УДК 517.947.5.37

И. Г. Извеков, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т),
Е. В. Мартыненко, ассист. (Сум. пед. ин-т)

О КЛАССАХ ЖЕВРЕ НЕКОТОРЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ *

Classical spaces of ultra-differentiable functions on $[-1, 1]$ are compared with the Gevrais classes of a self-adjoint differentiable operator whose eigenfunctions are the orthogonal Jacobi polynomials.

Класичні простори ультрадиференційовних функцій на $[-1; 1]$ порівнюються з класами Жевре самоспряженого диференціального оператора, власними функціями якого є ортогональні поліноми Якобі.

Один из общих методов теории ортогональных рядов основан на том, что ортонормированная система функций в гильбертовом пространстве понимается как базис из собственных векторов некоторого самосопряженного оператора A. При этом вопросы сходимости и суммируемости естественно изучать в различных пространствах, порождаемых оператором A (например, в [1] показано, что такой подход приводит к большому числу классических результатов из теории тригонометрических рядов Фурье и граничных значений гармонических функций). В связи с этим возникает задача сравнения пространств, построенных по оператору A, с классическими функциональными пространствами. В этой работе такая задача решается для пространств Жевре, порождаемых на отрезке $[-1, 1]$ дифференциальным оператором, собственными векторами которого являются классические полиномы Якоби.

1. Пусть $I = [a, b] \subset R^1$, $\gamma > 0$. Для каждого $B > 0$ обозначим через $G_{\gamma, B}(I)$ множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, $x \in I$, удовлетворяющих при некотором $c > 0$ условию

$$\left| \frac{d^q}{dx^q} f(x) \right| \leq cB^q q^{q\gamma} \quad (q = 0, 1, \dots).$$

В пространстве $G_{\gamma,B}(I)$ вводится норма $\|\cdot\|_{\gamma,B}$:

$$\|f\|_{\gamma,B} = \sup_{x \in I,\ q = 0, 1, \dots} \left| \frac{d^q}{dx^q} f(x) B^{-q} q^{-q\gamma} \right|.$$

Легко видеть, что $G_{\gamma,B}(I)$ с нормой $\|\cdot\|_{\gamma,B}$ — банахово пространство и $G_{\gamma,B_1}(I) \subset G_{\gamma,B_2}(I)$ при $0 < B_1 < B_2$. Пространством ультрадифференцируемых функций класса Жевре типа Румье (типа Берлинга) на I называется индуктивный (проективный) предел пространств $G_{\gamma,B}(I)$:

$$\lim_{B \to +\infty} \operatorname{ind} G_{\gamma,B}(I) = G_{\{\gamma\}}(I), \qquad \lim_{B \to 0+} \operatorname{pr} G_{\gamma,B}(I) = G_{(\gamma)}(I).$$

Классы Жевре, очевидно, замкнуты относительно операции дифференцирования, т. е. из $f(x) \in G_{\{\gamma\}}(I)$ $(G_{(\gamma)}(I))$ следует $f'(x) \in G_{\{\gamma\}}(I)$ $(G_{(\gamma)}(I))$. Отметим, что $G\{1\}(I)$ совпадает с множеством всех функций, аналитических на I.

Далее, пусть

$$L_s = \alpha_1(x) \frac{d}{dx} \alpha_2(x) \frac{d}{dx} \dots \alpha_s(x) \frac{d}{dx} \qquad (s \in N)$$

— дифференциальная операция с коэффициентами $\alpha_i(x) \in G_{\{\gamma\}}(I)$, $i = 1, \dots, s$ (если же L_s применяется к функциям из класса $G_{(\gamma)}(I)$, то предполагается, что $\alpha_i(x) \in G_{(\gamma)}(I)$). Докажем основную лемму.

* Работа частично финансирована фондом фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по науке и технологиям, проект 1 / 238 „Оператор".

Лемма. 1) *Если* $f(x) \in G_{\{\gamma\}}(I)$ $(G_{(\gamma)}(I))$, *то существуют константы* $\tilde{c}$, $\tilde{B} > 0$ *(для каждого* $\tilde{B} > 0$ *существуют* $\tilde{c} = \tilde{c}(\tilde{B}) > 0$*) такие, что*

$$| L_s^q f(x)| \leq \tilde{c} \tilde{B}^q q^{qs\gamma} \quad (q = 0, 1, \dots). \tag{1}$$

2) *При условии* $\alpha_i(x) \geq \delta > 0$ $(i = 1, 2, \dots, s)$ *справедливо обратное утверждение: если бесконечно дифференцируемая на* I *функция* $f(x)$ *удовлетворяет* (1) *при некоторых* $\tilde{B}$, $\tilde{c} > 0$ *(при каждом* $\tilde{B}$*), то* $f(x) \in G_{\{\gamma\}}(I)$ $(G_{(\gamma)}(I))$.

Доказательство. Для упрощения записи проведем рассуждения в случае $s = 1$, $L_1 = L = d\alpha(x)/dx$.

1) Пусть $f(x) \in G_{\{\gamma\}}(I)$. Тогда существуют $c, B > 0$ такие, что для всех $x \in \in I$, $q = 0, 1, \dots$

$$\left| \frac{d^q}{dx^q} f(x) \right| \leq cB^q q^{q\gamma}, \quad \left| \frac{d^q}{dx^q} \alpha(x) \right| \leq cB^q q^{q\gamma}. \tag{2}$$

Рассмотрим выражение $L^q f(x)$, полученное последовательным q-кратным применением к функции $f(x)$ операции L. Легко видеть, что при формальном выполнении этих действий (без приведения подобных слагаемых после каждого шага) рассматриваемое выражение представимо в виде суммы слагаемых вида

$$\prod_{k=1}^{q-1} \frac{d^{p_k}}{dx^{p_k}} \alpha(x) \frac{d^{p_q}}{dx^{p_q}} f(x),$$

где $p_j = \{0, 1, \dots, q\}$, $j = 1, 2, \dots, q$, $p_1 + p_2 + \dots + p_q = q$. Набор чисел $(p_1, p_2, \dots, p_q)$ назовем индексом соответствующего слагаемого. Применение элементарной комбинаторной формулы показывает, что число различных индексов не превышает $C_{2q+1}^q \leq 2^{2q+1}$. Очевидно также, что число слагаемых, имеющих одинаковый индекс, не превышает $C_q^{p_1} C_{q-p_1}^{p_2} \dots C_{q-p_1-\dots-p_{q-2}}^{p_{q-1}} = q!/p_1!p_2! \dots p_q!$. Следовательно, сумма таких слагаемых с учетом (2) не превышает по модулю $(q!/p_1!p_2! \dots p_q!)\, c^q B^q p_1^{p_1\gamma} p_2^{p_2\gamma} \dots p_q^{p_q\gamma}$. Так как по формуле Стирлинга $\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+1}$, то последнее выражение не превышает

$$\frac{\sqrt{2\pi q}\, e^{-q+1} q^q}{e^{-p_1} e^{-p_2} \dots e^{-p_q} p_1^{p_1} p_2^{p_2} \dots p_q^{p_q}} c^q B^q p_1^{p_1\gamma} p_2^{p_2\gamma} \dots p_q^{p_q\gamma} \leq e\,(2cB)^q q^{q\gamma} \sqrt{2\pi q}.$$

Суммируя сказанное выше, получаем для $x \in I$, $q = 0, 1, \dots$ $| L^q f(x)| \leq \leq 2\sqrt{2\pi}\, e\,(16cB)^q q^{q\gamma}$, т. е. утверждение 1 леммы справедливо при $\tilde{c} = 2\sqrt{2\pi}\, e$, $\tilde{B} = 16\,cB$. Случай $f(x) \in G_{(\gamma)}(I)$ рассматривается аналогично.

2) Пусть $\alpha(x) \geq \delta > 0$ и функция $f(x)$ удовлетворяет условию: существуют $\tilde{B}$, $\tilde{c} > 0$ такие, что $|L^q f(x)| \leq \tilde{c}\, \tilde{B}\, q^{q\gamma}$ $(q = 0, 1, \dots)$. Оценим производные $f^{(q)}(x)$, используя систему уравнений

$$\begin{cases} f' & = a^{-1} L f \\ a_{21} f' & = a^{-2} L^2 f, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{k1} f' + \dots + a_{km} f^{(m)} + \dots + f^{(k)} & = a^{-k} L^k f, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{q1} f' + a_{q2} f'' + \dots + f^{(q)} & = a^{-q} L^q f. \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, коэффициент $a_{km} = a_{km}(x)$, $k = 1, 2, \dots, q$, $m = 1, 2, \dots, k$, этой системы представляется суммой слагаемых вида

$$\alpha^{m-k} \frac{d^{p_1}\alpha}{dx^{p_1}} \dots \frac{d^{p_{k-m}}\alpha}{dx^{p_{k-m}}},$$

где $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k-m} p_i = k - m$. Используя рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве первой части леммы, получаем оценку

$$|a_{km}(x)| \leq c_1 \delta^{m-k} B_1^{k-m} (k-m)^{(k-m)\gamma}, \tag{4}$$

где константы c_1, B_1 не зависят от k и m. Далее, из системы (3) по формуле Крамера получаем

$$f^{(q)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & \alpha^{-1}Lf \\ & \ddots & & & \\ a_{21} & 1 & 0 & & \alpha^{-2}L^2 f \\ & & \ddots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \ddots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & 1 & & \alpha^{-k}L^k f \\ & & & \ddots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{qk} & a_{q,k+1} & & a_{q,q-1} & \alpha^{-q}L^q f \end{vmatrix}$$

Раскладывая этот определитель по элементам последнего столбца, получаем сумму q слагаемых вида

$$\pm \frac{1}{\alpha^k} L^k f \begin{vmatrix} a_{k+1,k} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k+2,k} & a_{k+2,k+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{qk} & a_{q,k+1} & \dots & \cdots & a_{q,q-1} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

По индукции получается, что множитель-определитель в (5) есть сумма 2^{q-k} слагаемых вида $\pm a_{k+1, j_{k+1}} a_{k+2, j_{k+2}} \dots a_{qj_q}$, где $(k + 1 - j_{k+1}) + (q - j_q) \leq q - k$. Отсюда, учитывая (4), получаем для $x \in I$, $q = 0, 1, \dots$

$$|f^{(q)}(x)| \leq \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\delta^k} \tilde{c}\, \tilde{B}\, k^{k\gamma} 2^{q-k} \frac{1}{\delta^{q-k}} B_1^{q-k} (q-k)^{(q-k)\gamma} \leq \tilde{c} \left(\frac{4\tilde{B}B_1 c_1}{\delta} \right)^q q^{q\gamma}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что $f(x) \in G_{\{\gamma\}}(I)$. Случай, относящийся к классу $G_{(\gamma)}(I)$, рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Замечание. Как видно из доказательства, утверждение 1 леммы сохраняет силу в случае, когда дифференциальная операция имеет вид $L_s = L_p + L_r$, где $\max\{p, r\} = s$.

2. Обозначим $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1)$, L_w^2 — гильбертово пространство всех функций $f(x)$, $x \in [-1, 1]$, для которых

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 w(x)\, dx < \infty,$$

со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) w(x) dx$. Пусть A — дифференциальный оператор в L_w^2, порожденный дифференциальным выражением

$$l[\;](x) = -\frac{1}{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}\right]$$

с областью определения

$D(A) = \{f(x) \in L_w^2$: $(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}df/dx$ абсолютно непрерывна, $(d/dx)[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}df/dx] \in L^2_{(-1,1)}$, $\lim\limits_{x\to\pm1}\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}df/dx\} = 0\}$.

Известно [2], что A — самосопряженный неотрицательный оператор; при этом последовательность полиномов Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}],$$

$\alpha > -1$, $\beta > -1$, $n = 0, 1, \ldots$, образует ортогональный в L_w^2 базис собственных векторов оператора A с соответствующими собственными числами $\mu_n = n(n + \alpha + \beta + 1)$ [3].

Следуя [1], обозначим $\mathfrak{G}_B\langle q^{q\gamma}\rangle$ $(B > 0,\ \gamma > 0)$ банахово пространство всех функций $f(x) \in L_w^2$, для которых определены и конечны величины (нормы) $\sup\limits_{x\in[-1,1],\, q=0,1,\ldots} |A^q f(x)| B^{-q} q^{-q\gamma}$. Пространства $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A) = \lim\limits_{B\to\infty}\operatorname{ind}\mathfrak{G}_B\langle q^{q\gamma}\rangle$, $\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A) = \lim\limits_{B\to 0+}\operatorname{pr}\mathfrak{G}_B\langle q^{q\gamma}\rangle$ называются классами Жевре типа Румье и Берлинга соответственно, порожденными оператором A. Если $f(x) \in L_w^2$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, где

$$f_n = \frac{1}{\rho_n}\langle f, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle,\quad \rho_n = \left\|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\|^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\,n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

называется рядом Фурье – Якоби функции $f(x)$. Из результатов [1] следует, что классы $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ и $\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$ можно определить и в терминах коэффициентов Фурье – Якоби их элементов. А именно: $f(x) \in \mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ $(\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A))$ тогда и только тогда, когда существуют $\mu > 0$, $c > 0$ (для каждого $\mu > 0$ существует $c = c(\mu) > 0$) такие, что

$$|f_n| \le c e^{-\mu n^{2/\gamma}} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6}$$

Следующая теорема устанавливает связь между классами Жевре оператора A и пространствами ультрадифференцируемых функций, введенными в п. 1.

Теорема. 1. *Для любого* $\gamma > 0$ $G_{\{\gamma\}}([-1, 1]) \subset \mathfrak{G}_{\{2\gamma\}}(A)$, $G_{(\gamma)}([-1, 1]) \subset \mathfrak{G}_{(2\gamma)}(A)$.

2. *Для любого* $\gamma \le 1$ $G_{\{\gamma\}}([-1, 1]) = \mathfrak{G}_{(2\gamma)}(A)$, $G_{(\gamma)}([-1, 1]) = \mathfrak{G}_{\{2\gamma\}}(A)$.

3. *Для любого* $\gamma \ge 1$ $I = [a, b] \subset (-1, 1)$: $\mathfrak{G}_{\{2\gamma\}}(A) \subset G_{\{\gamma\}}(I)$.

Доказательство. Утверждение 1 и аналогичные вложения в утверждении 2 являются следствием утверждения 1 леммы (и замечания к ней) и представления оператора Якоби в виде $A = (x^2 - 1)d^2/dx^2 - (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)\,d/dx$. Утверждение 3 вытекает из утверждения 2 леммы и того факта, что функция $(1-x)^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}$ положительна на любом отрезке $I = [a, b] \subset (-1, 1)$ и принадлежит пространству $G_{\{\gamma\}}(I)$ при $\gamma \ge 1$. Таким образом, остается показать, что при $\gamma \le 1$ $\mathfrak{G}_{\{2\gamma\}}(A) \subset G_{\{\gamma\}}([-1, 1])$, $\mathfrak{G}_{(2\gamma)}(A) \subset G_{(\gamma)}([-1, 1])$. Пусть $f(x) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \in \mathfrak{G}_{\{2\gamma\}}(A)$; тогда в силу (6) $|f_n| \le c e^{-\mu n^{1/\gamma}}$ $(n = 0, 1, \dots)$ для некоторых c, $\mu > 0$. Достаточно проверить существование константы $B_1 > 0$, для которой

$$\left| \frac{d^q}{dx^q} f(x) \right| \left(B_1^q q^{q\gamma} \right)^{-1} \le c_1 < \infty \tag{7}$$

при достаточно больших q. Используя формулу дифференцирования полиномов Якоби [3], получаем

$$\frac{d^q}{dx^q} f(x) = \sum_{n=q}^{\infty} f_n \frac{d^q}{dx^q} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \sum_{n=q}^{\infty} 2^{-q} f_n (n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta) \dots (n+\alpha+\beta+2-q)\, P_{n-q}^{(\alpha+q,\,\beta+q)}(x).$$

Можно считать, что $\alpha \ge \beta$, тогда при $q \ge 1$ [4]

$$| P_{n-q}^{(\alpha+q,\,\beta+q)}(x) | \le | P_{n-q}^{(\alpha+q,\,\beta+q)}(1) | = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n-q)!\,\Gamma(\alpha+q+1)}.$$

Далее, если $q > [\alpha] + \beta + 1$, $n \ge q$, то

$$(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta) \dots (n+\alpha+\beta+2-q) \le (2n)^q,$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n-q)!\,\Gamma(\alpha+q+1)} \le \frac{(2n)^{[\alpha]+1} n!}{(n-q)!\,q!},$$

что позволяет записать формальную оценку

$$\left| \frac{d^q}{dx^q} f(x) \right| B_1^{-q} q^{-q\gamma} \le c \sum_{n=q}^{\infty} \frac{e^{-\mu n^{1/\gamma}} (2n)^q (2n)^{[\alpha]+1} n!}{B_1^q q^{q\gamma} 2^q (n-q)!\, q!} =$$

$$= c\, 2^{[\alpha]+1} \sum_{n=q}^{\infty} \frac{e^{-\mu n^{1/\gamma}} n^{[\alpha]+1} n^q n!}{\sqrt{B_1}^{\,q} \left(1 - \sqrt{B_1}^{\,-1}\right)^{n-q} q^{q\gamma} (n-q)!\, q!} \left(\frac{1}{\sqrt{B_1}} \right)^q \left(1 - \frac{1}{\sqrt{B_1}} \right)^{n-q}. \tag{8}$$

В силу теоремы Бернулли [5, с. 40] имеем

$$\frac{n!}{(n-q)!\, q!} \left(\frac{1}{\sqrt{B_1}} \right)^q \left(1 - \frac{1}{\sqrt{B_1}} \right)^{n-q} \le 1$$

при $B_1 > 0$. Поскольку

$$\sup_q n^q / (\sqrt{B_1}^{\,q} q^{q\gamma}) \le e^{\mu_1 n^{1/\gamma}},$$

где $\mu_1 = \gamma / (B_1^{1/2\gamma} e)$, то $n^q / \left(1 - 1/\sqrt{B_1}\right)^n \sqrt{B_1}^{\,q} q^{q\gamma} \le e^{\varphi(B_1) n^{1/\gamma}}$, где $\varphi(B_1) \to 0$, $B_1 \to +\infty$. Выбирая B_1 так, чтобы $\varphi(B_1) < \mu/2$, из (8) получаем, что при рассматривамых значениях q выполняется (7).

Случай $f(x) \in \mathfrak{G}_{(2\gamma)}(A)$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

1. *Горбачук В. И.* О суммируемости разложений по собственным функциям самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. – 1987. – **292**, № 1. – С. 20 – 25.
2. *Мартыненко Е. В.* Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения с вырождением // Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 63 – 69.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 2-х т.– М.: Наука, 1966.– Т. 2. – 296 с.
4. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
5. *Справочник* по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

Получено 04. 03. 93