УДК 517.956

А. Ф. Тедеев, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

The property of localization of perturbations is proved for a solution of an initial–boundary-value Neumann problem in the region $D = \Omega x,\ t > 0$, where Ω is a region in R^n with noncompact boundary.

Доведена властивість локалізації збурень для розв'язку початково-крайової задачі Неймана, розглядуваного в області $D = \Omega x,\ t > 0$, де Ω — область у R^n з некомпактною границею.

1. Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, — неограниченная область с некомпактной достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в области $D = \Omega \times (t > 0)$ уравнение

$$u_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (|D^m u|^{p-2} D^\alpha u) = 0, \quad p > 2, \quad m \geq 1, \tag{1}$$

и начальное условие Коши

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \; D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \; D^j u = D^\beta u, \; |\beta| = j, \; u_t = \partial u / \partial t.$$

Следуя [1], определим классы областей, удовлетворяющих условию изопериметрического типа в следующем смысле. Рассмотрим функцию $l(v) = \inf \operatorname{mes}_{n-1}(\partial Q \cap \Omega)$, где Q — произвольное открытое подмножество Ω, а точная нижняя грань берется по всем таким Q, для которых $|Q| = v$ (здесь и далее $|Q| \equiv \operatorname{mes}_n Q$). Пусть положительная непрерывная монотонно неубывающая функция $g(v)$, $v > 0$, такова, что функция $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$, $0 < \varepsilon_0 \leq 1/n$, монотонно не убывает для всех $v > 0$. Будем говорить [1], что Ω принадлежит классу $\mathfrak{U}(g)$, если $l(v) \geq g(v)\ \forall v > 0$. Если $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, где Ω_j удовлетворяют условию конуса и $\operatorname{diam} \Omega_j \leq d$, причем d не зависит от j, то будем говорить, что Ω принадлежит классу $\mathcal{K}$. Далее, если

$$v_{-1}(s) \geq c_0 s / g(s), \quad s > 0, \tag{3}$$

где $v(R) = |\Omega_R|$, $\Omega_R = \Omega \cap K_R$, $K_R = \{|x| < R\}$ (считаем, что начало координат принадлежит Ω), $v_{-1}(s)$ — обратная к $v(R)$ функция, то будем говорить, что Ω удовлетворяет условию (3). В дальнейшем будем предполагать, что $u_0(x) \in L_2(\Omega)$ и $\operatorname{supp} u_0(x) \subset K_{R_0}$. В данной работе будет доказано, что решение задачи (1), (2) в области $D_T = \Omega \times (0, T)$ $\forall T > 0$ равно нулю в $\Omega^+_{R(T)} = \Omega \setminus \Omega_{R(T)}$ $\forall t \in (0, T)$, где $R(T)$ — функция, точно характеризующая геометрию области через функцию $g(s)$. Результаты, касающиеся конечной скорости распространения для решения задачи Коши либо Дирихле для уравнений типа (1) и его обобщений, получены в работах [2, 3], где был развит энергетический метод работы [4] (см. также [5]). По методике данная работа примыкает к работам [2, 3] и развивает их. Результаты работы являются новыми и для $m = 1$. Они были анонсированы в работе [6].

2. Приведем ряд вспомогательных утверждений, представляющих самостоятельный интерес. В дальнейшем через C будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от области.

Лемма 1 (неравенство Харди). *Пусть* $\Omega \in \mathfrak{U}(g)$ *и удовлетворяет условию* (3). *Тогда если*

$$\int_\Omega |u|^p |x|^{\alpha+p} dx, \qquad \int_\Omega |x|^{\alpha+p} |Du|^p dx < \infty, \qquad \alpha \geq 0,$$

то справедливо неравенство

$$\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p dx \leq C \int_\Omega |x|^{\alpha+p} |Du|^p dx. \tag{4}$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что для функции $u \in W_p^1(\Omega)$ и

$$1 < p < 1/\varepsilon_0 \tag{5}$$

справедливо неравенство

$$\int_\Omega |u|^p |x|^{-p} dx \leq C \int_\Omega |Du|^p dx. \tag{6}$$

Докажем (6) методом симметризации (см., например, [7]). Пусть $u^*(s) = \inf\{\sigma: \mu(\sigma) < s\}$, $\mu(\sigma) = |\{|u| > \sigma\}|$ —невозрастающая перестановка $u(x)$. Если $uv \in L_1(\Omega)$, то справедливо неравенство Харди – Литтлвуда [7]

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \int_0^\infty u^*(s) v^*(s)\, ds. \tag{7}$$

В силу неравенства (7)

$$\int_\Omega |u|^p |x|^{-p} dx \leq \int_0^\infty \left(|x|^{-p}\right)^* \left(|u|^p\right)^* ds = \int_0^\infty (u^*)^p (v_{-1}(s))^{-p} ds. \tag{8}$$

Докажем теперь, что

$$\int_0^\infty (u^*)^p (v_{-1}(s))^{-p} ds \leq C \int_0^\infty (g(s))^p (-u_s^*)^p ds. \tag{9}$$

Обозначим

$$\Phi(s) = \int_0^s \frac{d\sigma}{(v_{-1}(\sigma))^p}.$$

Тогда для произвольного $R > 0$

$$\int_0^R (u^*)^p \left(\Phi' - \left(\left(\frac{\sigma}{R}\right)^p \Phi\right)'\right) d\sigma = (u^*)^p \left(\Phi - \left(\frac{\sigma}{R}\right)^p \Phi\right)\Bigg|_0^R - p\int_0^R u_s^* (u^*)^{p-1} \left(\Phi - \frac{\sigma^p}{R^p}\Phi\right) d\sigma.$$

Отсюда вытекает

$$\int_0^R (u^*)^p \Phi' d\sigma \leq \frac{1}{R^p} \int_0^R (u^*)^p (\sigma^p \Phi)' d\sigma + p\int_0^R (-u_s^*)(u^*)^{p-1} \Phi\, d\sigma. \tag{10}$$

Учитывая, что $\|u^*\|_{L_p(0,\infty)} = \|u\|_{L_p(\Omega)}$ и переходя к пределу в неравенстве (10) с учетом того, что $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ не убывает и выполнено условие (3), получаем

$$\int_0^\infty (u^*)^p (v_{-1}(s))^{-p} ds \leq p \int_0^\infty (-u_s^*)(u^*)^{p-1} \Phi\, d\sigma.$$

Оценивая с помощью неравенства Гельдера, отсюда находим

$$\int_0^\infty (u^*)^p (v_{-1}(s))^{-p}\, ds \le C\int_0^\infty (-u_s^*)^p \frac{s^p}{(v_{-1}(s))^p}\, ds \le C\int_0^\infty (g(s))^p (-u_s^*)^p\, ds.$$

Неравенство (9) доказано. Докажем теперь, что

$$\int_0^\infty (-u_s^*)^p\, g(s)^p\, ds \le \int_\Omega |Du|^p\, dx. \tag{11}$$

По неравенству Гельдера

$$\frac{1}{h}\int_{\{\theta<|u|\le\theta+h\}} |Du|\, dx \le \left(\frac{1}{h}\int_{\{\theta<|u|\le\theta+h\}} dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_{\{\theta<|u|\le\theta+h\}} |Du|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Переходя к пределу при $h\to 0$, находим

$$-\frac{d}{d\theta}\int_{\{|u|\ge\theta\}} |Du|\, dx \le (-\mu'(\theta))^{(p-1)/p}\left(-\frac{d}{d\theta}\int_{\{|u|>\theta\}} |Du|^p\, dx\right)^{1/p}. \tag{12}$$

Поскольку $\Omega\in\mathfrak{U}(g)$, то

$$-\frac{d}{d\theta}\int_{\{|u|>\theta\}} |Du|\, dx \ge g(\mu(\theta)). \tag{13}$$

Объединяя (12) и (13), получаем

$$g^p(\mu(\theta))\,(-\mu'(\theta))^{-(p-1)} \le -\frac{d}{d\theta}\int_{\{|u|>\theta\}} |Du|^p\, dx. \tag{14}$$

Введем замену $\mu(\theta)=s$. Тогда п. в. $\theta=u^*(s)$ и $u_s^*=(\mu'(\theta))^{-1}$. Следовательно, интегрируя (14) в пределах от 0 до ∞, получаем (11). Объединяя теперь неравенства (8), (10) и (11), получаем (6). Далее в (6) в качестве $u(x)$ возьмем функцию $|x|^{\beta/p}u$ при достаточно малом $\beta>0$, и пусть

$$\int_\Omega |u|^p |x|^\beta dx < \infty.$$

Тогда

$$\int_\Omega |u|^p |x|^{\beta-p}\, dx \le C\int_\Omega |Du|^p |x|^\beta dx + C\beta\int_\Omega |x|^{\beta-p}|u|^p\, dx.$$

Отсюда при достаточно малом β следует неравенство

$$\int_\Omega |u|^p |x|^{\beta-p}\, dx \le C\int_\Omega |Du|^p |x|^\beta dx.$$

Таким образом, через конечное число шагов мы получим требуемое неравенство (4) при любом $\alpha\ge 0$ и $p<1/\varepsilon_0$. Второе из ограничений можно снять, если взять в неравенстве (4) в качестве u функцию $|u|^q$. Лемма 1 доказана.

Обозначим $G(\theta)\equiv G_p(\theta)=(\theta/g(\theta))^p$.

Лемма 2. *Пусть* $\Omega\in\mathfrak{U}(g)$ *и выполнено условие* (3). *Тогда для любой функции* $u\in W_p^1(\Omega)\cap L_2(\Omega)$, $p<1/\varepsilon_0$, *справедливо неравенство*

$$\|u\|_p^p \le C\,\|Du\|_p^p\, G\left((\|u\|_2/\|u\|_p)^{2p/(p-2)}\right). \tag{15}$$

Здесь обозначено $\|\cdot\|_p \equiv \|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство леммы 2 и ее обобщений содержится в работах [8, 9]. Приведем новое и более простое доказательство. Пусть

$$\mathcal{A}(k) = \{x \in \Omega;\ |u| > k\}.$$

Имеем

$$\int\limits_{\mathcal{A}(k)} (|u|-k)^p\,dx \le \int\limits_0^{\mu(k)} ((|u|-k)^p)^*\,ds = \int\limits_0^{\mu(k)} (u^*-k)^p\,ds. \tag{16}$$

Поскольку функция $s^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ монотонно не убывает, то

$$\int\limits_0^{\mu(k)} (u^*-k)^p\,ds \le G(\mu(k)) \int\limits_0^{\mu(k)} (g(s)/s)^p\,(u^*-k)^p\,ds. \tag{17}$$

Далее, справедливо одномерное неравенство Харди

$$\int\limits_0^{\infty} (g(s)/s)^p\,(u^*-k)^p\,ds \le C\int\limits_0^{\infty} g(s)^p\,(-u_s^*)^p\,ds. \tag{18}$$

Действительно, интегрируя тождество

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{(u^*-k)^p\int\limits_0^{\sigma}\left(\frac{g(s)}{s}\right)^p ds\right\} = p\,u_s^*(u^*-k)^{p-1}\int\limits_0^{\sigma}\left(\frac{g(s)}{s}\right)^p ds + (u^*-k)^p\left(\frac{g(\sigma)}{\sigma}\right)^p$$

в пределах от 0 до ∞ и применяя неравенство Гельдера, получаем (18). Из неравенств (16) – (18) и (11) выводим

$$\int\limits_{\mathcal{A}(k)} (|u|-k)^p\,dx \le CG(\mu(k))\int\limits_{\Omega} |Du|^p\,dx. \tag{19}$$

В силу неравенств

$$k^2\mu(k) \le \int\limits_{\mathcal{A}(k)} u^2\,dx, \qquad |u|^p \le C\left((|u|-k)^p + k^p\right)$$

с учетом (19) имеем

$$\int\limits_{\Omega} |u|^p\,dx \le C\left(\int\limits_{\mathcal{A}(k)} (|u|-k)^p\,dx + k^p\mu(k)\right) + k^{p-2}\int\limits_{\Omega\setminus\mathcal{A}(k)} u^2\,dx \le$$

$$\le CG\left(k^{-2}\|u\|_2^2\right)\|Du\|_p^p + Ck^{p-2}\|u\|_2^2.$$

Определяя k из равенства

$$G\left(k^{-2}\|u\|_2^2\right)\|Du\|_p^p = k^{p-2}\|u\|_2^2,$$

получаем (15). Лемма 2 доказана.

Обозначим

$$E_{p,s}(R) = \int\limits_{\Omega_R^+} (|x|-R)^s\,|u|^p\,dx, \qquad J_{p,s}(R) = \int\limits_{\Omega_R^+} (|x|-R)^s\,|Du|^p\,dx,$$

где $\Omega_R^+ = \Omega\setminus\Omega_R$. Следствием лемм 1 и 2 является неравенство

$$E_{p,s}(R) \le CJ_{p,s}(R)\,G\left((E_{2,s}(R)/E_{p,s}(R))^{2/(p-2)}E_{2,0}(R)\right). \tag{20}$$

Действительно, если возьмем в качестве функции u в (15) $u(|x|-R)^{s/p}$ при

$|x|>R$ и 0 при $|x|\le R$, то после очевидных преобразований с помощью леммы 1 получим (20). Здесь мы используем также тот факт, что неравенство (4) справедливо и для случая, если вместо Ω и $|x|^\alpha$ использовать Ω_R^+ и $(|x|-R)_+^\alpha$.

Лемма 3. *Пусть* Ω *принадлежит классу* $\mathcal{K}$. *Тогда для любых* $s\ge 0$, $p\ge\ge 2$, $R>0$, $1\le j\le m-1$, *справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega_R^+}(|x|-R)^s\,|D^j u|^p\,dx \le C\left(\int_{\Omega_R^+}(|x|-R)^s\,|D^m u|^p\,dx+\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\Omega_R^+}(|x|-R)^{(2/p)s}u^2dx\right)^{p/2}\right)^{j/m}\left(\int_{\Omega_R^+}|u|^p\,(|x|-R)^s\,dx\right)^{(m-j)/m} \tag{21}$$

при условии, что правая часть конечна.

Доказательство леммы 3 опускаем: оно по существу содержится в [10, 11].

3. Сформулируем и докажем основной результат работы. Прежде всего введем понятие решения задачи (1), (2) в D. Через W_T обозначим пространство $C([0,T);L_2(\Omega))\cap L_p((0,T);\ W_p^m(\Omega))$. Решением задачи (1), (2) в D_T назовем функцию $u(x,t)\in W_T$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\int_{D_T}u\,\eta_t\,dx\,dt+\int_{D_T}\sum_{|\alpha|=m}|D^m u|^{p-2}D^\alpha u\,D^\alpha\eta\,dx\,dt=\int_\Omega u_0\eta(x,0)\,dx \tag{22}$$

для любой функции $\eta\in W_T$ такой, что $\eta_t\in L_2(D_T)$ и $\eta(x,T)=0$. Функция $u(x,t)$ — решение задачи (1), (2) в D, если она является решением той же задачи в D_T $\forall\,T>0$. Следующие предложения приведем без доказательства, поскольку их доказательство почти такое же, как и в случае задачи Дирихле или Коши [2, 3]. Напомним, что $\operatorname{supp}u_0\in K_{R_0}$, т. е. $u_0\equiv 0$ в $\Omega_{R_0}^+$.

Предложение 1. *Решение* $u(x,t)$ *задачи* (1), (2) *в* D *существует и единственно и для п. в.* $T>0$:

$$\int_\Omega u^2(x,T)\,dx+2\int_0^T\int_\Omega|D^m u|^p\,dx\,dt=\|u_0\|_2^2.$$

Предложение 2. *Для любой функции* $\rho\in W_\infty^m(\Omega)$, $\rho\ge 0$, *справедливо равенство*

$$\int_\Omega\rho u^2(x,t_2)\,dx+2\sum_{|\alpha|=m}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega|D^m u|^{p-2}D^\alpha u\,D^\alpha(\rho u)\,dx\,dt=$$

$$=\int_\Omega\rho\,u^2(x,t_1)\,dx\qquad\forall\,t_1,t_2:\ 0\le t_1\le t_2. \tag{23}$$

Прежде чем перейти к формулировке основного результата работы, введем ряд обозначений и предположений. Обозначим

$$\Phi^{(1)}(\theta)=\theta^{(p-2)/2}G(\theta),\qquad \Phi^{(2)}(\theta)=\theta^{m/(m-1)}(\Phi_{-1}^{(1)}(\theta))^{-(p-2)/2},$$

$$\Phi^{(3)}(\theta)=(\theta\Phi_{-1}^{(2)}(\theta^{-1/(m-1)}))^{1/(m-1)},\qquad \Phi^{(4)}(\theta)=\theta^{2p/(p-2)}\Phi^{(3)}(\theta).$$

Очевидно, что $\Phi^{(1)}(\theta)$ монотонно не убывает. Будем говорить, что выполнены условия А, если функции $\Phi^{(2)}$, $\Phi^{(3)}$, $\Phi^{(4)}$ монотонно не убывают, $\Phi_{-1}^{(3)}$ — выпукла, существуют такие положительные постоянные κ_1,κ_2: $\kappa_2<1$, что

$$\Phi^{(3)}(\lambda\theta) \le \lambda^{\kappa_1}\Phi^{(3)}(\theta), \quad 0<\lambda<1,$$

функция $\theta^{\kappa_2}/\Phi^{(4)}(\theta)$ монотонно не убывает.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $w(x, t)$ — *решение задачи* (1), (2) *в* D_T, $\Omega \in \mathfrak{U}(g)$, *удовлетворяет условию* (3) *и принадлежит классу* $\mathfrak{K}$. *Тогда* $w(x, t) \equiv 0$ *в* $\Omega^+_{R(T)}$ $\forall t>0$, *где*

$$R(t) = R_0 + C\,(\Phi^{(3)}(T I_0^{(p-2)/2}))^{1/p}, \quad I_0(T) = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega |D^m u|^p\,dx\,dt.$$

Доказательство. Пусть t_1 и t_2 таковы, что $0<t_2-t_1=\Delta t<\gamma\|u_0\|_2^{-(p-2)}$, γ — достаточно малая положительная постоянная, не зависящая от t_1, t_2. Предположим, что уже доказано,что $u\equiv 0$ в $\Omega^+_{R(t_1)}\times(0, t_1)$, и докажем, что $u\equiv 0$ в $\Omega^+_{R(t_2)}\times(0, t_2)$. Положим в равенстве (23) $\rho=(|x|-R)^s$, $s>mp$ при $|x|>R$, $R>R_0$ и $\rho(x)=0$ при $|x|\le R$. Тогда получим

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_1\le t\le t_2}\int\limits_{\Omega^+(R)}(|x|-R)^s u^2\,dx+\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^s u^2(x,t)\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^s\,|D^m u|^p\,dx\,dt\le C\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R^+}\sum_{j=1}^m(|x|-R)^{s-j}|D^{m-j}u|\,|D^m u|^{p-1}\,dx\,dt. \tag{24}$$

Обозначим

$$E_s(t_1,t_2)\equiv E_{s,R}(t_1,t_2)=\operatorname*{ess\,sup}_{t_1\le t\le t_2}\int\limits_{\Omega^+(R)}(|x|-R)^s u^2(x,t)\,dx,$$

$$J_s(t)\equiv J_{s,R}(t)=\int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^s\,|D^m u|^p\,dx+\gamma\|u_0\|_2^{p-2}\int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^s\,u^2\,dx,$$

$$I_s(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}J_s(t)\,dt.$$

Обозначая правую часть в (24) через A_1 и оценивая ее по неравенству Гельдера и Юнга, получаем

$$A_1\le\varepsilon\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^s\,|D^m u|^p\,dx\,dt+C\sum_{j=1}^m\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^{s-pj}|D^{m-j}u|^p\,dx\,dt. \tag{25}$$

Таким образом, при $0<\varepsilon<1$ из (24) и (25) находим

$$E_s(t_1,t_2)+I_s(t_1,t_2)\le C\sum_{j=1}^m\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega^+(R)}|D^{m-j}u|^p(|x|-R)^{s-pj}\,dx\,dt. \tag{26}$$

Отсюда в силу неравенства Харди имеем

$$E_s(t_1,t_2)+I_s(t_1,t_2)\le C\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega^+(R)}|D^{m-1}u|^p(|x|-R)^{s-p}\,dx\,dt=A_2. \tag{27}$$

Применяя еще раз неравенство Харди, получаем

$$E_s(t_1,t_2)\le CI_s(t_1,t_2). \tag{28}$$

Далее, применяя лемму 3 к правой части (27), имеем

$$A_2 \le C\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^{s-p}\,|D^m u|^p\,dx+\left(\int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^{2(s-p)/p}u^2dx\right)^{p/2}\right)^{(m-1)/m}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^{s-p}\,|u|^p\,dx\right)^{1/m}dt. \qquad (29)$$

В силу неравенства Гельдера

$$\int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^{2(s-p)/p}u^2dx \le \left(\int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^{s-p}\,|u|^2\,dx\right)^{2/p}\left(\int\limits_{\Omega_R^+}|u|^2\,dx\right)^{(p-2)/2}. \qquad (30)$$

Из предложения 1 следует

$$\int\limits_{\Omega_R^+}|u|^2\,(x,\ t)\,dx \le \int\limits_{\Omega}u_0^2\,dx, \qquad (31)$$

поэтому из (29) – (31) вытекает

$$A_2 \le C\int\limits_{t_1}^{t_2}(J_{s-p}(t))^{(m-1)/m}(F_{s-p}(t))^{1/m}\,dt,\quad F_{s-p} = \int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^{s-p}|u|^p\,dx. \qquad (32)$$

Учитывая интерполяционное неравенство

$$\int\limits_{\Omega_R^+}|Du|^p\,(|x|-R)^{s-p}\,dx \le C\,(J_{s-p}(t))^{1/m}\,(F_{s-p}(t))^{(m-1)/m}$$

и неравенства (20 и (30), получаем

$$F_{s-p}(t) \le C\,E_{2,s-p}\,E_{2,0}^{(p-2)/2}(t)\,(\Phi_{-1}^{(1)}(CJ_{s-p}^{1/m}\,F_{s-p}^{(m-1)/m}\,(E_{2,s-p}\,E_{2,0}^{(p-2)/2})^{-1}))^{(p-2)/2},$$

$$E_{2,s} = \int\limits_{\Omega_R^+}(|x|-R)^s\,|u|^2dx.$$

Откуда вытекает

$$F_{s-p}(t) \le C\,J_{s-p}^{-1/(m-1)}(E_{2,s-p})^{m/(m-1)}\,E_{2,0}^{m(p-2)/(2(m-1))}\times$$

$$\times\ (\Phi_{-1}^{(2)}((J_{s-p}\,(E_{2,s-p}\,E_{2,0}^{(p-2)/2})^{-1})^{1/(m-1)}))^{m/(m-1)} \qquad (33)$$

Таким образом, из неравенств (27), (32) и (33) находим

$$J_s(t_1,t_2) \le C\int\limits_{t_1}^{t_2}J_{s-p}(E_{2,s-p}\,E_{2,0}^{(p-2)/2})^{1/m}\times$$

$$\times\ (\Phi_{-1}^{(2)}((J_{s-p}(E_{2,s-p}\,E_{2,0}^{(p-2)/2})^{-1})^{1/(m-1)}))^{1/(m-1)}\,dt. \qquad (34)$$

Обозначим

$$\theta = C\,E_{2,s-p}\,E_{2,0}^{(p-2)/2}\,J_{s-p}^{-1}.$$

Тогда неравенство (34) можно переписать в виде

$$\frac{I_s(t_1,\ t_2)}{I_{s-p}(t_1,\ t_2)} \le C(I_{s-p}(t_1,t_2))^{-1}\int\limits_{t_1}^{t_2}J_{s-p}\,(\theta\Phi_{-1}^{(2)}(\theta^{-1/(m-1)}))^{1/(m-1)}\,dt. \qquad (35)$$

Поскольку по предположению функция $\Phi_{-1}^{(3)}$ выпукла, то в силу неравенства Иенсена

$$\Phi_{-1}^{(3)}\left(\frac{I_s(t_1,t_2)}{I_{s-p}(t_1,t_2)}\right) \le C(I_{s-p}(t_1,t_2))^{-1}\int_{t_1}^{t_2} E_{2,s-p}E_{2,0}^{(p-2)/2}\,dt \le$$

$$\le C\int_{t_1}^{t_2} E_{2,0}^{(p-2)/2}(t)\,dt \le C(\Delta t)I_0^{(p-2)/2}(t_1,t_2). \qquad (36)$$

Здесь мы воспользовались также оценкой (28). Теперь заметим, что

$$I_{s-p}(t_1,t_2) \le I_s^{(s-p)/s}(t_1,t_2)I_0^{p/s}(t_1,t_2),\quad I_1(t_1,t_2) \le I_s^{1/s}(t_1,t_2)I_0^{(s-1)/s}(t_1,t_2). \qquad (37)$$

Следовательно, из (36) вытекает

$$\Phi_{-1}^{(3)}\left(\left(\frac{I_s(t_1,\ t_2)}{I_0(t_1,\ t_2)}\right)^p\right) \le C(\Delta t)I_0^{(p-2)/2}(t_1,t_2). \qquad (38)$$

Из неравенства (38) легко получаем

$$\Phi_{-1}^{(4)}(I_1^p(t_1,t_2)(\Delta t)^{2p/(p-2)}) \le C(\Delta t)I_0^{(p-2)/2}(t_1,t_2). \qquad (39)$$

Поскольку $-dI_1/dR = I_0$, то из (39) имеем

$$(\Phi_{-1}^{(4)}(I_1^p(\Delta t)^{2p/(p-2)}))^{2/(p-2)}(\Delta t)^{-2/(p-2)} \le -c\,(dI_1/dR)$$

или

$$\frac{d\left(I_1(\Delta t)^{2/(p-2)}\right)}{\left(\Phi_{-1}^{(4)}\left((I_1(\Delta t)^{2/(p-2)})\right)^p\right)^{2/(p-2)}} \le -c\,dR. \qquad (40)$$

Обозначая знаменатель левой части в (40) через $\psi(\theta)$, где $\theta = I_1(\Delta t)^{2/(p-2)}$, и интегрируя (40), получаем

$$\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\psi(\theta)} \le \int_0^{\theta_1}\frac{d\theta}{\psi(\theta)} - C(R-R_1). \qquad (41)$$

В силу условий А

$$\int_0^{\theta_1}\frac{d\theta}{\psi(\theta)} \le \frac{1}{(1-\kappa_2)}\frac{\theta_1}{\psi(\theta_1)}.$$

Следовательно, из (41) получаем $R_2 - R_1 \le C\theta_1/\psi(\theta_1)$ или с учетом определения функции $\Phi^{(3)}\theta$ и оценки (39)

$$R(t_2) \le R(t_1) + C(\Phi^{(3)}(\Delta t\, I_0^{(p-2)/2}))^{1/p}. \qquad (42)$$

Разобьем интервал $(0,T)$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ так, чтобы выполнялось условие

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \le \sigma^i T, \quad i = 1,\ldots,N, \quad 0 < \sigma T < \min\{1, \gamma\|u_0\|_0^{-(p-2)}\}.$$

Тогда, применяя последовательно неравенство (42), получаем

$$R(T) \le R_0 + C\sum_{j=1}^{N}(\Phi^{(3)}(\sigma^j T I_0^{(p-2)/2}))^{1/p} \le R_0 + C\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sigma^{j\kappa_1/p}\right)(\Phi^{(3)}(T I_0^{(p-2)/2}))^{1/p}.$$

Теорема доказана.

Приведем примеры. Пусть

$$\Omega \in \mathfrak{U}(g), \quad g(v) \ge \min\{cv^{1-\epsilon_0},\ cv^{1-\alpha_0}\}; \quad 1/n \le \alpha_0 \le 1.$$

Тогда при достаточно больших $T > 0$

$$R(T) \le R_0 + CT^{\frac{2\alpha_0}{p-2+2mp\alpha_0}} (I_0(T))^{\frac{(p-2)\alpha_0}{p-2+2mp\alpha_0}}.$$

Показатели при T, I_0, $\alpha_0 = 1/n$ переходят в показатели баренблатовского типа и были получены в работах [2, 3].

Пусть $m = 1$, тогда в теореме в качестве $R(t)$ можно использовать $R(t) = R_0 + C\Phi(T I_0^{(p-2)/2})$, где $\Phi(s) = s(\Phi_{-1}^{(1)}(s^{-1}))^{(p-2)/2}$.

Поскольку при $m = 1$ имеет место закон сохранения $\| u_0 \|_1 = \| u(x, t) \|_1$ для п. в. $t > 0$ [12], то в случае $\operatorname{supp} u_0 \in K_{R_0}$, $u_0 \geqslant 0$.

$$\| u_0 \|_1 \le M(t) v(R(t)), \quad M(t) = \operatorname{ess} \sup_{\Omega} | u(x, t) |.$$

Следовательно,

$$M(t) \ge \| u_0 \|_1 (v(R(t)))^{-1}. \tag{43}$$

С другой стороны, для задачи (1), (2) при $m = 1$ легко получить оценку

$$2 \int_t^{2t} \int_\Omega | Du |^p \, dx \, dt \le \int_\Omega u^2(x, t) \, dx \qquad \forall t > 0. \tag{44}$$

Далее, как показано в работе [12],

$$\int_\Omega u^2(x, t) \, dx \le C \| u_0 \|_1 (J_{-1}(t \| u_0 \|_1^{p-2}))^{-1},$$

где $J(s) = s^{p-2} G(s)$. Таким образом, в качестве $R(t)$ при достаточно больших $t > 0$ можно использовать

$$\tilde{R}(t) = C\Phi(t \| u_0 \|_1^{(p-2)/2} (J_{-1}(t \| u_0 \|_1^{p-2}))^{-(p-2)/2}).$$

В заключение отметим, что результаты данной работы легко переносятся на уравнения высокого порядка с двойной нелинейностью и с абсорбацией [2, 3].

1. *Гущин А. К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1973. – **126**. – С.5 – 45.
2. *Bernis F.* Qualitative properties for some nonlinear higher degenerate parabolic equations. – IMA. Preprint 184, Univ. Minnesote. – 1985.
3. *Bernis F.* Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. – 1986. – **104**. – P. 1 – 19.
4. *Антонцев С. Н.* О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1981. – **260**, № 6.– С. 1289 – 1293.
5. *Diaz T. L., Veron L.* Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations // Trans. Amer. Math. Soc. –1985. – **290**, № 2. – P. 787 – 814.
6. *Тедеев А. Ф.* Качественные свойства решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения четвертого порядка // Тез. докл. VII Респ. конф. г. Донецк, 1991. – 111 с.
7. *Talenti G.* Linear Elliptic P. D. E's: Level sets, rearrangements and apriori estimates of solutions // Boll. Unione. mat. ital. – 1985. – **B4**, № 3. – P. 918 – 949.
8. *Тедеев А. Ф.* Стабилизация решения третьей смешанной задачи для квазилинейных параболических уравнений второго порядка в нецилиндрической области // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 1. – С. 63 – 73.
9. *Тедеев А. Ф.* О мультипликативных неравенствах в областях с некомпактной границей // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 260 – 268.
10. *Brown R. C., Hinton D. B.* Weighted interpolation-inequalities of sum and product form in R^n // Proc. London Math. Soc. – 1988. – **56**, № 2. – P.261 – 280.
11. *Glushak A. V., Transirico M., Troisi M.* Teoremi di immersione ed equazioni ellittiche in aperti non limitati // Rend. mat. e appl. – 1986. –**9**, № 1. – P. 113 – 130.
12. *Тедеев А. Ф.* Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 10. – С. 1795 – 1806.

Получено 26. 04. 93