УДК 517.9

О. Б. Лыкова, д-р физ.–мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О ПРИНЦИПЕ СВЕДЕНИЯ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

The paper deals with the development of A. M. Lyapunov's idea on reducing the problem of stability of the trivial solution of a system of differential equatins to the similar problem for a system of a lower order. Particular attention is paid to the application of integral manifolds and approximate integral manifolds.

Прослiджується розвиток iдеї О. М. Ляпунова про зведення задачi про стiйкiсть нульового розв'язку системи диференцiальних рiвнянь високого порядку до аналогiчної задачi для системи бiльш низького порядку. Особлива увага придiляється застосуванню для цiєї мети iнтегральних многовидiв, а також наближених iнтегральних многовидiв.

Как известно, до работ А. М. Ляпунова при исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений обычно использовался метод, состоящий в замене исходных уравнений возмущенного движения линейными уравнениями. Исключение составляют результаты А. Пуанкаре [1], относящиеся к исследованию систем дифференциальных уравнений второго и третьего порядков.

А. М. Ляпунов, исследуя уравнения с голоморфными правыми частями, впервые строго подошел к решению проблемы устойчивости, выделив так называемые критические случаи, когда решение задачи об устойчивости не может быть получено, исходя из рассмотрения уравнений первого приближения. В этих исследованиях центральное место занимает идея сведения, заключающаяся в том, что для системы $m + n$ дифференциальных уравнений с выделенной линейной частью

$$\frac{dx}{dt} = Ax + X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = By + Y(x, y),$$

когда $\operatorname{Re}\lambda_i(A) = 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, $\operatorname{Re}\lambda_j(B) < 0$ $(j = m+1, \dots, n)$, ставится вопрос о существовании и построении m-векторной функции $X^*(x)$ такой, чтобы задача об устойчивости нулевого решения исходной системы уравнений сводилась к аналогичной задаче для дифференциального уравнения относительно критической переменной x:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + X^*(x).$$

В своих трудах А. М. Ляпунов развил этот подход к исследованию устойчивости для установившихся движений в критических случаях одного нулевого корня, пары чисто мнимых корней, двух нулевых корней с одной группой решений для системы второго порядка и для системы $(n + 2)$-го порядка, а также для некоторых случаев периодических движений [2] (1892).

Развитый А. М. Ляпуновым метод, получивший впоследствии название „принципа сведения", сыграл центральную роль при исследовании устойчивости в критических случаях.

После А. М. Ляпунова первые значительные результаты в этом направлении принадлежат Г. В. Каменкову [3]. Им было получено решение задачи об устойчивости для системы

$$\frac{dx}{dt} = X^{(m)} + X^{(m+1)} + \dots, \qquad \frac{dy}{dt} = Y^{(k)} + Y^{(k+1)} + \dots$$

в виде разложений по формам m-го порядка в критическом случае двух нулевых корней с двумя группами решений вначале для двух переменных (1935), а затем для общего случая $n+2$ переменных (1936). Было показано, что при исследовании устойчивости системы $n+2$-го порядка в случаях не существенно особенных, когда вопрос об устойчивости решается по формам конечного порядка, можно перейти к эквивалентной задаче об устойчивости для системы второго порядка.

Кроме того, В. Г. Каменков исследовал случаи одного нулевого и пары чисто мнимых корней, двух пар чисто мнимых корней при условии отсутствия резонанса и общий случай m нулевых корней с m группами решений, $2n$ чисто мнимых корней при условии отсутствия резонанса и q корней с отрицательными вещественными частями.

В. Г. Каменков исследовал также аналогичные случаи для уравнений с периодическими коэффициентами: показал, что переход от полной системы уравнений возмущенного движения к „укороченной", содержащей лишь критические переменные, всегда возможен в несущественно особенных случаях, когда речь идет об асимптотической устойчивости или неустойчивости.

В. Г. Каменков развил принцип сведения также для систем с произвольными непрерывными и ограниченными коэффициентами. Им был рассмотрен принцип сведения также в особенно существенных случаях.

Исследования В. Г. Каменкова получили дальнейшее развитие в работах И. Г. Малкина. Результаты И. Г. Малкина по принципу сведения известны в литературе как „основные теоремы о критических случаях" [4, 5]. И. Г. Малкин рассмотрел случаи двух пар чисто мнимых корней, а также одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней для установившихся движений. Аналогичные случаи исследованы им для периодических движений.

Некоторое уточнение первой основной теоремы Малкина о критических случаях получено В. Н. Постниковым [6] (1942).

С. В. Калинин [7–9] (1948, 1953, 1955), применив метод осреднения периодических коэффициентов, исследовал устойчивость периодических движений в критических случаях одного нулевого корня, пары чисто мнимых корней, нескольких нулевых и чисто мнимых корней. Развитый С. В. Калининым способ с применением принципа сведения позволил ему решить ряд прикладных задач.

В работах Е. И. Дыхмана [10] (1950) и К. П. Персидского [11] (1951) принцип сведения получил применение при исследовании устойчивости в критических случаях для счетных систем дифференциальных уравнений.

Указанные выше результаты относятся в основном к алгебраическому случаю, когда об устойчивости можно судить по конечному числу членов в разложении соответствующих вектор-функций. Например, в первой основной теореме о критических случаях утверждается, что если нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + X^*(t, x, 0)$$

(асимптотически) устойчиво или неустойчиво вне зависимости от членов порядка выше, чем некоторое фиксированное натуральное число N, и если разложения компонент вектор-функции $Y(t, x, 0)$ начинаются членами порядка не ниже $N+1$, то и нулевое решение исходной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + X(t, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = By + Y(t, x, y) \tag{1}$$

соответственно (асимптотически) устойчиво или неустойчиво.

Применение принципа сведения в трансцендентном случае связано с использованием интегральных многообразий.

Основы теории интегральных многообразий разработаны Н. Н. Боголюбовым и изложены в его монографии „О некоторых статистических методах в математической физике" [12] (1945). Им доказана теорема, формулирующая условия, при которых качественное исследование системы n уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + P(t, \varphi, h, \varepsilon), \qquad \frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, \varphi, h, \varepsilon) \tag{2}$$

сводится на интегральном многообразии

$$M = \{(t, \varphi, h, \varepsilon): h = f(t, \varphi, \varepsilon),\ t \in R,\ \varphi \in \Omega,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$$

этой системы к качественному исследованию одного уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + P(t, \varphi, f(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon).$$

Тем самым был сформулирован принцип сведения в качественной теории дифференциальных уравнений.

В 50-е годы идеи Н. Н. Боголюбова получили развитие в работах Ю. А. Митропольского, его учеников и сотрудников. Среди работ этого периода укажем работы [13, 14] (1957), в которых для нелинейной системы n уравнений в критическом случае пары чисто мнимых корней доказаны теоремы о двумерном локальном интегральном многообразии, на котором рассмотрение исходной системы сводилось к рассмотрению двух уравнений относительно критических переменных. Отметим также работу [15] (1963), в которой решения этих двух уравнений использовались для исследования устойчивости нулевого решения исходной системы в рассматриваемом критическом случае.

Толчком к дальнейшему бурному развитию теории интегральных многообразий послужил проблемный доклад Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского по интегральным многообразиям на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям в 1961 г. [16].

После этого появилось большое количество работ, посвященных исследованию интегральных многообразий, в том числе и их применению в теории устойчивости. Результаты этих исследований подытожены в [17] (1973).

В 1964 г. была опубликована работа В. А. Плисса [18], в которой, используя локальные интегральные многообразия, автор доказал принцип сведения для системы $m + n$ дифференциальных уравнений типа (1) справедливый как в алгебраическом случае, так и в трансцендентном.

Эта работа положила начало следующему циклу работ по принципу сведения с применением интегральных многообразий. Первой такой работой была статья Ал. Келли [19] (1967), в которой получен аналог теоремы Плисса для периодического решения при помощи центр-устойчивого интегрального многообразия. В 1968 г. [20] Ю. А. Митропольский и Е. П. Белан развили принцип сведения в теории устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений.

А. М. Самойленко установил принцип сведения для общих динамических систем, используя для этой цели аппарат знакопостоянных функций [21] (1979).

В монографии К. Г. Валеева и О. А. Жаутыкова [22] (1974) подытожены результаты авторов по принципу сведения для счетных систем дифференциальных уравнений. Я. С. Барис [23] (1979) сформулировал принцип сведения в случае условной устойчивости.

Следующий этап в развитии принципа сведения связан с использованием приближенных интегральных многообразий.

Задача построения приближенного интегрального многообразия n-векторного дифференциального уравнения, содержащего медленно меняющийся параметр, рассматривалась в [24] (1957), а в [25] (1960) было дано математическое обоснование развитого способа построения таких многообразий. В [26] (1979) Я. С. Барис и О. Б. Лыкова ввели понятие приближенного с невязкой интегрального многообразия и развили способы его построения на основе метода асимптотических разложений по параметру и по координатам. Обзор этих результатов приведен в [27].

В [28–34] получены новые результаты по применению приближенных интегральных многообразий в теории устойчивости. Чтобы сформулировать их, рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)z + g(t, x, z), \quad \frac{dz}{dt} = C(t)z + h(t, x, z), \tag{3}$$

в которой матричные функции A, B, C непрерывны на интервале $I \supset [0, \infty)$, а вектор-функции $g(t, x, z)$, $h(t, x, z)$ непрерывны на множестве $I \times R^m \times V$, где V — некоторая область из R^n, содержащая замкнутый шар V_ρ радиуса ρ с центром в нуле.

Чтобы доказать для исходной системы принцип сведения с помощью приближенных интегральных многообразий, приведем вспомогательные результаты.

Теорема 1. *Пусть для системы* (3) *выполняются следующие условия.*

1. *Существуют такие постоянные* $N, K, \nu > 0$, $0 \le \chi < \nu$, *что нормированные при* $t = s$, $s \in I$, *фундаментальные матрицы* $X(t, s)$, $Z(t, s)$ *подчинены оценкам:* $\| X(t, s) \| \le K e^{\chi|t-s|}$, $\| Z(t, s) \| \le N e^{-\nu(t-s)}$, $t \ge s$.

2. *Вектор-функции* $f = B(t)z + g$, h *непрерывны и удовлетворяют неравенствам*

$$\| f(t, \bar{x}, \bar{z}) - f(t, x, z) \| \le \Lambda_1 \| \bar{x} - x \| + \Lambda \| \bar{z} - z \|,$$

$$\| h(t, \bar{x}, \bar{z}) - h(t, x, z) \| \le L_1 \| \bar{x} - x \| + L \| \bar{z} - z \|,$$

$h(t, x, 0) \le N_0$ (Λ_1, Λ, L_1, L — *постоянные, причем* $\Lambda > 0$).

3. *Справедливы неравенства*

$$N_0 N \le (\nu - LN)\rho, \quad \nu - \chi - K\Lambda_1 - KNL \ge 2K\sqrt{N L_1 \Lambda}.$$

4. *Система уравнений* (3) *имеет нулевое решение.*

Тогда система (3) *имеет* (ρ, η)*-многообразие* M: $y = \varphi^*(t, x)$, $\varphi(t, 0) \equiv 0$.

Теорема 2. *Пусть система* (3) *удовлетворяет условиям теоремы* 1.

Тогда нулевое решение этой системы (*асимптотически*) *устойчиво тогда и только тогда, когда* (*асимптотически*) *устойчиво нулевое решение уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\varphi^*(t, x) + g(t, x, \varphi^*(t, x)),$$

в котором вектор-функция $\varphi^*(t, x)$ *задает* (ρ, η)*-многообразие системы* (3).

Предположим теперь, что для системы (3) удалось построить приближенное интегральное многообразие $M_{\text{пр}}$: $y = \Phi(t, x)$, $t \in I$, $x \in R^m$.

Пусть невязка $b(t, x)$ этого многообразия имеет порядок выше, чем p, т. е. $\| b(t, x) \| = o(\| x \|^p)$, $x \to 0$ равномерно относительно $t \ge 0$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\Phi(t, x) + g(t, x, \Phi(t, x)), \tag{4}$$

описывающее поведение решений системы (3) на многообразии $M_{\text{пр}}$.

Будем говорить, что задача об устойчивости для уравнения (4) решается вне зависимости от членов порядка выше p, и имеет место неособый критический случай, если нулевое решение уравнения (4) (асимптотически) устойчиво тогда и только тогда, когда (асимптотически) устойчиво нулевое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\Phi(t,x) + g(t,x,\Phi(t,x)) + \tilde{g}(t,x),$$

где $\tilde{g}(t,x)$ — произвольная непрерывная вектор-функция, имеющая по x порядок выше p и тождественно равная нулю при $x = 0$.

В рассматриваемом неособом критическом случае доказана следующая теорема [33].

Теорема 3. *Пусть для системы уравнений* (3) *выполняются условия теоремы* 2, *а невязка* $b(t, x)$ *приближенного интегрального многообразия* $M_{\text{пр}}$ *имеет порядок по* x *выше* p.

Тогда нулевое решение системы (3) (*асимптотически*) *устойчиво или неустойчиво, если* (*асимптотически*) *устойчиво или неустойчиво нулевое решение уравнения* (4) *вне зависимости от членов порядка выше* p.

Большой интерес представляют встречающиеся в приложениях случаи, когда условия приведенных теорем выполняются не для всех $x \in R^n$, а лишь для $\| x \| < r$, $r > 0$. В этих случаях задачи о сведении решены в указанных работах с помощью локальных интегральных многообразий, а также приближенных локальных интегральных многообразий.

Многочисленные результаты по применению принципа сведения с использованием приближенных интегральных многообразий (а также приближенных локальных интегральных многообразий) для исследования устойчивости решений сингулярно-возмущенных систем дифференциальных уравнений изложены в монографии В. В. Стрыгина, В. А. Соболева [35] (1988). Приложения этих результатов к исследованию прикладных задач изложены в монографии В. М. Гольдштейна, В. В. Соболева [36] (1988).

Особое значение имеет использование принципа сведения в тории бесконечномерных динамических систем. Речь идет о редукции задачи об устойчивости для бесконечномерной системы к аналогичной задаче для соответствующей конечномерной системы.

Один из подходов к решению этой проблемы впервые был развит на основе метода интегральных многообразий в работе [37] (1971) для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + X(t,x,\varepsilon), \tag{5}$$

рассматриваемого в бесконечномерном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ в случае, когда оператор A является ограниченным, а также в работе [38] (1975), когда оператор A неограниченный, замкнутый. Приведем формулировку этого результата. Предполагается, что вектор-функция $X(t, x, \varepsilon)$ со значениями в $\mathfrak{B}$ непрерывна на множестве $R \times \mathfrak{B}$ и удовлетворяет на этом множестве условиям: $\| X(t,x,\varepsilon) \| \le M$, $X(t,x,\varepsilon) \in \operatorname{Lip}\{x; q\}$, где M, q — некоторые константы. Кроме того, выполняется одно из условий: 1) $X(t, x, \varepsilon)$ входит в область определения оператора A; 2) $X(t, x, \varepsilon)$ дифференцируема. Относительно оператора A предполагается, что он является замкнутым, определенным на линейном многообразии $D(A)$ пространства $\mathfrak{B}$ и действующим в $\mathfrak{B}$, а его спектр состоит из ограниченного множества $\sigma_1(A)$, расположенного на мнимой оси, и замкнутого множества $\sigma_2(A)$, не пересекающегося с мнимой осью и расположенного слева от нее. Посредством проекционного оператора P_1 пространство $\mathfrak{B}$ раскладывается в прямую сумму подпространств: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \dotplus \mathfrak{B}_2$, где $\mathfrak{B}_1 = P_1\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_2 = (I - P_1)\mathfrak{B}$, при этом $\mathfrak{B}_1$ целиком лежит в области определения $D(A)$ оператора A. Спектр сужения A_1 оператора A на $\mathfrak{B}_1$ совпадает с σ_1. Сужение A_2 оператора A на множестве $(I-P_1)D(A)=D(A_2)$ является замкнутым линейным оператором, действующим в $\mathfrak{B}_2$, спектр которого совпадает с σ_2.

Таким образом, рассмотрение исходного уравнения сведено к рассмотрению расщепленных относительно спектра $\sigma(A)$ уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1\xi + X_1(t,\xi,h,\varepsilon), \qquad \frac{dh}{dt} = A_2 h + X_2(t,\xi,h,\varepsilon) \tag{6}$$

с ограниченным оператором A_1 в $\mathfrak{B}_1$ и замкнутым неограниченным оператором A_2 в $\mathfrak{B}_2$. Предполагается, что замкнутый оператор A_2 порождает сильно непрерывную группу $\{e^{A_2 t}\}$, $t>0$, в $\mathfrak{B}_2$. Тогда справедлива оценка $\|e^{A_2 t}\| \le \le De^{-\mu t}$, $t>0$, где D, $\mu>0$, — некоторые константы. Вектор-функции $X_1(t,\xi,h,\varepsilon)$, $X_2(t,\xi,h,\varepsilon)$ удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование гладкого интегрального многообразия S_t, представимого вектор-функцией $h=\varphi(t,\xi,\varepsilon)$.

Наряду с уравнениями (6) рассматривается уравнение, описывающее поток на многообразии S_t:

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1\xi + X_1(t,\xi,\varphi(t,\xi,\varepsilon),\varepsilon) \tag{7}$$

и имеющее конечную размерность. Посредством преобразования $s=h-\varphi(t,\xi,\varepsilon)$ система уравнений (6) преобразуется в систему

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1\xi + X_3(t,\xi,s,\varepsilon), \qquad \frac{dh}{dt} = A_2 h + X_4(t,\xi,s,\varepsilon), \tag{8}$$

где, в частности, $\{X_3(\ldots),X_4(\ldots)\} \in \mathrm{Lip}\{\xi,h;\lambda(\varepsilon,\alpha,\delta)\}$, $\lambda(\varepsilon,\alpha,\delta)\to 0$, $(\varepsilon,\alpha,\delta)\to 0$; $X_4(t,\xi,0,\varepsilon)=0$, а уравнение (7) — в уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1\xi + \overline{X}_3(t,\xi,0,\varepsilon), \tag{9}$$

для которого выполняются условия

$$\|\overline{X}_3(t,\xi,0,\varepsilon)\| \le N(t), \qquad \overline{X}_3(t,\xi,0,\varepsilon) \in \mathrm{Lip}\{\xi;g(t)\}$$

с интегрально ограниченными $N(t)$ и $g(t)$.

Доказывается принцип сведения, утверждающий, что если вектор-функции в правых частях уравнений (8) и (9) имеют указанные выше свойства, спектр оператора A_1 является критическим, расположенным на мнимой оси и выполняется оценка $\|e^{A_1 t}\| \le Ne^{\alpha|t|}$, $t\in R$, а оператор A_2 является замкнутым, порождающим сильно непрерывную полугруппу, спектр которого не пересекается с мнимой осью и расположен слева от нее, и следовательно, выполняется оценка $\|e^{A_2 t}\| \le De^{-\mu t}$, $t>0$, $\mu>0$, то тогда положение равновесия $\xi=0$, $s=0$ уравнений (8) (асимптотически) устойчиво, неустойчиво, если (асимптотически) устойчиво, неустойчиво положение равновесия $\xi=0$ уравнения (9). Частный случай — метод центрального многообразия, использовался при решении задач теории бифуркаций, в том числе и для бесконечномерных систем (Дж. Марсден [39], Д. Хенри [40], Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн [41]). Р. Фояс [42] (1985), исследуя в $H=L^2(\Omega)$ эволюционное уравнение типа

$$\frac{dx}{dt} + Au + g(u) = 0,$$

где Au — это оператор $-d\Delta u + u$, $d > 0$, ввел понятие инерциального многообразия, т. е. конечномерного липшицевого многообразия в гильбертовом пространстве H, экспоненциально притягивающего все решения исходного уравнения и на котором рассмотрение исходной бесконечномерной динамической системы сводится к рассмотрению конечномерного обыкновенного дифференциального уравнения. Однако существование инерциального многообразия удается доказать при условии, что между двумя соседними собственными значениями оператора A имеется достаточно большой промежуток, что приводит к ограничению на размерность области Ω. Чтобы обойти связанные с этим затруднения Р. Фояс [43] (1987) на примере двумерного уравнения Навье–Стокса ввел понятие приближенного (аппроксимационного) инерциального многообразия, которое является гладким конечномерным многообразием, притягивающим с течением времени в свою достаточно малую окрестность траектории всех решений исходного уравнения. При этом, хотя само приближенное многообразие не является инвариантным, оно с некоторой точностью аппроксимирует точное инерциальное многообразие, если последнее существует.

Концепция аппроксимационного инерциального многообразия получила развитие в многочисленных работах (см., например, [44–52]). Обзор некоторых из этих результатов приведен в [52].

1. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики: Избр. тр. в 3-х т. – М.: Наука, 1972. – Т. 1. – 400 с.
2 *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.
3. *Каменков Г. В.* Избранные труды в 2-х т. Т. 11. Устойчивость и колебания нелинейных систем. – М.: Наука, 1972. – 214 с.
4. *Малкин И. Г.* Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях // Прикл. математика и механика. – 1942. – **6**, вып. 6. – С. 634–648.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
6. *Постников В. Н.* К теории устойчивости движения в критических случаях: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 1942. – 150 с.
7. *Калинин С. В.* Об устойчивости периодических движений в случае, когда один корень равен нулю // Прикл. математика и механика. – 1948. – **12**, вып. 5. – С. 671–672.
8 *Калинин С. В.* Об устойчивости периодических движений, когда характеристическое уравнение имеет два чисто мнимых корня. Сб. 1 // Вопросы прикладной математики и механики. – 1953. – С. 155–163.
9 *Калинин С. В.* Об устойчивости периодических движений, когда характеристическое уравнение имеет два чисто мнимых корня. Сб. 11 // Там же. – 1955. – С. 79–88.
10. *Дыхман Е. И.* О принципе сведения // Изв. АН КазССР. Сер. мат., мех. – 1950. – Вып. 4. – С. 73–84.
11. *Персидский К. П.* Некоторые критические случаи устойчивости счетных систем // Там же. – 1951. – Вып. 5. – С. 3–24.
12 *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Львов: Изд-во АН УССР, 1945. – 137 с.
13. *Лыкова О. Б.* О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности изолированного статистического решения // Укр. мат. журн. – 1957. – **9**, № 3. – С. 419–431.
14. *Лыкова О. Б.* О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности изолированного статистического решения // Докл. АН СССР. – 1957. – № 3. – С. 447–449.
15. *Лыкова О. Б.* Исследование решений нелинейных систем, близких к интегрирующимся, с помощью метода интегральных многообразий // Тр. Междунар. симп. по нелинейн. колебаниям. 1. – Киев, 1963. – С. 315–323.
16. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Там же. – С. 93–154.
17. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
18. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1964. – **28**, № 6. – С. 1297–1324.
19. *Kelly Al.* Stability of the Center-Stable Manifold // J. Math. Anal. and Appl. – 1967. – **18**, № 2. – P. 20–24.
20. *Митропольский Ю. А., Белан Е. П.* О принципе сведения в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 5. – С. 654–660.
21 *Самойленко А. М.* Изучение динамических систем с помощью знакопостоянных функций // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 374–384.

22. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1974. – 415 с.
23. *Барис Я. С.* Принцип сведения в задаче об условной устойчивости // Мат. физика. – 1979. – Вып. 26. – С. 3–6.
24. *Лыкова О. Б.* Об одночастотных колебаниях в системах с медленно меняющимися параметрами // Укр. мат. журн. – 1957. – **8**, № 2. – С. 155–161.
25. *Лыкова О. Б.* О некоторых свойствах решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами // Там же. – 1960. – **12**, № 3. – С. 267–278.
26. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Приближенные интегральные многообразия систем дифференциальных уравнений. – Киев, 1979. – 19 с. – (Препринт АН УССР / Ин-т математики; 79.08).
27. *Лыкова О. Б.* Развитие метода интегральных многообразий Боголюбова – Митропольского // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 1. – С. 33–46.
28. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Приближенные интегральные многообразия в теории устойчивости. – Киев, 1988. – 64 с. – (Препринт АН УССР / Ин-т математики; 88.48).
29. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Применение приближенных интегральных многообразий в теории устойчивости. – Киев, 1989. – 46 с. – (Препринт АН УССР. Ин-т математики; 89.01).
30. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. I // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 107–113.
31. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. II // Там же. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1315–1321.
32. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости // Докл. АН СССР. – 1990. – **311**, № 2. – С. 270–273.
33. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. III // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1324–1329.
34. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. IY // Там же. – 1991. – **43**, № 12. – С. 1696–1702.
35. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
36. *Гольдштейн В. М., Соболев В. А.* Качественный анализ сингулярно-возмущенных систем. – Новосибирск, 1988. – 154 с.
37. *Лыкова О. Б.* О принципе сведения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 4. – С. 464–471.
38. *Лыкова О. Б.* О принципе сведения для дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Там же. – 1975. – **27**, № 2. – С. 240–243.
39. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
40. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 376 с.
41. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 379 с.
42. *Foias C., Sell G. R. Temam R.* Variétés inertielles des équations différentielles dissipatives // C. R. Acad. Sci. Ser. – 1985. – **I. 301**. – P. 139–141.
43. *Foias C., Manley O., Temam R.* Sur l'interaction des petits et grands tourbillons dans des écoulements turbulents // Ibid. – 1987. – **305**. – P. 497–500.
44. *Foias C., Sell G. R. Temam R.* Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations // J. Different. Equat. – 1988. – **73**. – P. 309–353.
45. *Mallet-Paret J., Sell G. R.* Inertial manifolds for reaction diffusion equations in higher space dimensions // J. Amer. Math. Soc. – 1988. – **1**. – P. 805–866.
46. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer, 1988. – 500 p.
47. *Integral* manifolds and inertial manifolds for dissipative partial differential equations / P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam. – New York: Springer, 1989. – 124 p.
48. *Marion M.* Approximate inertial manifolds for the pattern formation Cahn–Hillard equation // Math. Mod. and Num. Anal. – 1989. – **23**. – P. 463–488.
49. *Temam R.* Induced trajectories and approximate inertial manifolds // Ibid. – P. 541–581.
50. *Чуешов И. Д.* Математические основы теории нерегулярных колебаний бесконечномерных систем. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1991. – 80 с.
51. *Чуешов И. Д.* Введение в теорию интегральных многообразий. Учебное пособие. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1992. – 87 с.
52. *Temam R.* Attractors for the Navier–Stokes equations: localisation and approximation // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math. – 1989. – **36**. – P. 629–647.

Получено 30. 11. 92