УДК 519. 21

А. С. Чани, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

The family of subalgebras that describe the space of complex-valued 2×2 matrices is selected. In this space, the stochastic semigroup $Y_n = X_n X_{n-1} \ldots X_1$, $n = \overline{1, \infty}$, is considered, where $\{X_i, i = \overline{1, \infty}\}$ are independent equally distributed random matrices taking two values. For the stochastic semigroup Y_n, whose phase space belongs to one of the subalgebras, the index of exponential growth is calculated explicitly.

Виділяється сім'я підалгебр, які описують простір комплекснозначних матриць розміром 2×2. У цьому просторі розглядається стохастична півгрупа $Y_n = X_n X_{n-1} \ldots X_1$, $n = \overline{1, \infty}$, де $\{X_i, i = \overline{1, \infty}\}$ — незалежні однаково розподілені випадкові матриці, що набувають двох значень. Для стохастичної півгрупи Y_n, фазовий простір якої належить до однієї з підалгебр, у явному вигляді обчислюється показник експоненціального зростання.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ определена последовательность случайных матриц $\{X_n, n = \overline{1, \infty}\}$ размера 2×2 с элементами из поля комплексных чисел C. В настоящей работе изучается асимптотическое поведение произведений $Y_n = X_n X_{n-1} \ldots X_1$, $n = \overline{1, \infty}$, в предположении, что сомножители независимы и имеют распределение Бернулли: для каждого $n \geq 1$

$$P\{X_n = A\} = p, \quad P\{X_n = B\} = q = 1 - p, \tag{1}$$

где A и B — элементы пространства $L(C^2)$.

Асимптотическое поведение последовательности Y_n характеризуется показателем экспоненциального роста

$$\kappa = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln \| Y_n \| \quad (\mathrm{mod}\, P),$$

где $\| \cdot \|$ — операторная норма в $L(C^2)$.

Существование величины κ обеспечивается условием [1]

$$M \ln^+ \| Y_n \| < \infty.$$

Задача вычисления показателя κ в терминах элементов матриц A и B в общем виде не решена. Поэтому представляет интерес умение вычислять κ для различных конкретных классов матриц A и B. Ряд таких результатов получен в работе [2]. В частности, там вычислен показатель κ для схемы Бернулли (1) при условиях

1) A — произвольная матрица из $L(C^2)$;

2) B — вырожденная матрица из $L(C^2)$.

В этом случае показатель экспоненциального роста полугруппы $\{Y_n, n = \overline{1, \infty}\}$ имеет вид

$$\kappa = q^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^k \ln | \mathrm{Sp}\,(BA^k) |.$$

В настоящей работе найден новый класс матриц из пространства $L(C^2)$, являющийся фазовым пространством полугруппы $\{Y_n, n = \overline{1, \infty}\}$, и вычислен показатель экспоненциального роста этой полугруппы в явном виде.

Для изложения основного результата нам понадобятся вспомогательные утверждения, которые сформулируем в виде лемм.

Пусть E — единичная матрица, $\operatorname{diag}(c_1, c_2)$ — диагональная матрица, W — матрица, у которой все элементы равны единице: $W_{ij} = 1$, $i, j = 1, 2$.

Лемма 1. *Произвольную матрицу A из пространства $L(C^2)$ можно представить в виде*

$$A = \lambda E + \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2) W \operatorname{diag}(a_1, a_2), \tag{2}$$

где $\lambda \in C$, а векторы (α_1, α_2) и (a_1, a_2) принадлежат пространству C^2.

Доказательство. Пусть A — произвольная матрица из $L(C^2)$ и λ — одно из ее собственных чисел. Тогда матрица $A - \lambda E$ вырождена и для доказательства леммы достаточно показать, что любую вырожденную матрицу B из $L(C^2)$ можно записать в виде

$$B = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2) W \operatorname{diag}(a_1, a_2). \tag{3}$$

Если матрица B — нулевая, то результат очевиден. Предположим теперь, что матрица B — ненулевая и $b_{i_1 j_1}$ — один из ее ненулевых элементов, $i_1, j_1 \in \{1, 2\}$. В силу вырожденности матрицы B элемент $b_{i_2 j_2}$, стоящий на одной диагонали с элементом $b_{i_1 j_1}$, равен $b_{i_2 j_2} = b_{i_1 j_1}^{-1} b_{i_2 j_1} b_{i_1 j_2}$.

Теперь перепишем равенство (3) поэлементно

$$b_{i_1 j_1} = \alpha_{i_1} a_{j_1}, \quad b_{i_1 j_2} = \alpha_{i_1} a_{j_2},$$

$$b_{i_2 j_1} = \alpha_{i_2} a_{j_1}, \quad b_{i_1 j_1}^{-1} b_{i_2 j_1} b_{i_1 j_2} = \alpha_{i_2} a_{j_2}.$$

Отсюда видно, что векторы (α_1, α_2) и (a_1, a_2) можно определить, например, так:

$$\alpha_{i_1} = 1, \quad \alpha_{i_2} = b_{i_1 j_1}^{-1} b_{i_2 j_1},$$

$$a_{j_1} = b_{i_1 j_1}, \quad a_{j_2} = b_{i_1 j_2}.$$

Лемма доказана.

Используя представление (2), введем следующие классы матриц. Для произвольного ненулевого вектора (α_1, α_2) из пространства C^2 положим

$$\mathfrak{A}(\alpha_1, \alpha_2) = \{\lambda E + \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2) W \operatorname{diag}(a_1, a_2);\ \lambda; a_1, a_2 \in C\}.$$

Легко видеть, что если векторы (α_1, α_2) и (α_1', α_2') — коллинеарны, т. е. $(\alpha_1, \alpha_2) = \mu(\alpha_1', \alpha_2')$ и $\mu \neq 0$, то

$$\mathfrak{A}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathfrak{A}(\alpha_1', \alpha_2').$$

Это говорит о том, что мы имеем на самом деле не двупараметрическое семейство классов матриц $\{\mathfrak{A}(\alpha_1, \alpha_2); \alpha_1, \alpha_2 \in C\}$, а однопараметрическое, которое состоит из классов $\{\mathfrak{A}(0, 1), \mathfrak{A}(1, \alpha); \alpha \in C\}$. Тем не менее в дальнейшем удобно придерживаться двупараметрической записи рассматриваемого семейства матриц, которое обозначим

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}(\alpha_1, \alpha_2);\ \alpha_1, \alpha_2 \in C\}.$$

Лемма 2. *Произвольный класс матриц $\mathfrak{A}(\alpha_1, \alpha_2)$ из семейства $\mathfrak{A}$ образует алгебру.*

Действительно, если

$$A = \lambda E + \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2) W \operatorname{diag}(a_1, a_2),$$

$$B = \mu E + \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2) W \operatorname{diag}(b_1, b_2) \tag{4}$$

— произвольные матрицы из класса $\mathfrak{A}(\alpha_1, \alpha_2)$, то прямыми вычислениями получаем

$$A + B = (\lambda + \mu)E + \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2) W \operatorname{diag}(a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$AB = \lambda\mu E + \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2) W \operatorname{diag}(\mu a_1 + (\lambda + \tag{5}$$

$$+ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) b_1, \mu a_2 + (\lambda + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) b_2).$$

При этом, если $|A| \neq 0$, то

$$A^{-1} = \lambda^{-1} E + \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2) W \operatorname{diag}(-a_1 |A|^{-1}, -a_2 |A|^{-1}).$$

В последнем равенстве следует учесть, что

$$|A| = \lambda(\lambda + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2),$$

где λ и $\lambda + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ — собственные числа матрицы A.

Из формулы (5) вытекает

$$A(B - \mu E) = (\operatorname{Sp} A - \lambda)(B - \mu E). \tag{6}$$

Это важное соотношение будет использовано в дальнейшем.

Приведем теперь основной результат.

Теорема. *Пусть в схеме Бернулли* (1) *матрицы* A *и* B (4) *принадлежат произвольному классу* $\mathfrak{A}(\alpha_1, \alpha_2)$ *из семейства* $\mathfrak{A}$ *и обе — невырождены. Тогда показатель экспоненциального роста стохастической полугруппы* Y_n *имеет вид*

$$\kappa = (p \ln|\lambda| + q \ln|\mu|) \vee (p \ln|\operatorname{Sp} A - \lambda| + q \ln|\operatorname{Sp} B - \mu|).$$

Доказательство. В силу сделанных предположений для каждого $i = \overline{1, \infty}$

$$X_i = \lambda_i E + \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2) W \operatorname{diag}(X_1^i, X_2^i).$$

Пусть $\tilde{X}_i = X_i - \lambda_i E$, $i = \overline{1, \infty}$. Тогда

$$Y_n = (\lambda_n E + \tilde{X}_n)(\lambda_{n-1} E + \tilde{X}_{n-1}) \ldots (\lambda_1 E + \tilde{X}_1). \tag{7}$$

Разлагая правую часть равенства (7) в сумму по степеням матриц $\{\tilde{X}_i, i = \overline{1, n}\}$, получаем

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i E + \sum_{i=1}^{n} \prod_{k \neq i} \lambda_k \tilde{X}_i + \sum_{j>i} \prod_{k \neq j,i} \lambda_k \tilde{X}_j \tilde{X}_i + \ldots$$

$$\ldots + \tilde{X}_n \tilde{X}_{n-1} \ldots \tilde{X}_1 = \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{I}_i. \tag{8}$$

Теперь, используя соотношение (6), слагаемое второго порядка записываем в виде

$$\mathfrak{I}_2 = \sum_{j>i} \prod_{k \neq j,i} \lambda_k \tilde{X}_j \tilde{X}_i = \sum_{j>i} \prod_{k \neq j,i} \lambda_k \operatorname{Sp}(\tilde{X}_j) \tilde{X}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \Big\{ \sum_{j>i} \prod_{\substack{k>i \\ k \neq j}} \lambda_k \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_j) \Big\} \prod_{k<i} \lambda_k \tilde{X}_i .$$

Аналогичным образом можно представить слагаемое третьего порядка

$$\mathfrak{J}_3 = \sum_{k>j>i} \prod_{l \neq k,j,i} \lambda_l \tilde{X}_k \tilde{X}_j \tilde{X}_i = \sum_{k>j>i} \prod_{l \neq k,j,i} \lambda_l \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_k) \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_j) \tilde{X}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-2} \Big\{ \sum_{k>j>i} \prod_{\substack{l>i \\ l \neq k,j}} \lambda_l \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_k) \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_j) \Big\} \prod_{l<i} \lambda_l \tilde{X}_i$$

и все последующие — вплоть до последнего

$$\mathfrak{J}_n = \prod_{k=2}^{n} \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_k) \tilde{X}_1 .$$

Подставляя в (8) полученные выражения для $\mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \ldots, \mathfrak{J}_n$, находим

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i E + \sum_{i=1}^{n} \prod_{k \neq i} \lambda_k \tilde{X}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \Big\{ \sum_{j>i} \prod_{\substack{k>i \\ k \neq j}} \lambda_k \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_j) \Big\} \prod_{k<i} \lambda_k \tilde{X}_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \Big\{ \sum_{k>j>i} \prod_{\substack{l>i \\ l \neq k,j}} \lambda_l \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_k) \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_j) \Big\} \prod_{l<i} \lambda_l \tilde{X}_i + \ldots + \prod_{k=2}^{n} \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_k) \tilde{X}_1 .$$

Теперь в правой части этого равенства приведем подобные члены :

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i E + \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \prod_{k>i} \lambda_k + \sum_{j>i} \prod_{\substack{k>i \\ k \neq j}} \lambda_k \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_j) +$$

$$+ \sum_{k>j>i} \prod_{\substack{l>i \\ l \neq k,j}} \lambda_l \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_k) \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_j) + \ldots + \prod_{k>i} \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_k) \Big\} \prod_{k<i} \lambda_k \tilde{X}_i .$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, есть ни что иное как $\prod_{k>i} (\lambda_k + \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_k))$, поэтому окончательно имеем

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i E + \sum_{i=1}^{n} \prod_{k>i} (\lambda_k + \mathrm{Sp}\,(\tilde{X}_k)) \prod_{k<i} \lambda_k \tilde{X}_i =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i E + \sum_{i=1}^{n} \prod_{k>i} (\mathrm{Sp}\,(X_k) - \lambda_k) \prod_{k<i} \lambda_k (X_i - \lambda_i E). \tag{9}$$

Из полученного соотношения видно, что матрица $Y_n - \prod_{i=1}^{n} \lambda_i E$ вырождена, поэтому $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ — одно из собственных чисел матрицы Y_n. Другим собственным числом матрицы Y_n является

$$\mathrm{Sp}\,(Y_n) - \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{i=1}^{n} \prod_{k>i} (\mathrm{Sp}\,(X_k) - \lambda_k) \prod_{k<i} \lambda_k (\mathrm{Sp}\,(X_i) - 2\lambda_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{Sp}(X_i) - \lambda_i).$$

Введем следующие величины:

$$\varphi_1^n = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|, \quad \varphi_2^n = \prod_{i=1}^{n} |\mathrm{Sp}(X_i) - \lambda_i|.$$

Тогда в силу неравенств Г. Вейля [3, с. 158]

$$\varphi_1^n \vee \varphi_2^n \le \| Y_n \|, \quad n = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Отсюда по усиленному закону больших чисел имеем

$$\kappa \ge \varphi_1 \vee \varphi_2 \pmod P, \tag{10}$$

где

$$\varphi_1 = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln \varphi_1^n = M \ln |\lambda_1|,$$

$$\varphi_2 = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln \varphi_2^n = M \ln |\mathrm{Sp}(X_1) - \lambda_1|.$$

С другой стороны, с вероятностью единица для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$

$$\exp\{(\varphi_i - \varepsilon) n\} \le \varphi_i^n \le \exp\{(\varphi_i + \varepsilon) n\}, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Применим (9) и (11) для оценки $\| Y_n \|$ сверху. Пусть

$$K(\varepsilon) = \left\| \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \prod_{k>i} (\mathrm{Sp}(X_k) - \lambda_k) \prod_{k<i} \lambda_k (X_i - \lambda_i E) \right\|.$$

Тогда с вероятностью единица для всех $n > N(\varepsilon)$

$$\| Y_n \| \le \exp\{(\varphi_1 + \varepsilon) n\} + \sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{n} \exp\{\varphi_2 (n - i) + 2\varepsilon n\} \times$$

$$\times \exp\{(\varphi_1 + \varepsilon)(i - 1)\} \| X_i - \lambda_i E \| + K(\varepsilon) \le$$

$$\le [(\exp\{[(\varphi_1 \vee \varphi_2) + 3\varepsilon] n\}) \vee K(\varepsilon)] \, [1 + \sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{n} \| X_i - \lambda_i E \|].$$

Из полученной оценки и усиленного закона больших чисел следует

$$\kappa \le \varphi_1 \vee \varphi_2 \pmod P. \tag{12}$$

Таким образом, из неравенств (10) и (12) заключаем, что

$$\kappa = (M \ln |\lambda_1|) \vee (M \ln |\mathrm{Sp}(X_1) - \lambda_1|).$$

Теорема доказана.

1. *Furstenberg H., Kesten H.* Products of random matrices // Ann. Math. Statist. – 1960. – **31**. – P. 457 – 469.
2. *Chani A. S.* Asimptotic behaviour of products of some classes of random matrices in the Bernoulli scheme // Random Oper. Stoch. Eqs. – 1992. – **1**, № 3. – P. 19 – 24.
3. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М.: Наука, 1972. – 232 с.

Получено 26. 04. 93