УДК 517.9

А. М. Самойленко, чл.-кор. АН України (Ін-т математики АН України, Київ),
О. Я. Тимчишин, асп.,
А. К. Прикарпатський, д-р фіз.-мат. наук (Ін-т прикл. пробл. математики, Львів)

ГЕОМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ ПУАНКАРЕ – МЕЛЬНИКОВА ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО РОЗЩЕПЛЕННЯ МНОГОВИДІВ ПОВІЛЬНО ЗБУРЕНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ. I *

On the basis of Poincare – Melnikov geometric analysis, sufficient criteria of heteroclinic splitting of separatrix manifolds are studied for slowly perturbed nonlinear dynamical systems with a small parameter. An example of disappearance of adiabatic invariance is considered for a certain mechanic system on the plane.

На основі розвитку геометричних ідей Пуанкаре – Мельникова вивчаються достатні критерії трансверсального розщеплення гетероклінічних сепаратрисних многовидів повільно збурених нелінійних динамічних систем з малим параметром. Розглянуто приклад руйнування адіабатичної інваріантності в одній системі на площині.

1. Вступ. В останні два десятиріччя зростає число досліджень, присвячених вивченню якісної поведінки динамічних систем різної природи, що обумовлено в значній мірі спробами пояснити зародження турбулентності в потоці рідини на основі поняття дивного (нерегулярного) атрактора. В більшості цих досліджень головну роль відіграє питання про структуру та стійкість можливих граничних режимів, вивчення яких дозволяє наблизитись до розуміння механізмів виникнення нерегулярностей та стохастизації динаміки в реальних системах. Явище стохастизації в детермінованих динамічних системах вперше було спостережене в класичних працях А. Пуанкаре по вивченню механізму руйнування гомоклінічних сепаратрисних многовидів при дії на динамічну систему слабких періодичних в часі збурень. Ці дослідження були суттєво продовжені в 60-х рр. московським математиком В. К. Мельниковим [1], який уперше запропонував ефективний критерій виникнення трансверсального розщеплення гомо- та гетероклінічних сепаратрисних многовидів для планарних динамічних систем, що приводить до явища стохастизації розв'язків в околі гіперболічних особливих точок згідно з теоремою Біркгофа – Смейла [2]. Ці дослідження були продовжені в працях [3 – 6] та ін., де в основному завершено задачу побудови аналогу теореми Пуанкаре – Мельникова для багатовимірних слабкозбурених нелінійних динамічних систем.

В даному дослідженні теорія Пуанкаре – Мельникова адаптується до важливої для застосувань задачі виникнення трансверсального розщеплення гомоклінічних сепаратрисних многовидів повільно збурених нелінійних гамільтонових динамічних систем у багатовимірному просторі. Такі системи, як відомо [5 – 7], мають адіабатичні інваріанти, які характеризують регулярну деформацію інваріантних многовидів при збуренні, що гарантує відома [8] КАМ-теорія. Як показує теорія Пуанкаре – Мельникова [5 – 7], а також результати нашого дослідження, при певних умовах на слабке збурення динамічної системи вказані вище адіабатичні інваріанти завжди руйнуються в околі гіперболічних особливих точок, що породжують гетероклінічні структури.

2. Теорія Пуанкаре – Мельникова: геометричний підхід. Нехай задана нелінійна динамічна система

$$du/dt = K(u) \tag{1}$$

в $\mathbb{R}^n \ni u$, $n \in N$, — довільне натуральне число, $K\colon \mathbb{R}^n \to T(\mathbb{R}^n)$ — гладке векторне поле і $t \in \mathbb{R}$ — еволюційний параметр. Будемо також вважати, що ця

* Робота виконана в рамках наукового проекту Державного комітету України по науці і технологіям.

© А. М. САМОЙЛЕНКО, О. Я. ТИМЧИШИН, А. К. ПРИКАРПАТСЬКИЙ, 1993

динамічна система має гетероклінічну орбіту $\{\sigma(t): t \in \mathbb{R}\}$, що є біасимптотичною сепаратрисою до особливих гіперболічних [6] точок $\bar{u}_j \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, 2}$. Визначимо стандартним чином стійкі та нестійкі многовиди цих особливих точок [2, 6] та позначимо їх через $W^s(\bar{u}_j)$ та $W^u(\bar{u}_j)$, $j = \overline{1, 2}$, відповідно. Дотичні простори $T(W^{s,u})$ цих многовидів вздовж гетероклініки $\operatorname{orb}\sigma \subset \mathbb{R}^n$ визначаються локально розв'язками рівняння у варіаціях вигляду

$$d\alpha/dt = K'(\sigma)\alpha, \quad \alpha \in T(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

де $K'(\sigma)$ — значення відображення Якобі — похідної Фреше в $\mathbb{R}^n$ K': $T(\mathbb{R}^n) \to T(\mathbb{R}^n)$ вздовж орбіти сепаратриси $\operatorname{orb}\sigma$. Тобто, локально стійкі та нестійкі многовиди $W^{s,u}_{\text{loc}}(\bar{u}_j)$, $j = \overline{1, 2}$, можуть бути зображені таким чином:

$$W^{s,u}_{\text{loc}}(\bar{u}_j) = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} \{\sigma(t_0) + \varepsilon\alpha^{s,u}(t_0) + O(\varepsilon^2)\}, \tag{3}$$

де $\alpha^{s,u} \in T(\mathbb{R}^n)/T(\sigma)$ — обмежені експоненціально-дихотомічні [9] розв'язки рівняння (2) при $t_0 \to \pm\infty$ відповідно. Згідно з [4, 6] визначимо проектори вздовж орбіти $\operatorname{orb}\sigma$

$$\begin{aligned} P^s_j(t_0)&: T_{\sigma(t_0)}(\mathbb{R}^n) \to T_{\sigma(t_0)}(W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_j)), \\ P^u_j(t_0)&: T_{\sigma(t_0)}(\mathbb{R}^n) \to T_{\sigma(t_0)}(W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_j)), \end{aligned} \tag{4}$$

де $j = \overline{1, 2}$ і $t_0 \in \mathbb{R}$. Легко встановити, що проектори (4) визначаються ефективно з наступних аналітичних умов: $j = \overline{1, 2}$, $t_0 \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} (1 - P^{s*}_j(t_0))&:\ T^*_{\sigma(t_0)}(\mathbb{R}^n) = T^{\perp}_{\sigma(t_0)}(W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_j)), \\ (1 - P^{u*}_j(t_0))&:\ T^*_{\sigma(t_0)}(\mathbb{R}^n) = T^{\perp}_{\sigma(t_0)}(W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_j)), \end{aligned} \tag{5}$$

де операція спряження "*" визначається відносно стандартного скалярного добутку в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, у випадку існування регулярної [6] гетероклінічної структури Γ_σ динамічної системи (1) справедлива рівність

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma &:= W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_1) \cap W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_2) = \\ &= \{\sigma(t_0; s_0): t_0 \in \mathbb{R},\ s_0 = (s_{01}, \dots, s_{0,r-1}) \in S^{r-1}\}, \end{aligned} \tag{6}$$

де S^{r-1} — $(r-1)$-вимірний зв'язний підмноговид $\mathbb{R}^n$, причому

$$r = \dim \Gamma_\sigma = \dim\,[\operatorname{Range} P^s_2(t_0) \cap \operatorname{Range} P^u_1(t_0)]$$

для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$, а також виконані очевидні умови вибору t_σ-параметризації:

$$\lim_{t_0 \to -\infty} \sigma(t_0) = \bar{u}_1, \qquad \lim_{t_0 \to +\infty} \sigma(t_0) = \bar{u}_2.$$

Прикладами реалізації гетероклінічної структури вигляду (6) є нелінійні динамічні системи з симетріями, зокрема, цілком інтегровні [6, 7].

Розглянемо таку задачу: вивчити поведінку та закономірності нестійкості гетероклінічної структури (6) при слабкій ε-деформації вихідної динамічної системи (1):

$$du/dt = K(u) + \varepsilon F(u; t; \nu) \quad \mathbb{R} \ni \varepsilon \to 0, \tag{7}$$

де $F(\cdot; t; \nu)\colon \mathbb{R}^n \to T(\mathbb{R}^n)$ — гладке відображення, залежне 2π-періодично від еволюційного параметра $t \in \mathbb{R}$ та числового вектора параметрів $\nu \in \mathbb{R}^k$, причому $k \geq r$.

При ε-збуренні (7) вихідної динамічної системи (1) гіперболічні особливі точки $\bar{u}_j \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, 2}$, зазнають у загальному випадку ε-деформації до гіперболічних періодичних $O(\varepsilon)$-орбіт $\operatorname{orb} \bar{u}_{j,\varepsilon}$, $j = \overline{1, 2}$, з відповідними локально стійкими та нестійкими многовидами $W^{s,u}_{\mathrm{loc}}(\bar{u}_{j,\varepsilon})$, $j = \overline{1, 2}$. Як звичайно [6], гіперболічність цих періодичних орбіт означає гіперболічність відповідного відображення Пуанкаре, що в конкретному випадку перевіряється простими розрахунками. Щоб уникнути нелегкої задачі визначення цих многовидів в околі гетероклінічної сепаратриси $\operatorname{orb} \sigma$ незбуреної динамічної системи (7), віднормуємо динамічну систему (7) в околі кожної гіперболічної періодичної $O(\varepsilon)$-орбіти $\operatorname{orb} \bar{u}_{j,\varepsilon}$, $j = \overline{1, 2}$, за допомогою звичайного зсуву $u \to u + \bar{u}_{j,\varepsilon}(t) - \bar{u}_j$, $j = \overline{1, 2}$. Нехай після зсуву в околі гіперболічної особливої точки $\bar{u}_1 \in \mathbb{R}^n$ ми одержали ефективну нелінійну динамічну систему

$$du/dt = K(u) + F_1(u; t; \nu, \varepsilon), \quad \mathbb{R} \ni \varepsilon \to 0, \tag{7_1}$$

яка при $\varepsilon \neq 0$ має ту ж інваріантну особливу точку $\bar{u}^{(1)}_{1,\varepsilon} = \bar{u}_1 \in \mathbb{R}^n$, що й динамічна система (7) при $\varepsilon = 0$, причому

$$F_1(u; t; \nu, \varepsilon) = [K'(u) - K'(\bar{u}_1)](\bar{u}_{1,\varepsilon} - \bar{u}_1) + \varepsilon F(u; t; \nu) - \varepsilon F(\bar{u}_1; t; \nu) + O(\varepsilon^2).$$

В околі ж точки $\bar{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ динамічна система (7_1) має нестійку періодичну гіперболічну $O(\varepsilon)$-траєкторію $\bar{u}^{(1)}_{2,\varepsilon} = \bar{u}_{2,\varepsilon} - \bar{u}_{1,\varepsilon} + \bar{u}_1 - \bar{u}_2$. Аналогічний зсув в околі гіперболічної особливої точки $\bar{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ приводить динамічну систему (7) до наступної:

$$du/dt = K(u) + F_2(u; t; \nu, \varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \tag{7_2}$$

яка має при $\varepsilon \neq 0$ інваріантну гіперболічну особливу точку $\bar{u}^{(2)}_{2,\varepsilon} = \bar{u}_2 \in \mathbb{R}^n$, що й динамічна система (7) при $\varepsilon = 0$, причому

$$F_2(u; t; \nu, \varepsilon) = [K'(u) - K'(\bar{u}_2)](\bar{u}_{2,\varepsilon} - \bar{u}_2) + \varepsilon F(u; t; \nu) - \varepsilon F(\bar{u}_2; t; \nu) + O(\varepsilon^2).$$

Відповідно в околі точки $\bar{u}_1 \in \mathbb{R}^n$ динамічна система (7_2) має гіперболічну періодичну $O(\varepsilon)$-орбіту $\bar{u}^{(2)}_{1,\varepsilon} = \bar{u}_{1,\varepsilon} - \bar{u}_{2,\varepsilon} - \bar{u}_1 + \bar{u}_2$. Проведений опис інваріантних множин в околі особливих точок нелінійної динамічної системи (7) при $\varepsilon \to 0$ дає можливість скористатись лінійною теорією рівнянь у варіаціях вздовж гетероклінічної сепаратриси $\operatorname{orb} \sigma$ для опису відповідних локально стійких $W^s_{\mathrm{loc}}(\bar{u}_{j,\varepsilon})$, $j = \overline{1, 2}$, та нестійких $W^u_{\mathrm{loc}}(\bar{u}_{j,\varepsilon})$, $j = \overline{1, 2}$, многовидів ε-деформованої динамічної системи (7). По аналогії з виразами (3) можна побудувати за допомогою динамічних систем (7_1) і (7_2) стійкі та нестійкі многовиди $W^{s,u}_{\mathrm{loc}}(\bar{u}_{j,\varepsilon})$, $j = \overline{1, 2}$, динамічної системи (7), грунтуючись на твердженні наступної теореми.

Теорема 1. *В околі гетероклінічної орбіти* $\operatorname{orb} \sigma$ *динамічної системи* (7) *при* $\varepsilon \to 0$ *локально стійкі та нестійкі многовиди* $W^{s,u}_{\mathrm{loc}}(\bar{u}_{j,\varepsilon})$, $j=\overline{1,2}$, *відповідних відображень Пуанкаре мають наступне зображення:*

$$W^{s,u}_{\mathrm{loc}}(\bar{u}_{j,\varepsilon}) = \bigcup_{t_0\in\mathbb{R}} \{\sigma(t_0) - \bar{u}_j + \bar{u}_{j,\varepsilon}(t_0) + g_j^{s,u}(t_0; \xi_j^{s,u}; \varepsilon) + O(\varepsilon^2)\}, \quad (8)$$

де для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_j^{s,u} \in T_{\sigma(t_0)}(W^{s,u}_{\mathrm{loc}}(\bar{u}_j))/T_{\sigma(t_0)}\sigma$, $j=\overline{1,2}$,

$$g_2^s(t_0; \xi^s; \varepsilon) = P_2^s(t_0)\bar{\alpha}_2^s + (1-P_2^s(t_0))\int_{+\infty}^{t_0} ds\, G_\sigma(t_0,s)\, F_2(\sigma(s); s-t_0; \nu, \varepsilon),$$

$$g_1^u(t_0; \xi^u) = P_1^u(t_0)\bar{\alpha}_1^u + (1-P_1^u(t_0))\int_{-\infty}^{t_0} ds\, G_\sigma(t_0,s)\, F_1(\sigma(s); s-t_0; \nu, \varepsilon), \quad (9)$$

$G_\sigma(t,s)\colon T(\mathbb{R}^n)\to T(\mathbb{R}^n)$, $t, s\in\mathbb{R}$, — *фундаментальний розв'язок лінійного рівняння в варіаціях* (2) *вздовж орбіти* $\operatorname{orb}\sigma$, $\xi_j^{s,u} := P_j^{s,u}(t_0)\,\bar{\alpha}_j^{s,u}$, $j=\overline{1,2}$, *причому для всіх* $t_0\in\mathbb{R}$ *для деяких векторів* $\bar{\alpha}_j^{s,u}\in T_{\sigma(t_0)}(\mathbb{R}^n)$ *норми* $\|\xi_j^{s,u}\| \ll \varepsilon$, $j=\overline{1,2}$.

Доведення. Покладемо $u(t)=\sigma(t+t_0)+g_1^u(t+t_0,t_0;\varepsilon)$, $t_0\in\mathbb{R}$, в рівнянні (7_1), що має особливу точку $\bar{u}^{(1)}_{1,\varepsilon}=\bar{u}_1\in\mathbb{R}^n$ при $\varepsilon\to 0$. Тоді маємо

$$d g_1^u/dt = K'(\sigma(t))g_1^u + F_1(\sigma(t); t-t_0; \nu,\varepsilon) + h(t, t_0; g_1^u; \varepsilon,\nu), \quad (10)$$

де при $\varepsilon\to 0$

$$h(t,t_0; g_1^u;\varepsilon,\nu) := [K(\sigma(t)+g_1^u) - K(\sigma(t)) - K'(\sigma(t))g_1^u] + $$
$$+ F_1(\sigma(t)+\varepsilon g_1^u; t-t_0; \nu,\varepsilon) - F_1(\sigma(t); t-t_0; \nu,\varepsilon). \quad (11)$$

Гіперболічність відповідної особливої точки $\bar{u}_1\in\mathbb{R}^n$ при $\varepsilon\to 0$ дає можливість знайти такі дані Коші $\bar{\alpha}_1^u\in T_{\sigma(t_0)}(\mathbb{R}^n)$ для нелінійного рівняння у варіаціях (10), що його розв'язки при $t\in(-\infty, t_0]$ будуть обмеженими. А саме: з (10) знаходимо, що розв'язок рівняння (10) має вигляд:

$$g_1^u(t,t_0; \bar{\alpha}_1^u;\varepsilon) = G_\sigma(t,t_0)P_1^u(t_0)\bar{\alpha}_1^u +$$
$$+ G_\sigma(t,t_0)P_1^u(t_0)\int_{t_0}^{t} ds\, G_\sigma(t,s)\{F_1(\sigma(s); s-t_0; \nu,\varepsilon) + h(s,t_0; g_1^u;\varepsilon,\nu)\} +$$
$$+ G_\sigma(t,t_0)(1-P_1^u(t_0))\int_{-\infty}^{t_0} ds\, G_\sigma(t_0,s)\{F_1(\sigma(s); s-t_0; \nu,\varepsilon) + h(s,t_0; g_1^u;\varepsilon,\nu)\}, \quad (12)$$

де $t\in(-\infty,t_0]$. При умові, що величина $\xi_1^u := P_1^u(t_0)\bar{\alpha}_1^u$ задовольняє нерівність $\|\xi_1^u\|\ll\varepsilon$, можна встановити методом стискуючих відображень, що рівняння (12) має на відрізку $(-\infty, t_0]$ обмежений для всіх $t_0\in\mathbb{R}$ розв'язок вигляду $g_1^u(t,t_0;\bar{\alpha}_1^u;\varepsilon)+O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon\to 0$. Покладаючи в останньому $t=t_0\in\mathbb{R}$, знаходимо, що $g_1^u(t_0;\xi_1^u;\varepsilon)=g_1^u(t_0,t_0;\bar{\alpha}_1^u;\varepsilon)$, тобто є елементом простору $W^u_{\mathrm{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})$ згідно з (8) та (9).

Аналогічні міркування для особливої точки $\overline{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ приводять до такого зображення елементів простору $W^s_{\text{loc}}(\overline{u}_{2,\varepsilon})$ при $\varepsilon \to 0$: $g^s_2(t_0;\ \xi^s_2;\ \varepsilon) = g^s_2(t_0, t_0;\ \overline{\alpha}^s_2;\ \varepsilon)$, де $t \in [t_0, \infty)$;

$$dg^s_2/dt = K'(\sigma(t))g^s_2 + F_2(\sigma(t);\ t - t_0;\ \nu, \varepsilon) + h(t, t_0;\ g^s_2; \varepsilon, \nu). \tag{13}$$

Рівняння (13) при $\varepsilon \to 0$ і $\|\xi^s_2\| << \varepsilon$, де $P^s_2(t_0)\overline{\alpha}^s_2 = \xi^s_2$, теж допускає для всіх $t \in [t_0, \infty)$ обмежений розв'язок, що випливає з такого його зображення:

$$g^s_2(t, t_0;\ \overline{\alpha}^s_2; \varepsilon) = G_\sigma(t, t_0)P^s_2(t_0)\overline{\alpha}^s_2 +$$

$$+ G_\sigma(t, t_0)P^s_2(t_0)\int_{t_0}^{t} ds\, G_\sigma(t, s)\{F_2(\sigma(s);\ s - t_0;\ \nu, \varepsilon) + h(s, t_0;\ g^s_2;\ \varepsilon, \nu)\} +$$

$$+ G_\sigma(t, t_0)(1 - P^s_2(t_0))\int_{\infty}^{t_0} ds\, G_\sigma(t_0, s)\{F_2(\sigma(s);\ s - t_0;\ \nu, \varepsilon) + h(s, t_0;\ g^s_2;\ \varepsilon, \nu)\}. \tag{14}$$

Покладаючи далі $g^s_2(t_0;\ \xi^s_2;\ \varepsilon) + O(\varepsilon^2) = g^s_2(t_0, t_0;\ \overline{\alpha}^s_2;\ \varepsilon)$, знаходимо вираз із (9), що й доводить твердження теореми.

Структуру локально стійких і нестійких многовидів $W^{s,u}_{\text{loc}}(\overline{u}_{j,\varepsilon})$, $j = \overline{1, 2}$, відповідних відображень Пуанкаре ми одержали як інфінітезімальну деформацію відповідних стійких та нестійких многовидів $W^{s,u}(\overline{u}_j)$, $j = \overline{1, 2}$, вихідної динамічної системи (7) при $\varepsilon = 0$. Останні мають структуру розшарування з базою $\operatorname{orb}\sigma$, звідки випливає, що вектори $\xi^{s,u}_j \in T_{\sigma(t_0)}(W^{s,u}(\overline{u}_j))/T_{\sigma(t_0)}\sigma$ відповідно при $j = \overline{1, 2}$. Враховуючи локальне зображення стійких та нестійких многовидів $W^{s,u}_{\text{loc}}(\overline{u}_j)$, $j = \overline{1, 2}$, асоційованих з вихідною гетероклінічною сепаратрисою $\operatorname{orb}\sigma$, переходимо до розгляду їх просторового розшарування, зокрема, явища їх трансверсального перетину при $\varepsilon \to 0$. Останнє приводить до утворення спеціальної гетероклінічної структури типу „підкови" Смейла ("horseshoe") згідно з відомою теоремою Бірхгофа – Смейла [2, 6], що гарантує дуже складну динаміку в околі особливих точок. Важливим також для аналізу динаміки системи є „явище Ньюхауза" квадратичного дотику відповідних стійких та нестійких многовидів $W^{s,u}_{\text{loc}}(\overline{u}_{j,\varepsilon})$, $j = \overline{1, 2}$.

У випадку трансверсального розщеплення стійких та нестійких многовидів $W^{s,u}(\overline{u}_j)$, $j = \overline{1, 2}$, динамічної системи (7) при $\varepsilon \to 0$ існує точка

$$p \in W^u_{\text{loc}}(\overline{u}_{1,\varepsilon}) \cap W^s_{\text{loc}}(\overline{u}_{2,\varepsilon}),$$

для якої виконана геометрична умова трансверсальності: $p \in W^u_{\text{loc}}(\overline{u}_{1,\varepsilon}) \cap$ $\cap\ W^s_{\text{loc}}(\overline{u}_{2,\varepsilon})$

$$T_p(W^u_{\text{loc}}(\overline{u}_{1,\varepsilon})) + T_p(W^s_{\text{loc}}(\overline{u}_{2,\varepsilon})) = T_p(\mathbb{R}^n). \tag{15}$$

Щоб ефективно розкрити умову трансверсальності (15), зауважимо, що дотичний простір $T_\sigma(\mathbb{R}^n)$ вздовж $\operatorname{orb}\sigma$ допускає наступне зображення [4, 2]:

$$T_\sigma(\mathbb{R}^n) = [\text{Range } P^s_2 \cap \text{Range } P^u_1] \oplus [\text{Range } P^s_2 \cap \text{Range}\,(1 - P^u_1)] \oplus$$

$$\oplus\ [\text{Range}\,(1 - P^s_2) \cap \text{Range } P^u_1] \oplus [\text{Range}\,(1 - P^s_2) \cap \text{Range}\,(1 - P^u_1)]. \tag{16}$$

Відповідно до цього розкладу одержуємо, що розшарування $W^{s,u}(\bar{u}_{j,\varepsilon})$, $j = \overline{1,\ 2}$, мають згідно з (8) і (9) наступну покомпонентну форму:

$$g_1^u(t_0;\ \xi_1^u;\ \varepsilon) = (t_0, s_0;\ \xi_1^u,\ \eta_1^u,\ \delta_1^u),$$
$$g_2^s(t_0;\ \xi_2^s;\ \varepsilon) = (t_0, s_0;\ \eta_2^s,\ \xi_2^s,\ \delta_2^s), \tag{17}$$

де

$$(t_0, s_0) \in \ \mathrm{Range}\, P_2^s(t_0) \cap \mathrm{Range}\, P_1^u(t_0),$$
$$\xi_1^u,\ \eta_2^s \ \in\ \mathrm{Range}\ P_2^s(t_0) \cap \mathrm{Range}\,(1 - P_1^u)(t_0)),$$
$$\xi_2^s,\ \eta_1^u \ \in\ \mathrm{Range}\,(1 - P_2^s\,(t_0)) \cap \mathrm{Range}\ P_1^u(t_0),$$
$$\delta_2^s,\ \delta_1^u \ \in\ \mathrm{Range}\,(1 - P_2^s\,(t_0)) \cap \mathrm{Range}\,(1 - P_1^u\,(t_0)),$$

причому,

$$\eta_2^s \doteq \eta_2^s(t_0, s_0, \xi_2^s), \quad \eta_1^u = \eta_1^u(t_0, s_0, \xi_1^u)$$

і

$$\delta_2^s = \delta_2^s(t_0, s_0, \xi_2^s), \quad \delta_1^u = \delta_1^u(t_0, s_0, \xi_1^u)$$

для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$. Надалі ми будемо вимагати розв'язності наступних співвідношень:

$$\xi_2^s = \eta_1^u(t_0, s_0, \xi_1^u), \quad \xi_1^u = \eta_2^s(t_0, s_0, \xi_2^s) \tag{18}$$

для всіх моментів часу $t_0 \in \mathbb{R}$. В цьому випадку мірою розщеплення підмноговидів $W_{\mathrm{loc}}^{s,u}(\bar{u}_{j,\varepsilon})$, $j = \overline{1,\ 2}$, вздовж гетероклінічної сепаратриси $\mathrm{orb}\,\sigma$ буде підпростір $\mathrm{Range}\,(1 - P_2^s\,(t_0)) \cap \mathrm{Range}\,(1 - P_1^u\,(t_0))$, що є геометричною інтерпретацією методу редукції Ляпунова – Шмідта. Таким чином, величина вектора розщеплення многовидів $W_{\mathrm{loc}}^s(\bar{u}_{2,\varepsilon})$ і $W_{\mathrm{loc}}^u(\bar{u}_{1,\varepsilon})$ вздовж гетероклінічної орбіти $\mathrm{orb}\,\sigma$ при $\varepsilon \to 0$ буде мати вигляд

$$\delta(t_0, s_0, \varepsilon) = \delta_1^u(t_0, s_0;\ \xi_1^u;\ \varepsilon) - \delta_2^s(t_0, s_0;\ \xi_2^s;\ \varepsilon) + O(\varepsilon^2) \tag{19}$$

для всіх точок $t_0 \in \mathbb{R}$. Оскільки вектор $\delta(t_0,\ s_0, \varepsilon) \equiv \delta(t_0;\ s_0;\ \nu;\ \varepsilon) \in \mathrm{Range}\,(1 - P_2^s\,(t_0)) \cap \mathrm{Range}\,(1 - P_1^u\,(t_0))$ для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$, то можна ввести ефективні координати в цьому просторі як обмежені лінійні експоненціально-дихотомічні функціонали зі спряженого простору

$$\mathrm{Range}\,(1 - P_2^{s*}\,(t_0)) \cap \mathrm{Range}\,(1 - P_1^{u*}\,(t_0))$$

— простору початкових даних для обмежених по $t \in \mathbb{R}$ всіх розв'язків вздовж орбіти $\mathrm{orb}\,\sigma$ рівняння Лакса [5]

$$d\varphi\,/\,dt + K'^*(\sigma(t))\varphi = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

для динамічної системи (7) при $\varepsilon = 0$. Нехай $\dim\{\mathrm{Range}\,(1 - P_2^{s*}\,(t_0)) \cap \mathrm{Range}\,(1 - P_1^{u*}(t_0))\} = m \in \mathbb{Z}_+$ для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$; тоді, очевидно, $m = \dim\{\mathrm{Range}\,(1 - P_2^s\,(t_0)) \cap \mathrm{Range}\,(1 - P_1^u\,(t_0))\}$ для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$. Враховуючи, що $r = \dim\{\mathrm{Range}\ P_2^s(t_0) \cap \mathrm{Range}\ P_1^u(t_0)\}$ для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$, одержуємо

$$r + m = \dim\{T_\sigma(\mathbb{R}^n)/\mathrm{Range}\,(P_2^s(t_0) + P_1^u(t_0))\} =$$
$$= \dim\{T_\sigma(W^s\,(\bar{u}_2)) + T_\sigma(W^u\,(\bar{u}_1))\}^{\perp} \le n = \dim \mathbb{R}^n.$$

Означення. *Будемо називати узагальненим вектором Мельникова набір координат вектора розщеплення* (19) *локально стійких та нестійких многовидів* $W^{s,u}_{\text{loc}}(\bar{u}_{j,\varepsilon})$, $j=\overline{1,\,2}$, *вздовж гетероклінічної орбіти* $\operatorname{orb}\sigma$ *відповідно до спряженого базису простору обмежених експоненціально-дихотомічних розв'язків рівняння Лакса* (20).

Позначимо

$$\Phi^s_\sigma := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi\in T^*_\sigma(\mathbb{R}^n)\colon d\varphi/dt + K'^*(\sigma(t))\varphi = 0,\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\|\varphi(t)\|<\infty\},$$

і нехай $\dim\Phi^s_\sigma = m$. Якщо $\Phi^s_\sigma := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_j\in T^*_\sigma(\mathbb{R}^n)\colon j=\overline{1,\,m}\}$, то вектор Мельникова $\mu\in\mathbb{R}^m$ визначається як $\mu = d/d\varepsilon(\tilde{\mu})|_{\varepsilon=0}$, де узагальнений вектор Мельникова $\tilde{\mu}\in\mathbb{R}^m$ визначається в такій покомпонентній формі:

$$\tilde{\mu}_j(t_0,s_0;\nu,\varepsilon) := \langle\varphi_j(t_0,s_0),\ \delta(t_0,s_0;\nu,\varepsilon)\rangle, \tag{21}$$

де $j=\overline{1,\,m}$, $(t_0,s_0)\in\Gamma_\sigma$, $\nu\in\mathbb{R}^k$ і $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — звичайна білінійна форма на $T^*_\sigma(\mathbb{R}^n)\times T^*_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Використовуючи формули (9) та визначення (21), знаходимо, що вектор $\tilde{\mu}\in\mathbb{R}^m$ вираховується з точністю $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon\to 0$, у явному вигляді:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_j(t_0,s_0;\nu,\varepsilon) &:= \langle\varphi_j(t_0,s_0),\ \delta^u_1(t_0,s_0;\xi^u_1,\varepsilon)\rangle - \\
&\quad - \langle\varphi_j(t_0,s_0),\ \delta^s_2(t_0,s_0;\xi^s_2,\varepsilon)\rangle = \\
&= \langle\varphi_j(t_0,s_0),\ (1-P^u_1(t_0))\int_{-\infty}^{t_0} dt\,G_\sigma(t_0,t)F_1(\sigma(t);t-t_0;\nu)\rangle + \\
&\quad + \langle\varphi_j(t_0,s_0),\ (1-P^s_2(t_0))\int_{+\infty}^{t_0} dt\,G_\sigma(t_0,t)F_2(\sigma(t);t-t_0;\nu)\rangle + \\
&\quad + \langle\varphi_j(t_0,s_0),\ \Delta\bar{u}_{(t_0,\varepsilon)}(t_0)\rangle + O(\varepsilon^2) = \\
&= \langle(1-P^{u*}_1(t_0))\,\varphi_j(t_0,s_0),\ \int_{-\infty}^{t_0} dt\,G_\sigma(t_0,t)F_1(\sigma(t);t-t_0;\nu)\rangle + \\
&\quad + \langle(1-P^{s*}_2(t_0))\,\varphi_j(t_0,s_0),\ \int_{+\infty}^{t_0} dt\,G_\sigma(t_0,t)F_2(\sigma(t);t-t_0;\nu)\rangle + \\
&\quad + \langle\varphi_j(t_0,s_0),\ \Delta\bar{u}_{(t_0,\varepsilon)}(t_0)\rangle + O(\varepsilon^2) = \\
&= \langle\varphi_j(t_0,s_0),\ \int_{\mathbb{R}} dt\,G_\sigma(t_0,t)F_{(t_0)}(\sigma(t);t-t_0;\nu,\varepsilon)\rangle + \\
&\quad + \langle\varphi_j(t_0,s_0),\ \Delta\bar{u}_{(t_0,\varepsilon)}(t_0)\rangle + O(\varepsilon^2) = \\
&= \int_{\mathbb{R}} dt\langle\varphi_j(t,s_0),\ F_{(t_0)}(\sigma(t);t-t_0;\nu,\varepsilon)\rangle + \\
&\quad + \langle\varphi_j(t_0,s_0),\ \Delta\bar{u}_{(t_0,\varepsilon)}(t_0)\rangle + O(\varepsilon^2) := \varepsilon\mu_j(t_0,s_0,\nu) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{22}$$

де ми ввели такі позначення:

$$\begin{aligned}
F_{(t_0)}(\sigma(t);t-t_0;\nu,\varepsilon)\rangle &:= \varepsilon F(\sigma(t);t-t_0;\nu) - \varepsilon F(\bar{u}_{(t_0)}(t);t-t_0;\nu) + \\
&\quad + [K'(\sigma(t)) - K'(\bar{u}_{(t_0)}(t))]\,[\bar{u}_{(t_0,\varepsilon)}(t-t_0) - \bar{u}_{(t_0)}(t-t_0)],
\end{aligned}$$

$$\Delta \bar{u}_{(t_0,\varepsilon)}(t_0) = \Delta \bar{u}_{(t_0,\varepsilon)}(t_0-0) - \Delta \bar{u}_{(t_0,\varepsilon)}(t_0+0),$$

$$\bar{u}_{(t_0)}(t) = \begin{cases} \bar{u}_1, & t \in (-\infty,\ t_0], \\ \bar{u}_2, & t \in [t_0,\ \infty), \end{cases} \qquad \bar{u}_{(t_0,\varepsilon)}(t) = \begin{cases} \bar{u}_{1,\varepsilon}(t), & t \in (-\infty,\ t_0], \\ \bar{u}_{2,\varepsilon}(t), & t \in [t_0,\ \infty), \end{cases}$$

причому $j = \overline{1,\ m}$ і $(t_0,\ s_0;\ \nu) \in \Gamma_\sigma \times \mathbb{R}^k$ — набір довільних параметрів, що характеризують перетин многовидів $W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon})$ і $W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})$ при $\varepsilon \to 0$.

Виходячи з зображення (22) для $\tilde{\mu}$-вектора Пуанкаре – Мельникова, ми можемо визначити умову розщеплення стійкого та нестійкого многовидів $W^s(\bar{u}_2)$ і $W^u(\bar{u}_1)$ відповідно при ε-деформації (7) нелінійної динамічної системи (1) з гетероклінічною орбітою $\text{orb}\,\sigma$. А саме: вірна наступна теорема [1, 4, 6].

Теорема 2. *Якщо існує точка* $(t_0,\ s_0) \in \Gamma_\sigma$ *і параметр* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \to 0$, *такий, що вектор розщеплення* $\tilde{\mu}(t_0,\ s_0;\ \nu,\ \varepsilon) = 0$, *причому* $r \in \mathbb{N}$ *векторів* $\| \partial\tilde{\mu} / \partial t_0,\ \partial\tilde{\mu} / \partial s_0 \| (t_0,\ s_0;\ \nu,\ \varepsilon)$ *всі не рівні тотожно нулю в цій точці, то локально стійкий* $W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon})$ *та нестійкий* $W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})$ *многовиди відповідних відображень Пуанкаре перетинаються в точці* $p \in W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon}) \cap W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})$ *трансверсально.*

Доведення. Задамо локальні вирази для дотичних просторів $T_p(W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon}))$ і $T_p(W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon}))$ в точці $p \in W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon}) \cap W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})$:

$$\begin{aligned} T_p(W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon})) &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{ \| \partial(t_0,\ s_0;\ \eta^s_2,\ \xi^s_2,\ \delta^s_2) / \partial(t_0,\ s_0;\ \eta^s_2) \| \}, \\ T_p(W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})) &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{ \| \partial(t_0,\ s_0;\ \eta^u_1,\ \xi^u_1,\ \delta^u_1) / \partial(t_0,\ s_0;\ \eta^u_1) \| \}. \end{aligned} \tag{23}$$

Порівнюючи вирази (23) в локальних координатах многовидів $W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon})$ і $W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})$, легко бачити, що умова $\| \partial\delta^s_2 / \partial(t_0,\ s_0) \| \neq \| \partial\delta^u_1 / \partial(t_0,\ s_0) \|$ в точці $p \in W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon}) \cap W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})$ разом з умовою $\| \partial\xi^u_1 / \partial\eta^u_1 \| = O(\varepsilon^2)$ або $\| \partial\xi^u_1 / \partial\eta^u_1 \| \neq \varepsilon$ еквівалентні трансверсальності перетину многовидів $W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon})$ і $W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})$. Враховуючи викладене вище, знаходимо, що достатньою умовою трансверсального розщеплення многовидів $W^s(\bar{u}_2)$ і $W^u(\bar{u}_1)$ при деформації (7) є відмінність від нуля в точці перетину стовпчиків вектор-функцій $\| \partial\tilde{\mu}(t_0,\ s_0;\ \nu,\ \varepsilon) / \partial(t_0,\ s) \|$, тобто $p = p(t_0,\ s_0;\ \nu,\ \varepsilon) \in W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon}) \cap W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})$, коли $\tilde{\mu}(t_0,\ s_0;\ \nu,\ \varepsilon) = \varepsilon\mu(t_0,\ s_0;\ \nu) + O(\varepsilon^2) = 0$. Звідси випливає твердження теореми.

Оскільки вектор-функція Мельникова $\tilde{\mu}(t_0,\ s_0;\ \nu,\ \varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$ є невідомою в загальному випадку, то важливим є випадок, коли інформація про трансверсальне розщеплення сепаратрисної гетероклінічної структури міститься в вектор-функції Мельникова $\mu(t_0,\ s_0;\ \nu)$. А саме: з теореми (2) легко випливає наступне важливе твердження [3, 4, 6].

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми* 2, *причому* $k \geq r$, *а також існує така точка* $(\bar{t}_0,\ \bar{s}_0,\ \nu_0) \in \Gamma_\sigma \times \mathbb{R}^k$, *в якій виконуються такі додаткові обмеження:*

i) $\mu(\bar{t}_0,\ \bar{s}_0;\ \nu_0) = 0$;

ii) вектор-стовпчики матриці $\| \partial\mu / \partial(t_0,\ s_0) \| (\bar{t}_0,\ \bar{s}_0;\ \nu_0)$ *є ненульові*;

iii) $\operatorname{rank} \| \partial\mu / \partial\nu \| (\bar{t}_0,\ \bar{s}_0;\ \nu_0) = r$.

Тоді для достатньо малих значень параметра $\varepsilon \to 0$ *локально стійкий*

$W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon})$ *та нестійкий* $W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})$ *многовиди перетинаються трансверсально в деякій точці* $p \in W^s_{\text{loc}}(\bar{u}_{2,\varepsilon}) \cap W^u_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon})$.

Доведення. Якщо вектор Пуанкаре – Мельникова $\mu(\bar{t}_0, \bar{s}_0; \nu_0) = 0$ при $\varepsilon = 0$ в деякій точці $(\bar{t}_0, \bar{s}_0, \nu_0) \in \Gamma_\sigma \times \mathbb{R}^k$, то згідно з умовою iii) існує така точка $(\bar{t}_\varepsilon, \bar{s}_\varepsilon; \nu_\varepsilon) = \nu(\bar{t}_\varepsilon, \bar{s}_\varepsilon) \in \Gamma_\sigma \times \mathbb{R}^k$, що $\nu(\bar{t}_0, \bar{s}_0) = \nu_0 \in \mathbb{R}^k$ і $\mu(\bar{t}_\varepsilon, \bar{s}_\varepsilon; \nu_\varepsilon) = 0$, причому для точки $(\bar{t}_\varepsilon, \bar{s}_\varepsilon; \nu_\varepsilon) \in \Gamma_\sigma \times \mathbb{R}^k$, близької при $\varepsilon \to 0$ до точки $(\bar{t}_0, \bar{s}_0, \nu_0) \in \Gamma_\sigma \times \mathbb{R}^k$, виконана по неперервності умова: всі вектори матриці $\| \partial\mu / \partial(t_0, s_0) \| (\bar{t}_\varepsilon, \bar{s}_\varepsilon; \nu_\varepsilon)$ теж ненульові. Отже, згідно з твердженням теореми 1 реалізується явище трансверсального розщеплення гетероклінічної структури Γ_σ, що й доводить сформульовану вище теорему.

Зауваження. Якщо виконані припущення теореми 3 і $\operatorname{rank} \| \partial\mu / \partial(t_0, s_0) \| (\bar{t}_0, \bar{s}_0; \nu_0) = r \le k$, то твердження теореми 3 залишаються, очевидно, справедливими.

Сформульовані вище твердження є, очевидно, ефективними достатніми критеріями трансверсального розщеплення гетероклінічної структури Γ_σ вихідної динамічної системи (7) при $\varepsilon \to 0$, якщо відома множина Φ^s_σ всіх обмежених експоненціально-дихотомічних по $t \in \mathbb{R}$ розв'язків рівняння Лакса (20). Справедлива наступна теорема [10].

Теорема 4. *Нехай динамічна система* (1) *має* $m_\gamma \in \mathbb{Z}_+$ *регулярні закони збереження* $\gamma_j \in D(\mathbb{R}^n)$, $j = \overline{1, m_\gamma}$; *тоді множина* $\Phi^s_\sigma(\gamma) \subset \Phi^s_\sigma$, *де*

$$\Phi^s_\sigma(\gamma) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{ \varphi_j = \operatorname{grad} \gamma_j(\sigma) \colon j = \overline{1, m_\gamma} \}. \tag{24}$$

Доведення. Довільний самоспряжений розв'язок рівняння Лакса $L_K\varphi = \varphi_t + K'^*(\sigma)\varphi = 0$, де $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to T^*_\sigma(\mathbb{R}^n)$, має зображення $\varphi(u) = \operatorname{grad}\gamma(u)$ для деякого функціоналу $\gamma \in D(\mathbb{R}^n)$. Далі легко бачити, що останнє зображення приводить до того, що $L_K\gamma = 0$, тобто $d\gamma / dt = 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, де L_K — похідна Лі [10] вздовж векторного поля $K \colon \mathbb{R}^n \to T(\mathbb{R}^n)$, що й доводить твердження теореми, оскільки $\sup_{t \in \mathbb{R}} \| \varphi(\sigma(t)) \| < \infty$.

Сформульоване вище твердження теореми 4 особливо ефективне у випадку цілком інтегровної по Ліувіллю вихідної нелінійної динамічної системи (1). Остання, зокрема, повинна бути гамільтоновою на просторі парної розмірності $\mathbb{R}^{2n}$ і мати рівно $n \in \mathbb{N}$ функціонально незалежних інваріантів $\gamma_j \in D(\mathbb{R}^{2n})$, $j = \overline{1, n}$, на інтегральному многовиді $M_\gamma = \{ u \in \mathbb{R}^{2n} \colon \gamma_j(u) = \bar{\gamma}_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1, n} \}$. Тоді легко бачити, що $\Phi^s_\sigma(\gamma) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{ \varphi_j = \operatorname{grad}\gamma_j(\sigma) \colon j = \overline{1, n} \}$. Дійсно, враховуючи, що для простору всіх розв'язків рівняння Лакса (20) $\Phi_\sigma = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{ \varphi \in T^*_\sigma(\mathbb{R}^{2n}) \colon \varphi_t + K'^*(u)\varphi = 0 \}$ $\dim \Phi_\sigma = 2n$, а також той факт, що фазовий об'єм гамільтонової динамічної системи є інваріантним, знаходимо $\dim \Phi^s_\sigma = n$ і $\Phi^s_\sigma = \Phi^s_\sigma(\gamma)$.

Розглянемо інший випадок побудови множини Φ^s_σ на основі аналізу множини $A_\sigma = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{ a_j \in T_\sigma(\mathbb{R}^n) \colon d\alpha_j / dt = K'(\sigma)\alpha_j,\ j = \overline{1, n} \}$. Очевидно, функціонали $\bar{\varphi}_j \in T^*_\sigma(\mathbb{R}^n)$ вигляду

$$\overline{\varphi}_j(\cdot) := \det\|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}, (\cdot), \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n\|, \quad i = \overline{1, n}, \tag{25}$$

утворюють базис простору розв'язків Φ_σ, тобто $\Phi_\sigma = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\overline{\varphi}_j \in T^*(\mathbb{R}^n_\sigma)$: $j = \overline{1, n}\}$, оскільки, як легко переконатись, $d\overline{\varphi}_j/dt + K'^*(\sigma)\overline{\varphi}_j = 0$, $j = \overline{1, n}$. Вибираючи з простору Φ_σ вигляду (25) підпростір $\Phi^s_\sigma \subset \Phi_\sigma$ за допомогою дихотомічних асимптотик елементів множини A_σ, одержуємо явну детермінантну форму для вектор-функції Пуанкаре – Мельникова (21), що була раніше введена незалежно в роботах [3, 5, 6].

3. Розщеплення гетероклінічної структури повільно збурених динамічних систем та деякі аспекти теорії стійкості адіабатичних інваріантів. Нехай у просторі $\mathbb{R}^{n+l}$ задана нелінійна динамічна система вигляду

$$\begin{aligned} du/dt &= K(u, v) + \varepsilon F(u, v, t; \nu), \\ dv/dt &= \varepsilon G(u, v, t; \nu), \qquad \varepsilon \to 0, \end{aligned} \tag{26}$$

де $(u, v)^\tau \in \mathbb{R}^{n+l}$, $K, F(\cdot; t; \nu)$ і $G(\cdot; t; \nu): M \to T(M)$ — гладкі 2π-періодичні по $t \in \mathbb{R}$ відображення і $\nu \in \mathbb{R}^k$ — числові параметри. Вважатимемо також, що при $\varepsilon = 0$ динамічна система (26) має гетероклінічну структуру $\Gamma_{(\sigma, v_0)}$ з сепаратрисною орбітою $\mathrm{orb}(\sigma, v_0)$ із властивістю $\lim\limits_{t\to-\infty}\sigma(t) = \overline{u}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t) = \overline{u}_2 \in \mathbb{R}^n$, причому особливі точки $(\overline{u}_j, v_0)^\tau \in \mathbb{R}^{n+l}$, $j = \overline{1, 2}$, гіперболічні для всіх значень $v_0 \in S^{r-1}$, де множина $S^{r-1} \subset \mathbb{R}^{n+l}$ є зв'язним многовидом розмірності $(r-1) \in \mathbb{Z}_+$. Ми можемо тепер визначити $\bar{l}$-параметричну гетероклінічну структуру $\Gamma_{(\sigma, v_0)}$, що є перетином стійкого $W^s(\overline{u}_2, v_0)$ та нестійкого $W^u(\overline{u}_1, v_0)$ многовидів, тобто $\Gamma_{(\sigma, v_0)} = W^s(\overline{u}_2, v_0) \cap W^u(\overline{u}_1, v_0)$. Причому $\dim\Gamma_{(\sigma, v_0)} = r$, $r - 1 = \dim S^{r-1}$, існує сім'я орбіт $\{\sigma(\cdot; v_0)\}$, гетероклінічних для всіх $v_0 \in S^{r-1}$, де S^{r-1} — зв'язний $(r-1)$-вимірний підмноговид в $\mathbb{R}^{n+l}$. Таким чином, гетероклінічна структура $\Gamma_{(\sigma, v_0)}$ динамічної системи (26) повністю підпадає під критерій теорем 2 і 3 про її трансверсальне розщеплення при $\varepsilon \to 0$, якщо при $\varepsilon \to 0$ існують локально стійкий $W^s_{\mathrm{loc}}(\overline{u}_{2,\varepsilon}, v_0)$ та нестійкий $W^u_{\mathrm{loc}}(\overline{u}_{1,\varepsilon}, v_0)$ многовиди гіперболічних 2π-періодичних ε-деформацій $\mathrm{orb}(\overline{u}_{j,\varepsilon}, v_\varepsilon)^\tau \subset \mathbb{R}^{n+l}$ особливих точок $(\overline{u}_j, v_0)^\tau \subset \mathbb{R}^{n+l}$, $j = \overline{1, 2}$. Останню умову, як звичайно, перевіряємо за допомогою гіперболічності відповідного відображення Пуанкаре [2], на чому не зупинятимемось надалі.

Якщо вихідна динамічна система (26) при $\varepsilon = 0$ є гамільтоновою і цілком інтегровною по змінній $u \in \mathbb{R}^n$, то згідно з результатами п. 2 ми можемо одержати у явному вигляді множину

$$\Phi_{(\sigma, v_0)} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_j = \mathrm{grad}\,\gamma_j(\sigma, v_0) \in T^*(\mathbb{R}^{n+l}): \gamma_j \in D(\mathbb{R}^{n+l}), j = \overline{1, n_1}, n = 2n_1\},$$

а тим самим і вектор-функцію Мельникова $\mu(t_0, v) \in \mathbb{R}^m$ у явній формі: $j = \overline{1, n_1}$,

$$\varepsilon\mu_j(t_0, v_0; \nu) = \int\limits_{\mathbb{R}} dt\,\langle \mathrm{grad}\,\gamma_j(\sigma(t), v_0), (F_{(t_0)}(\sigma(t), v_0; t - t_0; \nu, \varepsilon),$$

$$G_{(t_0)}(\sigma(t), v_0; t-t_0; \nu, \varepsilon))^\tau\rangle + \langle \operatorname{grad}\gamma_j(\sigma(t_0), v_0),\ \Delta\bar{u}_{(t_0,\varepsilon)}(t_0)\rangle \tag{27}$$

при додатковому припущенні, що $\Delta\bar{u}_{(t_0,\varepsilon)}(t_0) \equiv 0$ для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$ (що вірно, зокрема, у випадку гомоклінічної структури $\Gamma_{(\sigma, v_0)}$, а також інваріантності особливих точок при ε-деформації).

Надалі будемо вважати, що вектор $F_{(t_0)} \equiv F$, тобто особливі гіперболічні точки $\bar{u}_j \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, 2}$, інваріантні відносно ε-деформації динамічної системи (26). Тоді формула (27) набуде такого вигляду: $j = \overline{1, n_1}$,

$$\varepsilon\mu_j(t_0, v_0; \nu) = \int_{\mathbb{R}} dt\,\langle \operatorname{grad}\gamma_j(\sigma(t), v_0),$$
$$(F_{(t_0)}(\sigma(t), v_0; t-t_0; \nu, \varepsilon),\ G_{(t_0)}(\sigma(t), v_0; t-t_0; \nu, \varepsilon))^\tau\rangle. \tag{28}$$

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 4. *Якщо вектор Мельникова* (28) *дорівнює нулю при деяких значеннях параметрів* $(\bar{t}_0, \bar{v}_0, \nu_0) \in \Gamma_\sigma \times \mathbb{R}^k$, *і* $\operatorname{rank} \| \partial\mu(t_0, v_0; \nu_0)/\partial(t_0, v_0) \| (\bar{t}_0, \bar{v}_0; \nu_0) = n_1$, *то для гамільтонової при* $\varepsilon = 0$ *цілком інтегровної динамічної системи* (26) *з адіабатичним включенням періодичного збурення при* $\varepsilon \to 0$ *гетероклінічна структура* $\Gamma_{(\sigma, v_0)}$ *руйнується трансверсальним розщепленням відповідних стійкого та нестійкого многовидів, приводячи до явища нестійкості динамічної системи в околі особливих точок.*

Доведення випливає з умови цілком інтегровності динамічної системи (26) при $\varepsilon = 0$ і результату теореми 3.

З метою подальшого розвитку теорії руйнування адіабатичних інваріантів повільно збурених нелінійних динамічних систем розглянемо наступний приклад [12]:

$$\left.\begin{aligned} du/dt &= v, \quad d\tau/dt = \varepsilon \\ dv/dt &= u(u - a(\tau))(u-1) \end{aligned}\right\} = K(u, v, \tau), \tag{29}$$

де вектор $(u, v, \tau)^\tau \in \mathbb{R}^3$, функція $a\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ гладка і періодична з періодом 2π, $\varepsilon \to 0$. Очевидно, що у випадку $\varepsilon = 0$ і $a(\tau_0) = 1/2$ динамічна система має симетричні сепаратриси $\operatorname{orb}\sigma_\pm$ на $\mathbb{R}^2$ з умовами, що

$$\lim_{t\to\mp\infty}\sigma_\pm(t) = (0, 0)^\tau, \qquad \lim_{t\to\pm\infty}\sigma_\pm(t) = (1, 0)^\tau$$

— гіперболічні особливі точки. Якщо $a(t_0) \in [0, 1/2)$ або $a(t_0) \in (1/2, 1]$, тобто $a(t_0) = 1/2 \pm \delta$, $\delta \in (0, 1/2]$, то динамічна система (29) має лише одну гомоклінічну сепаратрису $\operatorname{orb}\sigma_{\pm\delta}$ з особливою гіперболічною точкою $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)^\tau = (0, 0)^\tau$ або $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)^\tau = (1, 0)^\tau$ відповідно.

а) Розглянемо спочатку випадок, коли $a(t_0) \in [0, 1/2)$. При цьому ми можемо вивчити структуру стійкого та нестійкого многовидів $W^{s,u}_{\text{loc}}(\bar{u}_{1,\varepsilon}, \bar{v}_{1,\varepsilon})$ при $\varepsilon \to 0$, враховуючи, що особлива точка $(\bar{u}_{1,\varepsilon}, \bar{v}_{1,\varepsilon})^\tau \equiv (0, 0)^\tau \in \mathbb{R}^2$ є біасимптотичною для гомоклінічної сепаратриси $\operatorname{orb}\sigma_{-\delta}$ (що зберігає структуру стійкого та нестійкого многовидів). Щоб це встановити, необхідно знайти за формулою (28) вектор-функцію Мельникова $\mu \in \mathbb{R}^2$, враховуючи, що при $\varepsilon = 0$ динамічна система має два закони збереження, не будучи при цьому гамільтоновою:

$$\gamma_1 = v^2/2 - \int_0^u du\,(u-1)(u-a(\tau))\,u, \quad \gamma_2 = \tau. \tag{30}$$

Інтегральний многовид гомоклінічної орбіти $\operatorname{orb}\sigma_{-\delta}$, який визначають інваріанти (30) у просторі $\mathbb{R}^3$, задається умовами: $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \tau_0 \in \mathbb{R}$, причому $a(\tau_0) \in [0, 1/2)$. Зобразимо динамічну систему (29) у канонічній формі

$$\begin{aligned} du/dt &= v, \\ dv/dt &= u(u-a_0)(u-1) - \varepsilon f(u, v, t; \varepsilon), \end{aligned} \tag{31}$$

де $a_0 = a(\tau_0) \in [0, 1/2)$, і для всіх $\varepsilon \to 0$

$$f(u, v, t; \varepsilon) := u(u-1)\int_0^1 d\lambda\, a'(\tau_0 + \varepsilon t\lambda)t \bmod (1/\varepsilon). \tag{32}$$

Використовуючи інваріант $\gamma_1 \in D(\mathbb{R}^2)$, знаходимо, що μ-функція Мельникова визначається наступним виразом: $(u, v)^\tau = \sigma_{-\delta}$,

$$\mu_{-\delta}(\tau_0) = -\int_{\mathbb{R}} dt\, v(t)u(t)[u(t)-1]\,[a(\tau_0+\varepsilon t) - a(\tau_0)]. \tag{33}$$

Щоб вирахувати інтеграл (33) явно, зауважимо, що існує послідовність субгармонічних $2\pi n/\varepsilon$-періодичних по параметру $t \in \mathbb{R}$ розв'язків $\operatorname{orb}(u_n(t), v_n(t))^\tau$ рівняння (31) при $\varepsilon \to 0$, для яких $\operatorname{orb}(u_n(t), v_n(t))^\tau \to \operatorname{orb}\sigma_{-\delta}$, а також $\mu_{n,-\delta}(\tau_0) \to \mu(\tau_0)$ при $n \to \infty$, де

$$\mu_{n,-\delta}(\tau_0) = -\int_{-\pi n/2\varepsilon}^{\pi n/2\varepsilon} dt\, v_n(t)u_n(t)[u_n(t)-1]\,[a(\tau_0+\varepsilon t) - a(\tau_0)], \tag{34}$$

причому $|\mu(\tau_0) - \mu_{n,-\delta}(\tau_0)| < Ce^{-\pi n\delta/\varepsilon}$ для деяких чисел C і $\delta > 0$. Для розрахунку (34) скористаємось [13] узагальненою теоремою Фейєра, а саме: якщо задана 2π-періодична функція $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ і $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f(t/\varepsilon)g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt\,\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(t)\,dt \tag{35}$$

для довільного відрізка $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Використовуючи результат (35), з (34) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ знаходимо

$$\begin{aligned} \mu_{n,-\delta}(\tau_0) &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\pi n}^{\pi n} d\tau\, v_n(\tau/\varepsilon)u_n(\tau/\varepsilon)[u_n(\tau/\varepsilon)-1]\,[a(\tau_0+\tau) - a(\tau_0)] = \\ &= -\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi n/\varepsilon}^{\pi n/\varepsilon} d\tau\, v_n(\tau)u_n(\tau)[u_n(\tau)-1]\int_{-\pi n}^{\pi n}[a(\tau_0+\tau) - a(\tau_0)]\,d\tau = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} du\, u(t)[u(t)-1]\int_0^{2\pi}[a(\tau_0+\tau) - a(\tau_0)]\,d\tau = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

оскільки перший інтеграл в (36) тотожно дорівнює нулю.

Таким чином, для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon \to 0$ $\mu_{n,-\delta}(\tau_0) \equiv 0$, що й приводить до результату $\mu_{-\delta}(\tau_0) \equiv 0$ для всіх $\tau_0 \in \mathbb{R}$, для яких $a(\tau_0) \in [0, 1/2)$. Аналогічне твердження легко встановлюється і для випадку, коли $a(\tau_0) \in (1/2, 1]$. Як висновок, ми встановили, що при $a(\tau_0) \in [0, 1/2)$ або $a(\tau_0) \in (1/2, 1]$ фазовий портрет динамічної системи (29) при $\varepsilon \to 0$ неперервно деформується без втрати своєї топологічної структури, тобто є структурно стійким. Коли $a(\tau_0) = 1/2$, $\tau_0 \in \mathbb{R}$ — фіксоване число, ситуація може бути суттєво відмінною від описаної вище. Проаналізуємо її.

Отже, нехай $a(\tau_0) = 1/2$, $\tau_0 \in \mathbb{R}$; тоді при $\varepsilon = 0$ замість двох гомоклінічних орбіт $\operatorname{orb} \sigma_{\pm\delta}$ одержуємо дві гетероклінічні

$$\operatorname{orb} \sigma_\pm = \lim_{\delta \to 0} \operatorname{orb} \sigma_{\pm\delta}$$

з особливими точками $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)^\tau = (0, 0)^\tau$ і $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)^\tau = (1, 0)^\tau$, що при $\varepsilon \to 0$ теж стійкі і не деформуються до гіперболічних $2\pi/\varepsilon$-періодичних $O(\varepsilon)$-траєкторій. Розглядаючи зведену динамічну систему (31) при $\varepsilon \to 0$ і $a(\tau_0) = 1/2$, знаходимо для функції Мельникова вираз, аналогічний (33), де $(u, v)^\tau = \sigma_\pm$:

$$\begin{aligned}\mu_\pm(\tau_0) &= -\int_{\mathbb{R}} dt\, v(t) u(t)[u(t) - 1]\,[a(\tau_0 + \varepsilon t) - 1/2]/\varepsilon = \\ &= \mp \int_0^1 du\, u(u-1)\,[a(\tau_0 + \tau_\pm(u)) - 1/2]/\varepsilon, \end{aligned} \tag{37}$$

де $\tau_\pm(u) := \varepsilon t(\sigma_\pm)$ — обернена функція для еволюційного параметра $t \in \mathbb{R}$. Враховуючи, що $-1/4 \le u(u-1) \le 0$, із (37) випливає, що функція Мельникова $\mu_\pm(\tau_0)$ анулюється при $a(\tau_0) = 1/2$ тоді і лише тоді, коли виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 du\, u(1-u)\,[a(\tau_0 + \tau_+(u))] = 1/12 \to \mu_+(\tau_0) = 0; \\ &\int_0^1 du\, u(1-u)\,[a(\tau_0 + \tau_-(u))] = 1/12 \to \mu_-(\tau_0) = 0; \end{aligned} \tag{38}$$

де згідно з (29) $\tau_-(1-u) = \tau_+(u)$, $u \in [0, 1]$. Результат (38) при умові, що $\partial\mu_\pm(\tau_0)/\partial\tau_0 \ne 0$, означає реалізацію явища трансверсального розщеплення гетероклінічної сепаратриси в околі гіперболічних особливих точок $(\bar{u}_j, \bar{v}_j)^\tau \in \mathbb{R}^2$, $j = \overline{1, 2}$, тобто існування таких гетероклінічних точок

$$p_j \in W^{s,u}(\bar{u}_{2,\varepsilon}, \bar{v}_{2,\varepsilon}) \cap W^{u,s}(\bar{u}_{1,\varepsilon}, \bar{v}_{1,\varepsilon}),\ j = \overline{1, 2},$$

при $\varepsilon \to 0$, що їх еволюція приводить до утворення інваріантних множин $\xi(p_j)$, $j = \overline{1, 2}$, канторової структури з хаотичною динамікою на них згідно з теоремою типу Біркгофа – Смейла [2]. А саме: для довільної нескінченної послідовності індексів $(\ldots, p_{\sigma(j)}, \ldots) \in \mathbb{R}^{2\mathbb{Z}}$, де $j \in \mathbb{Z}$ і $\sigma(j) = \{1$ або $2\}$ існують такі дані Коші для динамічної системи (29) при $\varepsilon \to 0$, що орбіта її послідовно проходитиме через точки $p_{\sigma(j)} \in \mathfrak{U}((\bar{u}_j, \bar{v}_j))$, де $\mathfrak{U}((\bar{u}_j, \bar{v}_j)) \subset \mathbb{R}^2$, $j = \overline{1, 2}$, — відповідні околи особливих точок $(\bar{u}_j, \bar{v}_j) \in \mathbb{R}^2$, $j = \overline{1, 2}$.

Параметричні функції $\tau_\pm(u)$ залежні від еволюції вздовж гетероклінік $\operatorname{orb} \sigma_\pm$ є, очевидно, монотонними функціями своїх аргументів, через що рівності (38) набувають вигляду:

$$\mu_\pm(\tau_0) = 0 \to a(\tau_0 + \bar{\tau}_\pm(u)) = 1/2, \quad \bar{\tau}_+(u) \equiv \bar{\tau}_-(u), \tag{39}$$

де $\bar{\tau}_\pm(u) \in \mathbb{R}$ — відповідні числові значення еволюційних параметрів вздовж сепаратрис. Але оскільки $a(\tau_0) = 1/2$, то числа $\tau_0 + \bar{\tau}_\pm(u) \in \mathbb{R}$ у випадку трансверсального розщеплення гетероклінік $\operatorname{orb} \sigma_\pm$ повинні бути теж коренями рівняння $a(\tau) = 1/2$. Отже, якщо $T = \{\tau_j / \operatorname{mod} 2\pi \in [0, 2\pi): j = \overline{0, q}\}$ — множина коренів рівняння $a(\tau) = 1/2$, тобто $a(\tau_j) = 1/2$, $j = \overline{0, q}$, то $(\tau_0 + \bar{\tau}_\pm(u))(\operatorname{mod} 2\pi) \in T$. Рівняння (39) задовольняється, очевидно, як для знаку "+", так і "–". Це означає, що коли $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \to 0$, таке, що існує $\tau_{j\pm} \in T$, для якого $(\tau_{j\pm} - \bar{\tau}_\pm)(\operatorname{mod} 2\pi) \in T$, то реалізується трансверсальне розщеплення для гетероклінік $\operatorname{orb} \sigma_\pm$, якщо $d\mu_\pm(\tau_0)/d\tau_0 \neq 0$.

Гетероклініки $\operatorname{orb} \sigma_\pm$ при фіксованому $\varepsilon \to 0$ руйнуються трансверсально, утворюючи нестійку гетероклінічну структуру типу Кантора [2, 12] в околі обох гіперболічних особливих точок з утворенням відповідних інваріантних областей стохастичності. Останнє явище, коли задовольняються рівності (39), суттєво залежить від функціональної залежності $a: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to [0, 1]$, що є уточненням результату в [12], де вказана залежність не була відзначена.

1. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических во времени возмущениях // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1963. – **12**, № 1. – С. 3–52.
2. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975. – 304 с.
3. *Gruendler J.* The existence of homoclinic orbits and the method of Melnikov for systems in $\mathbb{R}^n$ // SIAM J. Math. Anal. – 1985. – **16**, № 5. – P. 907–931.
4. *Yamashita M.* Melnikov vector in higher dimentions // Nonlinear analysis i TMA. – 1992. – **18**, № 7. – P. 657–670.
5. *Симплектичний* аналіз динамічних систем з малим параметром. Новий критерій стабілізації гомоклінічних сепаратрис та його застосування / Ю. А. Митропольський, І. О. Антонишин, А. К. Прикарпатський, В. Г. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 1. – С. 46–67.
6. *Wiggins S.* Global bifurcation and chaos // Appl. Math. Sci. – 1988. – **73**.
7. *Бакай А. С., Степановский Ю. П.* Адиабатические инварианты. – К.: Наук. думка, 1985. – 315 с.
8. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1988. – 440 с.
9. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. П.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. – К.: Наук. думка, 1990. – 270 с.
10. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – К.: Наук. думка, 1991. – 287 с.
11. *Wiggins S., Holmes Ph.* Homoclinic orbits in slowly varying oscillations // SIAM J. Math. Anal. – 1987. – **18**, № 3. – P. 612–629.
12. *Kurland H. L., Levi M.* Transversal Heteroclinic Intersection in Slowly Varying Systems // Proceed. Conf. Qualitive Meth. Anal. Nonlinear Dynamics. – New Hampshire. USA, 1986; SIAM. Phil., 1988. – P. 29–38.
13. *Князюк А. В.* Об одном обобщении леммы Римана // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 1. – С. 19–22.

Получено 31.03.93