepsilon^q}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla, \nabla \right) + \left(b\left(t, \frac{t}{\varepsilon^q}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \right)$$

с достаточно гладкими функциями $a_{ij}(t, s, x, z)$, $b_i(t, s, x, z)$, $i, j = \overline{1, d}$, периодическими по s, z с периодом 1.

Доказательства существования, единственности и гладкости решений рассматриваемых ниже уравнений имеются в [15]. Обозначим через $m(t, s, x, z)$ единственное периодическое по (s, z) решение уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}(a_{ij} m) = 0, \quad \langle m \rangle_z = 1.$$

Здесь и в дальнейшем угловые скобки означают среднее периодической функции, а индексы — аргументы, по которым проведены усреднения.

Далее, пусть $p(t, s, x, z)$ — единственное периодическое по (s, z) решение уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial s} p + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}(a_{ij} p) = 0, \quad \langle p \rangle_{s,z} = 1.$$

Обозначим через

$$\overline{a}_{ij}(t, x, z) = \langle a_{ij}(t, s, x, z)\rangle_s, \quad \overline{b}_i(t, x, z) = \langle b_i(t, s, x, z)\rangle_s, \quad i, j = \overline{1, d}, \quad \overline{m}(t, x, z),$$

единственное периодическое по z решение уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}(\overline{a}_{ij}\, \overline{m}) = 0, \quad \langle \overline{m} \rangle_z = 1.$$

В рассматриваемом примере G-предельный оператор L имеет вид

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}(A(t, x)\nabla, \nabla) + (B(t, x), \nabla),$$

где коэффициенты A, B определяются по формулам:

1) при $q \in (0, 2)$

$$A_{ij}(t, x) = \langle (a_{ij} m)(t, s, x, z)\rangle_{s,z}; \quad B_i(t, x) = \langle (b_i m)(t, s, x, z)\rangle_{s,z};$$

2) при $q = 2$

$$A_{ij}(t, x) = \langle (a_{ij} p)(t, s, x, z)\rangle_{s,z}; \quad B_i(t, x) = \langle (b_i p)(t, s, x, z)\rangle_{s,z};$$

3) при $q > 2$

$$A_{ij}(t, x) = \langle (\overline{a}_{ij}\overline{m})(t, x, z)\rangle_z; \quad B_i(t, x) = \langle (\overline{b}_i \overline{m})(t, x, z)\rangle_z.$$

Укажем функции $N_{kl}^{\varepsilon}(t, x)$, удовлетворяющие условию (N). Условие (V) проверяется аналогично.

Рассмотрим случай 1. Через $N_{kl}(t, s, x, z)$ обозначим периодическое по s, z решение уравнения

$$(a\nabla_z, \nabla_z)N_{kl} = \langle a_{kl} m \rangle_z - a_{kl}, \quad \langle N_{kl} \rangle_z = 0.$$

Далее,

$$N_{kl}^{1}(t, s, x) = -\frac{1}{2}\int_0^s [\langle (a_{kl} m)(t, v, x, z)\rangle_z - \langle (a_{kl} m)(t, s, x, z)\rangle_{s,z}]\, dv.$$

Условию (N) удовлетворяют функции

$$N_{kl}^{\varepsilon}(t, x) = \varepsilon^2 N_{kl}\left(t, \frac{t}{\varepsilon^q}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^q N_{kl}^{(1)}\left(t, \frac{t}{\varepsilon^q}, x\right).$$

В случае 2 условию (N) удовлетворяют функции

$$N_{kl}^{\varepsilon}(t,x) = \varepsilon^2 D_{kl}\left(t, \frac{t}{\varepsilon^2}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где $D_{kl}(t, s, x, z)$ — периодические по (s, z) решения уравнений

$$\frac{\partial}{\partial s}D_{kl} + \frac{1}{2}(a\nabla_z, \nabla_z)D_{kl} = \frac{1}{2}(\langle a_{kl}p\rangle_{s,z} - a_{kl}),$$

$$\langle D_{kl}\rangle_{s,z} = 0.$$

Чтобы построить функции N_{kl}^{ε} для случая 3, введем функции $\chi_{kl}(t, x, z)$ как периодические по z решения уравнений

$$(\overline{a}\,\nabla_z, \nabla_z)\chi_{kl} = \langle \overline{a}_{kl}\,\overline{m}\rangle_z - \overline{a}_{kl}, \quad \langle\chi_{kl}\rangle_z = 0.$$

Положим

$$\chi_{kl}^{(1)}(t, s, x, z) = -\frac{1}{2}\int_0^s [(a(t, v, x, z)\nabla_z, \nabla_z)\chi_{kl}(t, x, z) + a_{kl}(t, v, x, z) - \langle\overline{a}_{kl}\overline{m}\rangle_z]\,dv.$$

Условию (N) удовлетворяют функции

$$N_{kl}^{\varepsilon}(t,x) = \varepsilon^2\chi_{kl}\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^q\chi_{kl}^{(1)}\left(t, \frac{t}{\varepsilon^q}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

1. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* G-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук. – 1981. - **36**, вып. 1. – С. 11 – 58.
2. *Жиков В. В., Сиражудинов М. М.* О G-компактности одного класса недивергентных эллиптических операторов второго порядка // Изв. АН СССР. Сер.мат. – 1981. – **45**, вып. 4. – С. 718 – 733.
3. *Крылов Н. В.* О G-сходимости эллиптических операторов в недивергентной форме // Мат. заметки. – 1985. – **38**, вып. 4. – С. 522 – 527.
4. *Алюшина Л. А., Крылов Н. В.* О предельном переходе в стохастических уравнениях Ито // Теория вероятностей и ее применения. – 1988. – **36**, вып.1. – С. 3 – 13.
5. *Махно С. Я.* Сходимость диффузионных процессов // Укр. мат. журн. – 1992. –**44**, № 2. – С. 284 – 289.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
7. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. – М.: Наука, 1985. – 374 с.
8. *Веретенников А. Ю.* О сильных и слабых решениях одномерных стохастических уравнений с граничными условиями // Теория вероятностей и ее применения. – 1981. – **26**, вып. 4. – С. 685 – 701.
9. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. – М.: Наука, 1977. – 398 с.
10. *Strook D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional Diffusion Process. –Berlin etc.: Springer, 1979. – 338 p.
11. *Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1979. – **5**. –С. 217 – 272.
12. *Крылов Н. В.* Об уравнениях минимаксного типа в теории эллиптических и параболических уравнений на плоскости // Мат. сб. – 1970. – **81**, вып. 1. –С. 3 – 22.
13. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности // Успехи мат. наук. – 1986. –**41**, вып. 5. – С. 59 – 83.
14. *Алхутов Ю. А, Мамедов И. Т.* Первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами // Мат.сб. – 1986. – **131**, вып. 4. – С. 477 – 500.
15. *Bensoussan A., Lions P. L., Papanicolsou G.* Asymptotic analysis periodic structures. – Amsterdam etc.: North-Holland, 1978. – 700 p.

Получено 26. 04. 93