УДК 519.21

И. И. Скрыпник, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О СУЩЕСТВОВАНИИ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

The properties of solutions of weakly nonlinear parabolic equations are studied in cylindrical domains. The existence conditions for local nontangential limits as $t \to 0$ are established.

Вивчаються властивості розв'язків слабко нелінійних параболічних рівнянь у циліндричних областях. Встановлені умови існування локальних недотичних границь, якщо $t \to 0$.

Теорема Фату [1] о существовании угловых пределов для ограниченной аналитической функции в круге была перенесена многими авторами на решения эллиптических и параболических уравнений (см., например, [2 – 4], более подробный список литературы можно найти в [5]).

В данной работе рассматривается вопрос о существовании нетангенциальных пределов для решений слабо нелинейных параболических уравнений.

Будем рассматривать обобщенные решения $u(x, t) \in V_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = a\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{1}$$

в ограниченной области $Q \subset R_+^{n+1}$. Локальное поведение решения уравнения (1) будем рассматривать вблизи части S, являющейся плоским куском, $S \subset R^n$, $\operatorname{mes} S > 0$ границы ∂Q (что всегда можно обеспечить введением локальных координат), при соответствующей гладкости границы ∂Q. Обозначим $R_+^{n+1} = \{(x, t)\colon\ x \in R^n,\ t > 0\}$.

Предполагаем в дальнейшем, что функции $a(x, t, u, p)$, $a_{ij}(x, t, u)$, $i, j = 1, \ldots, n$, определены при $(x, t) \in Q$, $u \in R^1$, $p \in R^n$ и удовлетворяют при рассматриваемых значениях аргументов следующим условиям:

A. Для почти всех x, t функции $a(x, t, u, p)$ непрерывны по u, p, $a_{ij}(x, t, u)$ дифференцируемы по x_k, $k = 1, \ldots, n$; при всех $u \in R^1$, $p \in R^n$, $a(x, t, u, p)$, $a_{ij}(x, t, u)$ измеримы по x, t.

B. Выполнены неравенства

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t, u)\xi_i \xi_j \ge \mu_1 |\xi|^2, \quad |a_{ij}(x, t, u)| \le \mu_2 |u| + \mu_3,$$

$$\left| \frac{\partial a_{ij}(x,t,u)}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial a_{ij}(x,t,u)}{\partial x_k} \right| \le \mu_4, \quad |a(x, t, u, p)| \le \mu_5 (1 + |p|^2 + |u|).$$

Здесь $\mu_1 - \mu_5$ — произвольные неотрицательные постоянные, $\mu_1 > 0$. Решение $u(x, t)$ уравнения (1) понимается в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_Q \left[-u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - a\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right)\varphi \right] dx\,dt = 0 \tag{2}$$

для всех финитных в Q функций $\varphi(x, t) \in W_2^1(Q)$.

Для произвольного $a > 0$ и множества $W \subset Q$ обозначим

$$\Gamma_a(x) = \{(s, t)\colon |s - t| < a\sqrt{t}\}, \quad x \in S, \tag{3}$$

$$N_{W,a}(x) = \sup\{\,|u(s,t)|,\ \ (s,t)\in\Gamma_a(x)\cap W\},\tag{4}$$

$(N_{W,a}(x) = 0$, если $\Gamma_a(x)\cap W = \varnothing)$, $t_s = \sup\{t:\ (s,t)\in W\}$,

$$N^0_{W,a}(x) = \sup\{\,|u(s,t_s)| - |u(s,t)|,\ \ (s,t)\in\Gamma_a(x)\cap W\},\tag{5}$$

$(N^0_{W,a}(x) = 0$ при $\Gamma_a(x)\cap W = \varnothing)$,

$$A_{W,a}(x) = \left\{\ \int\limits_{\Gamma_a(x)\cap W} t^{(1-n)/2}\left|\ \frac{\partial u(s,t)}{\partial s}\ \right|^2 ds\,dt\right\}^{1/2},\tag{6}$$

$$D^{(1)}_{W,a}(x) = \sup\left\{t^{\alpha/2}\frac{|u(s,t)-u(s',t)|}{|s-s'|^{\alpha}},\ \ (s,t),(s',t)\in\Gamma_a(x)\cap W\right\},\tag{7}$$

$$D^{(2)}_{W,a}(x) = \sup\left\{\min(t^{\alpha/2},t'^{\alpha/2})\frac{|u(s,t)-u(s,t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}},\ (s,t),(s,t')\in\Gamma_a(x)\cap W\right\},\tag{8}$$

$$D_{W,a}(x) = D^{(1)}_{W,a}(x) + D^{(2)}_{W,a}(x),$$

α — некоторая постоянная, $0<\alpha<1$.

Определение. *Будем говорить, что функция* $u(x,t)$ *нетангенциально ограничена в точке* $x_0\in S$, *если для некоторых* $a, h>0$ $\sup|u(x,t)|<\infty$, $(x,t)\in\Gamma_{a,h}(x_0)$, *где* $\Gamma_{a,h}(x_0) = \{(s,t):\ |s-x_0|<a\sqrt{t},\ 0<t<h^2\}$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* A, B *и* $u(x,t)$ — *решение уравнения* (1) *в* Q. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Если функция* $u(x,t)$ *нетангенциально ограничена в каждой точке* $S_1\subset S$, *то для достаточно малого* h *и любого* $a>0$ *функция* $A_{h,a}(x)<\infty$ *почти всюду на* S_1.

2. *Если при некоторых* $a, h>0$ *функция* $A_{h,a}(x)<\infty$ *для всех* $x\in S_1$, *то почти в каждой точке* $x_0\in S_1$ *решение* $u(x,t)$ *уравнения* (1) *имеет конечный предел*

$$\lim u(x,t)<\infty,\qquad (x,t)\to(x_0,0),\qquad (x,t)\in\Gamma_a(x_0).\tag{9}$$

Здесь $A_{h,a}(x) = \left\{\ \int\limits_{\Gamma_{a,h}(x)} t^{(1-n)/2}\left|\frac{\partial u(s,t)}{\partial s}\right|^2 ds\,dt\right\}^{1/2}$.

Доказательство теоремы 1 основывается на следующих двух теоремах, которые доказываются методом, используемым в работе [2].

Пусть G — ограниченное подмножество S_1 и $\mathcal{P} = \operatorname{int}\{Q\setminus\bigcup_{x\notin G}\Gamma_a(x)\}$.

Теорема 2. *Пусть* $u(x,t)$ — *решение уравнения* (1) *в* Q, $\alpha, \beta\in(1,\infty)$ $\rho>0$. *Существует* $a_0 = a_0(n,\alpha)$ *такое, что для любых* $a>a_0$ *можно указать такие положительные числа* $\gamma=\gamma(n,\alpha,\beta,a)$, $\delta=\delta(n,\alpha,\beta,a)$, $r=r(n,\alpha,\beta,a,\rho)$, *при которых выполняется неравенство*

$$\alpha\,\mathrm{mes}\{N^0_{\mathcal{P},a}>\beta\lambda\}\le \mathrm{mes}\{N^0_{\mathcal{P},a}>\lambda\}+$$

$$+\alpha\,[c(n)\,\mathrm{mes}\{A_{\mathcal{P},a}>\gamma\lambda\}+\mathrm{mes}\{D_{\mathcal{P},a}>\delta\lambda\}+\mathrm{mes}\{N_{\mathcal{P},a}>\rho\lambda\}]\tag{10}$$

для всех $\lambda>0$, *лишь только* $\operatorname{diam}G<r$.

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t)$ — *решение уравнения* (1) *в* Q. *Если* $\alpha, \beta \in (1,\infty)$, $\rho, r, a > 0$, *то найдутся такие положительные числа* $\gamma = \gamma(n, \alpha, \beta, a, \rho, r)$, $\delta = \delta(n, \alpha, \beta, a, \rho, r)$, *что верно неравенство*

$$\alpha \operatorname{mes}\{A_{\mathcal{P},a} > \beta\lambda\} \le \operatorname{mes}\{A_{\mathcal{P},a} > \lambda\} + \alpha\left[\operatorname{mes}\{N_{\mathcal{P},a} > \gamma\lambda\} + \operatorname{mes}\{D_{\mathcal{P},a} > \delta\lambda\}\right] \tag{11}$$

для всех $\lambda > 0$, *если* $\operatorname{diam} G < r$.

Рассмотрим некоторые моменты доказательства теоремы 2.

Пусть, как и ранее, $\mathcal{P} = \operatorname{int}\{Q \setminus \bigcup_{x \notin G} \Gamma_a(x)\}$, G — открытое ограниченное множество, $G \subset S_1 \subset S$, $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P} \cap \{t > \varepsilon^2\}$. Докажем (10), заменив $\mathcal{P}$ на $\mathcal{P}_\varepsilon$, потом, перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим требуемое неравенство.

Пусть $\pi_{\gamma,\lambda}(x) = \chi_{\{A_{\mathcal{P}_\varepsilon,a} > \gamma\lambda\}}(x)$, где $\chi_R(x)$ — характеристическая функция множества R; $\pi^*_{\gamma,\lambda}(x)$ — соответствующая максимальная функция Харди–Литтлвуда [4, с. 14]

$$E = \{N^0_{\mathcal{P}_\varepsilon,a} > \beta\lambda,\ \pi^*_{\gamma,\lambda} \le \frac{1}{2},\ D_{\mathcal{P}_\varepsilon,a} \le \delta\lambda,\ N_{\mathcal{P}_\varepsilon,a} \le \rho\lambda\}, \quad G_0 = \{N^0_{\mathcal{P}_\varepsilon,a} > \lambda\}.$$

Покажем, что при достаточно малых γ, δ выполняется неравенство

$$\alpha \operatorname{mes} E < \operatorname{mes} G_0 \tag{12}$$

(тогда из (12) получим (10)). Проведем доказательство от противного. Пусть

$$\operatorname{mes} G_0 \le \alpha \operatorname{mes} E. \tag{13}$$

Тогда существует шар $B \subset G_0$ такой, что $\operatorname{mes} B \le c_1\alpha \operatorname{mes}\{E \cap B\}$, и существует точка $x_0 \in \partial B$ такая, что $N^0_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}(x_0) \le \lambda$ (см. [2]). Не ограничивая общности, считаем, что $B = B(0, r)$; выберем $\xi \in (0, 1/2)$, шар $B_0 = B(0, (1-2\xi)r)$, чтобы $\operatorname{mes} B_0 \le (1 - 1/(2\alpha c_1)) \operatorname{mes} B$. Тогда $\operatorname{mes} B \le 2\alpha c_1 \operatorname{mes}\{E \cap B\}$.

Положим

$$E_0 = B_0 \cap E,\ V^r_\varepsilon = \left\{(x,t) : |x| < r - a\sqrt{t},\ \varepsilon^2 < t < \frac{r^2}{a^2}\right\},\ W_0 = \bigcup_{x \in E_0} \{\Gamma_a(x) \cap V^r_\varepsilon\}.$$

Пусть

$$\theta = \frac{\beta - 1}{2}, \quad v(x,t) = u(x,t) - u\left(0, \frac{r^2}{a^2}\right), \quad \delta < \frac{\theta}{2}\,\frac{\xi^\alpha}{1 + 2^\alpha + (\xi a)^\alpha}. \tag{14}$$

Тогда

$$|v(s,t)| \le \theta\lambda/2, \qquad (s,t) \in \partial W_0^+ = \bigcup_{x \in E_0} \{\Gamma_a(x) \cap \partial V^r_\varepsilon\}, \tag{15}$$

$$\sup\{|v(s,t)|,\ (s,t) \in \Gamma_a(x) \cap W_0\} > \theta\lambda, \qquad x \in E_0. \tag{16}$$

Действительно, зафиксировав $x \in E_0$, имеем $D_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}(x) \le \delta\lambda$. Если $(s,t) \in \Gamma_a(x) \setminus V^r_\varepsilon$, то простые вычисления показывают, что $t > (a^{-1} r\xi)^2$.

Пусть $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in \Gamma_a(x) \cap V^r_\varepsilon$. Тогда

$$|v(s_1,t_1) - v(s_2,t_2)| \le \delta\lambda\left[\frac{|s_1 - s_2|^\alpha + |t_1 - t_2|^{\alpha/2}}{\min\left(t_1^{\alpha/2}, t_2^{\alpha/2}\right)}\right]. \tag{17}$$

Применив (17) к точкам $(0, r^2/a^2)$, $(s,t) \in \partial W_0$, получим (15). Введем множества

$$U_1 = \{(s,t) \in \mathcal{P}_\varepsilon,\ |s| < a\sqrt{t} - r\},\ U_2 = \{\Gamma_a(x) \cap \mathcal{P}_\varepsilon\} \setminus \{V^r_\varepsilon \cup U_1\}.$$

По определению E_0 и так как $\Gamma_a(x) \cap \mathcal{P}_\varepsilon \subset U_1 \cup U_2 \cup W_0$, имеем

$$\beta\lambda < N^0_{\mathcal{P}_\varepsilon, a}(x) \le N^0_{U_1,a}(x) + N^0_{U_2,a}(x) + N^0_{W_0,a}(x). \tag{18}$$

Для точки $x_0 \in \partial B$ выполнено $N^0_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}(x_0) \le \lambda$, а так как $U_1 \subset \Gamma_a(x_0) \cap \mathcal{P}_\varepsilon$, то

$$N^0_{U_1,a}(x) \le N^0_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}(x_0) \le \lambda. \tag{19}$$

Если $(s, t_1), (s, t_2) \in U_2$, то $a\sqrt{t_i} < |s| + r$, $a\sqrt{t_i} < |s| - r$, $i = 1, 2$, поэтому $|\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}| < 2r/a$. Из неравенства (17) следует

$$N^0_{U_2,a} \le (2/\xi)^\alpha \delta\lambda. \tag{20}$$

Наконец,

$$N^0_{W_0,a} \le \sup\{|v(s,t)|,\ (s,t) \in \Gamma_a(x) \cap W_0\} + (1 + (\xi\alpha)^\alpha)\xi^{-\alpha}\delta\lambda. \tag{21}$$

Теперь из неравенств (18)–(21), используя (14), получаем (16).

Введем при $x \in S$, $l > 0$ обозначения

$$\Gamma_a(x,l) = \{(s,t): |s - x| < a(\sqrt{t} - \sqrt{l})\},$$

$$M(x,l) = \sup\{|v(s,t)|,\ (s,t) \in \Gamma_a(x,l) \cap W_0\},$$

$$W = \{(x,l) \in W_0: M(x,l) < \theta\lambda\}, \quad l^x = \inf\{l,\ (x,l) \in W\}.$$

Ввиду непрерывности $u(x,t)$ вблизи ∂W_0^+ из (15) следует, что W не пусто и его верхняя граница $\partial W = \bigcup_{x \in E_0} (\Gamma_a(x,l) \cap \partial V_\varepsilon^r)$, совпадает с ∂W_0^+.

Введем множество

$$F = \{(x, l^x): |v(x, l^x)| > \theta\lambda/2\} \subset \partial W^- = \partial W \setminus \partial W^+.$$

Обозначим через $P(F)$ проекцию множества F на R^n. Тогда [2, 6] существует такая постоянная $c = c(n, \alpha) > 0$, что

$$\operatorname{mes} \mathcal{P}(F) \ge c \operatorname{mes} B. \tag{22}$$

Далее, можно найти такие $\delta(\alpha, \beta, a)$, $r_0(\alpha, \beta, a, \rho) > 0$, что при $r < r_0$ [2, 6, 7] будет выполнено

$$c_1 \operatorname{mes} B\,\lambda^2 \le \int_W \sqrt{t} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\,dt \le c_2 \gamma^2 \operatorname{mes} B\,\lambda^2, \tag{23}$$

где $c_1 = c_1(n, \alpha, \beta)$, $c_2 = c_2(n, \alpha, \beta)$.

Теперь при достаточно малом γ из (23) получаем противоречие. А поэтому неравенство (13) невозможно. Тем самым теорема 2 доказана.

1. *Faton P.* Séries trigonométriques et séries de Taylor // Acta math. – 1906. – **30**. – P. 335–400.
2. *Burkholder D. L., Gundy R. F.* Distribution function inequalities for the area integral // Stud. math. – 1972. – **44**, № 6. – P. 527–544.
3. *Carleson L.* On the existence of boundary values of harmonic functions of several variables // Ark. mat. – 1962. – **4**. – P. 339–393.
4. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 273.
5. *Шелепов В. Ю.* О граничных свойствах решений эллиптических уравнений в многомерных областях, представимых с помощью разности выпуклых функций // Мат. сб. – 1987. – **133**. – С. 446–468.
6. *Скрыпник И. И.* Граничное поведение решений линейных параболических уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 7. – С. 1029–1038.
7. *Скрыпник И. И.* Граничное поведение решений слабо нелинейных эллиптических уравнений // Нелинейн. граничные задачи. – 1991. – **3**. – С. 66–71.

Получено 22. 10. 92