УДК 519.65

Н. П. Корнейчук, чл.-корр. АН Украины (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ОПТИМИЗАЦИЯ АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА H^{ω} *

A problem of recovery of monotone functions $f(t) \in H^{\omega}[a, b]$ with fixed values at the ends of an interval is studied by using the adaptive algorithms for getting the values of $f(t)$ at certain points. The asymptotically exact estimates, unimprovable on the whole of the set of adaptive algorithms, are obtained for the minimal possible number $N(\varepsilon)$ of steps guaranteeing the uniform ε-error. For the modules of continuity of type t^{α}, $0 < \alpha < 1$, the value $N(\varepsilon)$ has the higher order, as $\varepsilon \to 0$, than in the nonadaptive case for the same amount of information.

Розглянута задача відновлення монотонних функцій $f(t) \in H^{\omega}[a, b]$ з фіксованими значеннями на кінцях відрізка за допомогою адаптивних алгоритмів одержання інформації про значення $f(t)$ в окремих точках. Для мінімально можливого числа $N(\varepsilon)$ кроків, що гарантують рівномірну ε-похибку, здобута асимптотично точна оцінка, яка не може бути поліпшена на всій множині адаптивних алгоритмів. Для модулів неперервності типу t^{α}, $0 < \alpha < 1$, величина $N(\varepsilon)$ має вищий порядок при $\varepsilon \to 0$, ніж в неадаптивному випадку при тій же кількості одиниць інформації.

Пусть $C = C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(t)$ с нормой $\|f\| = \|f\|_C = \max\limits_{a \le t \le b} |f(t)|$, $H^{\omega} = H^{\omega}[a, b]$ — класс функций $f(t) \in$ $\in C$, удовлетворяющих условию

$$|f(t') - f(t'')| = \omega(|t' - t''|), \quad t', t'' \in [a, b],$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. Через H_m^{ω} будем обозначать множество монотонных функций из H^{ω}, а через $H_{m,L}^{\omega}$ — множество функций $f(t) \in H_m^{\omega}$ таких, что $|f(b) - f(a)| = L > 0$.

Рассматривается задача оптимизации адаптивных (активных) алгоритмов восстановления функций $f(t) \in H_{m,L}^{\omega}$ по информации, получаемой вычислением значений $f(t)$ в последовательно выбираемых точках $t_1, t_2, \ldots, t_N$ отрезка $[a, b]$, причем точка t_k выбирается с учетом значений $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_{k-1})$. Класс H^{ω} является выпуклым центральносимметричным множеством, и на нем адаптивные алгоритмы не имеют преимущества перед неадаптивными (пассивными), когда N точек $t_1, t_2, \ldots, t_N$ предъявляются одновременно (см., например, [1]). Для множеств H_m^{ω} и $H_{m,L}^{\omega}$ случай $\omega(t) = Kt$, $0 \le t \le b - a$, детально исследован в монографии [2], причем выяснилось, что хотя в этом случае адаптивные алгоритмы позволяют уменьшить погрешность, порядок ее $O(N^{-1})$ тот же, что и для неадаптивных алгоритмов.

Покажем, что для строго возрастающего $\omega(t)$ при выполнении условия

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\omega(t)}{t} = \infty \tag{1}$$

существует адаптивный алгоритм, гарантирующий на классе $H_{m,L}^{\omega}$ более высокий порядок погрешности, чем любой неадаптивный, причем этот порядок является наилучшим на множестве всех адаптивных алгоритмов. Для определенности будем считать для $f(t) \in H_{m,L}^{\omega}$, что $f(b) - f(a) = L > 0$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований ГКНТ Украины.

Если известен вектор значений $f(P_N)$ функции $f(t) \in H^{\omega}_{m,L}$ в системе точек

$$P_N\colon\ a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = b, \tag{2}$$

то верхнюю и нижнюю границы множества

$$H^{\omega}_{m,L}(f(P_N)) = \{g(t)\colon\ g \in H^{\omega}_{m,L},\ g(\tau_k) = f(\tau_k),\ k = 0, 1, \ldots, N\}$$

образуют функции, определенные на отрезках $[\tau_{j-1}, \tau_j]$, $j = 1, 2, \ldots, N$, соответственно равенствами

$$\Psi_N(t) = \Psi(f(P_N), t) = \min\Big\{ f(\tau_j), \min_{0 \le i < j} [f(\tau_i) + \omega(t - \tau_i)] \Big\}, \tag{3}$$

$$\psi_N(t) = \psi(f(P_N), t) = \max\Big\{ f(\tau_{j-1}), \max_{j \le i \le N} [f(\tau_i) - \omega(\tau_i - t)] \Big\}. \tag{4}$$

Наилучшим восстановлением функции $f(t)$ является чебышевский центр множества $H^{\omega}_{m,L}(f(P_N))$, т. е. функция

$$\varphi(f(P_N), t) = \frac{1}{2}[\Psi_N(t) + \psi_N(t)],$$

причем очевидно, что

$$\| f - \varphi(f(P_N)) \|_C = \frac{1}{2} \| \Psi_N - \psi_N \|_C \le \frac{1}{2} \max_{1 \le i \le N} | f(\tau_i) - f(\tau_{i-1}) |. \tag{5}$$

Предложение 1. *Каков бы ни был неадаптивный алгоритм восстановления, задаваемый системой точек* (2), *существует функция* $f(t) \in H^{\omega}_{m,L}$, *для которой*

$$\| f - \varphi(f(P_N)) \|_C \ge \frac{1}{2} \omega\Big(\frac{b-a}{2N} \Big). \tag{6}$$

Действительно, существует отрезок $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ такой, что $\tau_i - \tau_{i-1} \ge (b - a)/N =: h$. Если $c := (\tau_{i-1} + \tau_i)/2 \le (a + b)/2$, то полагаем $f(\tau_k) = f(a)$ для $\tau_k \le \tau_{i-1}$ и

$$f(\tau_k) = \max\{f(a) + \omega(h/2), f(b) - \omega(b - \tau_k)\}$$

для $\tau_k \ge \tau_i$. Если же $c < (a + b)/2$, то полагаем

$$f(\tau_k) = \min\{f(b) - \omega(h/2), f(a) + \omega(\tau_k - a)\}$$

для $\tau_k \le \tau_{i-1}$ и $f(\tau_k) = f(b)$ для $\tau_k \ge \tau_i$. Тогда $\Psi_N(c) - \psi_N(c) \ge \omega(h/2)$ и, следовательно, справедливо неравенство (6).

Для множества функций $\mathfrak{M} \subset C$ и $\varepsilon > 0$ введем в рассмотрение величину

$$N_\varepsilon(\mathfrak{M})_C = \min\Big\{ N\colon\ \inf_{P_N} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \| f - \varphi(f(P_N)) \|_C \le \varepsilon \Big\},$$

где инфимум вычисляется по всевозможным наборам точек (2). Из предложения 1 сразу вытекает, что

$$N_\varepsilon(H^{\omega}_{m,L})_C \ge \frac{b-a}{2\omega^{-1}(2\varepsilon)}, \tag{7}$$

где $\omega^{-1}(t)$ — функция, обратная $\omega(t)$ на $[0, b-a]$. Ясно, что при $\varepsilon \to 0$ порядок $O(1/\omega^{-1}(2\varepsilon))$ при $\varepsilon \to 0$ для величины $N_\varepsilon(H^{\omega}_{m,L})_C$ является точным.

Переходя к адаптивным алгоритмам восстановления, условимся точки t_κ, которые будем последовательно выбирать на отрезке $[a, b]$, называть t-точками, а соответствующие значения $f(t_k)$ — f-точками. Кроме того, так как речь будет идти о восстановлении функций $f(t) \in H^{\omega}_{m,L}$, то будем считать, что уже выбраны точки $t_0 = a$ и $t_1 = b$. Пусть P^a_N — набор последовательно выбираемых в соответствии с некоторым адаптивным алгоритмом точек

$$t_0 = a, \quad t_1 = b, \quad t_2, t_3, \dots, t_N. \tag{8}$$

Будем полагать

$$N_\varepsilon(\mathfrak{M},\ P^a_N)_C = \min\left\{ N\colon \sup_{f\in\mathfrak{M}} \|f-\varphi(f(P^a_N))\|_C \le \varepsilon \right\}.$$

Среди адаптивных алгоритмов выделим алгоритм P^b_N бисекции, который состоит в том, что когда уже выбраны на $[a, b]$ точки $t_0, t_1, \dots, t_k$, то в качестве t_{k+1} выбираем середину некоторого промежутка $[t_\mu, t_\nu]$, не содержащего внутри t-точек. Такие промежутки будем называть t-промежутками. Ввиду (5) предполагаем, что делиться могут только такие t-промежутки $[t_\mu, t_\nu]$, для которых $|f(t_\mu)-f(t_\nu)| > 2\varepsilon$. В [3] получена оценка сверху для $N_\varepsilon(H^{\omega}_{m,L},\ P^b_N)_C$ в случае $\omega(t) = t^\alpha$. Используя ту же идею доказательства, но усовершенствовав его, мы здесь получим в общем случае более точный результат.

Теорема 1. *Если* $\omega(t)$ — *строго монотонный модуль непрерывности, то для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $L > 2\varepsilon$

$$N_\varepsilon(H^{\omega}_{m,L},\ P^b_N)_C < \left(\frac{L}{2\varepsilon} + 1\right)\left[\log_2 \frac{2(b-a)\varepsilon}{L\omega^{-1}(2\varepsilon)} + 2\right], \tag{9}$$

где $\omega^{-1}(t)$ — *функция, обратная* $\omega(t)$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть для некоторой функции $f(t) \in H^{\omega}_{m,L}$ $N_\varepsilon(f,\ P^b_N)$ есть наименьшее число шагов алгоритма бисекции, после которых для любых соседних t-точек t_μ и t_ν выполняется неравенство $|f(t_\nu)-f(t_\mu)| \le 2\varepsilon$. Отображение $t_k \to f(t_k) =: f_k$ имеет свойство монотонности:

$$t_\mu < t_\nu \Rightarrow f(t_\mu) \le f(t_\nu).$$

Кроме того, если точка t_k появилась в результате деления пополам отрезка $[t_\mu, t_\nu]$, то $|f(t_\mu)-f(t_\nu)| > 2\varepsilon$.

Положим

$$y_j = f(a) + 2j\varepsilon, \quad j = 0, 1, \dots, m; \quad 2(m-1)\varepsilon < L \le 2m\varepsilon,$$

и оценим максимально возможное число q_j f-точек на каждом из промежутков $[y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$. Рассмотрим промежуток $[y_0, y_1]$. Если внутри его есть f-точки, то они появились после f-точки $f_0 = f(t_0)$ при делении некоторого отрезка $[t_0, t_i]$, причем $f(t_i) > y_1$. Пусть $f_k = f(t_k)$ — ближайшая к f_0 f-точка на (f_0, y_1). Следовательно, $t_k = (t_0 + t_i)/2$. Если на (f_0, y_1) есть еще f-точки, то они получены делением отрезка $[t_k, t_i]$. Пусть $t_{k+1} = (t_k + t_i)/2$ и $f_{k+1} < y_1$. Тогда новые f-точки могли появиться на (f_0, y_1) только в результате деления отрезка $[t_{k+1}, t_i]$. Пусть $t_{k+2} = (t_{k+1} + t_i)/2$ и т. д. Деление отрезка $[t_0, t_i]$ закончится на ν-м после t_k шаге, когда будут выполнены неравенства

$$f(t_i)-f(t_{k+\nu-1}) > 2\varepsilon, \quad f(t_i)-f(t_{k+\nu}) \le 2\varepsilon.$$

Обозначим $t_i - t_0 = \Delta_1$. Тогда

$$t_i - t_k = \frac{\Delta_1}{2}, \quad t_i - t_{k+1} = \frac{\Delta_1}{4}, \ \ldots \ , \ t_i - t_{k+\nu-1} = \frac{\Delta_1}{2^\nu}.$$

Таким образом,

$$2\varepsilon < f(t_i) - f(t_{k+\nu-1}) \le \omega(t_i - t_{k+\nu-1}) \le \omega\left(\frac{\Delta_1}{2^\nu} \right),$$

и следовательно,

$$\omega^{-1}(2\varepsilon) \le \frac{\Delta_1}{2^\nu}, \quad \nu < \log_2 \frac{\Delta_1}{\omega^{-1}(2\varepsilon)}.$$

С учетом f-точек f_0 и f_k получаем оценку

$$q_1 < \log_2 \frac{\Delta_1}{\omega^{-1}(2\varepsilon)} + 2 \tag{10}$$

максимально возможного числа f-точек на отрезке $[y_0, y_1]$.

Теперь заметим, что если $y_1 < f_i \le y_2$, то неравенством (10) оценивается и максимальное число f-точек на полуинтервале $[f_0, f_i)$, ибо как только очередная f-точка попадает на интервал (y_1, f_i), деление отрезка $[t_0, t_i]$ прекращается.

Перейдем к промежутку $[y_1, y_2]$. Пусть $y_1 < f_i \le y_2$. Если f_i — самая „старая", т. е. с наименьшим индексом, f-точка на $[y_1, y_2]$, то повторяем рассуждения, проведенные на $[y_0, y_1]$; роль f_k будет выполнять f_i. Если же самой „старой" на $[y_1, y_2]$ является f-точка $f_p > f_i$, то на (f_p, f_i) f-точек уже не будет, и роль f_k будет выполнять f_p.

Аналогично рассуждая на каждом отрезке $[y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, 2, \ldots, m$, приходим к оценке

$$N_\varepsilon(f, P_N^b) \le \sum_{j=1}^m q_j < \sum_{j=1}^m \left[\log_2 \frac{\Delta_j}{\omega^{-1}(2\varepsilon)} + 2 \right] = \log_2 \prod_{j=1}^m \frac{\Delta_j}{\omega^{-1}(2\varepsilon)} + 2m,$$

где $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_m \le b - a$, значит,

$$N_\varepsilon(f, P_N^b) < \log_2 \left[\frac{b-a}{m\omega^{-1}(2\varepsilon)} \right]^m + 2m.$$

Но $L/(2\varepsilon) \le m < L/(2\varepsilon) + 1$, поэтому

$$N_\varepsilon(f, P_N^b) < \left(\frac{L}{2\varepsilon} + 1 \right) \left[\log_2 \frac{2(b-a)\varepsilon}{L\omega^{-1}(2\varepsilon)} + 2 \right],$$

а так как эта оценка справедлива для любой функции $f(t) \in H^\omega_{m,L}$, то неравенство (9) доказано. Чтобы убедиться в его неулучшаемости, достаточно при фиксированном $\varepsilon > 0$ рассмотреть, например, функцию $f_\varepsilon(t)$, задаваемую равенством

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \min\{\omega(t), 2\varepsilon + \varepsilon'\}, & 0 \le t \le 1/2; \\ \min\{f(1/2) + \omega(t - 1/2), f(1/2) + 2\varepsilon + \varepsilon'\}, & 1/2 \le t \le 1, \end{cases}$$

где ε' сколь угодно мало.

Если выполнено условие (1), то, чтобы выделить определяющие порядок слагаемые, запишем неравенство (9) в виде

$$N_\varepsilon(H^{\omega}_{m,L},\ P^b_N)_C < \frac{L}{2\varepsilon}\left[\log_2\frac{2\varepsilon}{\omega^{-1}(2\varepsilon)} + \log_2\frac{b-a}{L} + 2\right] +$$
$$+ \log_2\frac{2\varepsilon}{\omega^{-1}(2\varepsilon)} + \log_2\frac{b-a}{L} + 2. \tag{11}$$

Сравнение (7) с (11) показывает, что для модулей непрерывности $\omega(t)$, удовлетворяющих условию (1), алгоритм бисекции гарантирует на классе $H^{\omega}_{m,L}$ погрешность более высокого порядка малости, чем любой неадаптивный алгоритм.

В случае $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, вместо $H^{\omega}_{m,L}$ будем писать $H^{\alpha}_{m,L}$. Из теоремы 1 и (11) вытекает результат, более точный, чем в [3].

***Следствие* 1.** *При* $L > 2\varepsilon$ *справедлива оценка*

$$N_\varepsilon(H^{\alpha}_{m,L},\ P^b_N)_C < \frac{L}{2\varepsilon}\left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)|\log_2\varepsilon| + \log_2\frac{b-a}{L} + \frac{1}{\alpha} + 1\right] +$$
$$+ \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)|\log_2\varepsilon| + \log_2\frac{b-a}{L} + \frac{1}{\alpha} + 1. \tag{12}$$

Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях оценки (11) и (12) асимптотически точны (при $\varepsilon \to 0$), причем не только для алгоритма бисекции, но и на множестве всех адаптивных алгоритмов. Будем ниже считать, что класс $H^{\omega}_{m,L}$ определяется строго монотонным и выпуклым вверх модулем непрерывности $\omega(t)$, причем

$$0 < L := f(b) - f(a) \le \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{b-a}{2}\right). \tag{13}$$

Если $P^a_N = \{t_k\}_0^N$ — система точек (8), определяемая внутри (a, b) некоторым адаптивным алгоритмом, то пусть

$$N_\varepsilon(f,\ P^a_N) = \min\{N\colon \|f - \varphi(f(P^a_N))\|_C \le \varepsilon\}.$$

Докажем, что каков бы ни был адаптивный алгоритм, существует функция $f(t) \in H^{\omega}_{m,L}$, для которой $N_\varepsilon(f,\ P^a_N)$ оценивается снизу выражением, порядок которого при $\varepsilon \to 0$ совпадает с порядком правой части (11), а в наиболее важных случаях оценки совпадают и в смысле точной асимптотики. Для этого воспользуемся терминологией многошаговой антагонистической игры: первый игрок, который стремится минимизировать число необходимых шагов, последовательно выбирает, в соответствии с некоторым адаптивным алгоритмом, точки $t_2, t_3, \ldots, t_N$, а мы, в роли второго игрока, ориентируясь на худший случай, предъявляем значения $f(t_2), f(t_3), \ldots, f(t_N)$.

Пусть фиксировано ε, $0 < \varepsilon < L/8$, и m — наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенствам

$$2(m-1)\varepsilon < L \le 2m\varepsilon, \tag{14}$$

так что $m \ge 4$. Положим $\delta = \varepsilon + \varepsilon'$, где положительное число ε' выбрано таким образом, что выполняется неравенство

$$2(m-1)\delta < L. \tag{15}$$

Обозначим $(b-a)/m = h$ и пусть

$$\tau_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

$$y_i = f(a) + 2i\delta, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad y_m = f(b).$$

Для дальнейшего существенно, что

$$y_{i+k} - y_i \le \omega(h), \quad k = 1, 2; \quad y_{i+k} - y_i \le \omega((k-1)h), \quad 3 \le k \le m-i. \tag{16}$$

Действительно, учитывая выпуклость $\omega(t)$, неравенства (14)–(15), а также априорные оценки для ε и m, имеем при $k \ge 3$

$$y_{i+k} - y_i = 2k\delta < k\frac{L}{m-1} \le \frac{k}{m-1}\frac{1}{2}\omega\left(\frac{b-a}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{k(b-a)}{4(m-1)}\frac{\omega((b-a)/2)}{(b-a)/2} \le \frac{k(b-a)}{4(m-1)}\frac{\omega((k-1)h)}{(k-1)h} \le \omega((k-1)h).$$

Наряду с $\tau_0 = a$ и $\tau_m = b$ зафиксируем значения функции $f(t)$ и в остальных точках τ_i: $f(\tau_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, и определим в соответствии с (3) и (4) исходные верхнюю $\Psi(t) = \Psi(\{y_i\}, t)$ и нижнюю $\psi(t) = \psi(\{y_i\}, t)$ границы допустимых функций. Из (16) следует, что сужение функций $\Psi(t)$ и $\psi(t)$ на каждый из отрезков $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Psi^i(t) = \min\{y_i, \omega(t-\tau_{i-1}) + y_{i-1}\}, \\ \psi(t) &= \psi^i(t) = \max\{y_{i-1}, y_i - \omega(\tau_i - t)\}, \end{aligned} \tag{17}$$

причем если $c_i = (\tau_{i-1} + \tau_i)/2$, то $\Psi^i(c_i) = y_i$, $\psi^i(c_i) = y_{i-1}$.

Введем в рассмотрение величины

$$A^i = \max_{\tau_{i-1} \le t \le \tau_i} [\Psi^i(t) - \psi^i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

а также множества

$$Q^i = \{t\colon t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad \Psi^i(t) - \psi^i(t) = A^i\}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В силу выбора точек y_i и ввиду (17)

$$A^i = 2\delta > 2\varepsilon, \quad Q^i = [\tau_{i-1} + \omega^{-1}(2\delta), \ \tau_i - \omega^{-1}(2\delta)], \quad i = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$A^m < 2\delta, \quad Q^m = [\tau_{m-1} + \omega^{-1}(y_m - y_{m-1}), \tau_m - \omega^{-1}(y_m - y_{m-1})].$$

Алгоритм выбора значений функции $f(t)$ в предъявляемых первым игроком t-точках опишем ниже, а пока заметим, что этот алгоритм будет одинаковым на каждом промежутке (τ_{i-1}, τ_i), $i = 1, 2, \dots, m-1$, а также на (τ_{m-1}, τ_m), если $A^m > 2\varepsilon$. Попадающие на (τ_{i-1}, τ_i) t-точки (может быть не все) пронумеруем отдельно: $t_1^i, t_2^i, \dots$, указывая сразу значения $f(t_1^i), f(t_2^i), \dots$. После каждого шага $(t_k^i; f(t_k^i))$ с учетом значения $f(t_k^i)$ переопределяем верхнюю и нижнюю функции $\Psi_k^i(t)$ и $\psi_k^i(t)$, вычисляем значение $A_k^i = \max\limits_{\tau_{i-1} \le t \le \tau_i} [\Psi_k^i(t) - \psi_k^i(t)]$ и определяем множество Q_k^i точек $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, в которых $\Psi_k^i(t) - \psi_k^i(t) = A_k^i$. Игра закончится, как только на каждом промежутке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ на n_i-м шаге окажется, что $A_{n_i}^i \le 2\varepsilon$, ибо тогда

$$\max_{\tau_{i-1} \le t \le \tau_i} \left| f(t) - \frac{1}{2}\left[\Psi^i_{n_i}(t) - \psi^i_{n_i}(t)\right] \right| \le \varepsilon.$$

Теперь опишем предлагаемый алгоритм. Пусть t_1^i — первая t-точка, попавшая на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ и $c_i = (\tau_i + \tau_{i-1})/2$. Если $\tau_{i-1} \le t_1^i \le c_i$, то полагаем $f(t_1^i) = y_{i-1}$, если же $c_i < t_1^i \le \tau_i$, то $f(t_1^i) = y_i$. Обозначим через $[\beta_1, \gamma_1]$, тот из двух отрезков $[\tau_{i-1}, t_1^i]$ и $[t_1^i, \tau_i]$, на концах которого $f(t)$ принимает разные значения: $f(\beta_1) = y_{i-1}$, $f(\gamma_1) = y_i$. Заметим, что так как $\tau_i - \tau_{i-1} = (b-a)/m$, то $\gamma_1 - \beta_1 \ge$ $\ge (b-a)/2m$. На промежутке $[\tau_{i-1}, \tau_i) \backslash [\beta_1, \gamma_1]$ функция $f(t)$ постоянна, и мы исключаем его из рассмотрения, т. е. будем учитывать только t-точки, попавшие на (β_1, γ_1). Пусть t_2^i — первая из таких точек, причем

$$A_1^i = \max_{\beta_1 \le t \le \gamma_1} | \Psi_1^i(t) - \psi_1^i(t)| = 2\delta.$$

Если $\beta_1 \le t_2^i \le c_1^i := (\beta_1 + \gamma_1)/2$, то полагаем $f(t_2^i) = y_{i-1}$, если же $c_1^i < t_2^i \le \gamma_1$, то $f(t_2^i) = y_1$. Через $[\beta_2, \gamma_2]$ обозначим тот из промежутков $[\beta_1, t_2^i]$ и $[t_2^i, \gamma_1]$, на котором $f(t)$ имеет приращение 2δ и т. д. Ясно, что $\gamma_2 - \beta_2 \ge (b-$ $-a)/4m$. Если $A_2^i = 2\delta$ и $t_3^i \in [\beta_2, \gamma_2]$, то значение $f(t_3^i)$ определяем по тому же правилу и т. д., до n_i-го шага, после которого $A^i_{n_i} \le 2\varepsilon$. Получим конечную последовательность вложенных отрезков:

$$[\tau_{i-1}, \tau_i] \supset [\beta_1, \gamma_1] \supset [\beta_2, \gamma_2] \supset \ldots \supset \left[\beta_{n_i}, \gamma_{n_i}\right],$$

причем

$$\gamma_{n_i} - \beta_{n_i} \ge \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{2^{n_i}} = \frac{b-a}{m2^{n_i}} \tag{18}$$

и знак равенства в (18) имеет место для бисекции.

Оценим длину отрезка $\left[\beta_{n_i}, \gamma_{n_i}\right]$ сверху. Если функции $\Psi^i_{n_i}(t)$ и $\psi^i_{n_i}(t)$ определяются аналогично (17) только значениями $f(t)$ в t-точках $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, то, очевидно, $\gamma_{n_i} - \beta_{n_i} \le 2\omega^{-1}(2\varepsilon)$. Однако в силу общего определения (3), (4) надо учитывать и возможность влияния на $\Psi^i_{n_i}(t)$ и $\psi^i_{n_i}(t)$ значений $f(t)$, выбранных нами на других промежутках. Но ввиду (16) такое влияние могут оказывать лишь значения $f(t) = y_{i-2}$, выбранные на $[\tau_{i-2}, \tau_{i-1}]$ и $f(t) = y_{i+1}$ на $[\tau_i,$ $\tau_{i+1}]$. Если ориентироваться на самый худший случай, когда, например, $\gamma_{n_i} = \tau_i$ и $f(\tau_i + \omega^{-1}(2\delta)) = y_{i+1}$, то, во всяком случае,

$$\gamma_{n_i} - \beta_{n_i} \le \omega^{-1}(4\varepsilon). \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует $2^{n_i} \ge (b-a)/(m\omega^{-1}(4\varepsilon))$. В силу (14) и неравенства $\varepsilon <$ $< L/8$ получаем соотношения

$$\frac{b-a}{m} > \frac{8(b-a)\varepsilon}{5L}, \quad m \ge \frac{L}{2\varepsilon},$$

поэтому

$$n_i > \log_2\left[\frac{2}{5}\,\frac{b-a}{L}\,\frac{4\varepsilon}{\omega^{-1}(4\varepsilon)}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, m-1,$$

а для общего числа шагов на $[a, b]$ при любом адаптивном алгоритме P_N^a выбора t-точек имеем оценку

$$N_\varepsilon(f, P_N^a)_C > (m-1)\,n_i \geq \left(\frac{L}{2\varepsilon} - 1\right)\log_2\left[\frac{2(b-a)}{5L}\,\frac{4\varepsilon}{\omega^{-1}(4\varepsilon)}\right].$$

Этим доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\omega(t)$ — *выпуклый вверх и строго монотонный на* $[0, b-a]$ *модуль непрерывности.*

Каков бы ни был адаптивный алгоритм P_N^a *выбора* t*-точек на отрезке* $[a, b]$, *в классе* $H_{m,L}^{\omega}$ *при условии* (13) *существует функция* $f(t)$ *такая, что*

$$N_\varepsilon(f, P_N^a)_C > \frac{L}{2\varepsilon}\log_2\frac{4\varepsilon}{\omega^{-1}(4\varepsilon)} + \frac{L}{2\varepsilon}\log_2\frac{2(b-a)}{5L} - \log_2\left[\frac{2(b-a)}{5L}\,\frac{4\varepsilon}{\omega^{-1}(4\varepsilon)}\right].$$

Сравнение теорем 1 и 2 позволяет сформулировать также следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\omega(t)$ — *выпуклый вверх строго монотонный и удовлетворяющий условию* (1) *модуль непрерывности, причем существует положительная константа* c *такая, что*

$$\frac{\omega^{-1}(t)}{\omega^{-1}(2t)} \geq c > 0, \quad 0 < t < \frac{b-a}{2}. \tag{20}$$

Тогда справедливо асимптотически точное при $\varepsilon \to 0$ *равенство*

$$N_\varepsilon^a(H_{m,L}^{\omega})_C := \inf_{P_N^a}\sup_{f\in H_{m,L}^{\omega}} N_\varepsilon(f, P_N^a) = \frac{L}{2\varepsilon}\log_2\frac{\varepsilon}{\omega^{-1}(\varepsilon)} + O(\varepsilon^{-1}),$$

где инфимум вычисляется по всем адаптивным алгоритмам и реализуется на алгоритме, использующем бисекцию.

Заметим, что условие (20) не выполняется, например, для модуля непрерывности

$$\omega(t) = \frac{1}{|\ln t|}, \quad 0 < t \leq e^{-2}.$$

Для $\omega(t) = t^\alpha$ условия (1) и (20) выполняются при любом $\alpha \in (0, 1)$, поэтому справедливо такое следствие.

Следствие 2. *При всех* $0 < \alpha < 1$ *справедливо асимптотически точное равенство*

$$N_\varepsilon^a(H_{m,L}^{\alpha})_C = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{|\log_2\varepsilon|}{\varepsilon} + O(\varepsilon^{-1}).$$

Оптимальным является адаптивный алгоритм, использующий бисекцию.

1. *Трауб Дж., Вожьняковский X.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
2. *Сухарев А. Г.* Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. – М.: Наука, 1989. – 300 с.
3. *Корнейчук Н. П.* О пассивных и активных алгоритмах восстановления функций // Укр. мат. журн. – 1992. – **45**, № 2. – С. 258 – 264.

Получено 05. 04. 93