УДК 517.9

О. П. Свистун, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев),

О СЕПАРАТРИСНЫХ КРИВЫХ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ *

For linear systems of differential equations with pulse influence, the conditions for the existence of separatrix curves and the method for determining these curves are obtained.

Для сімейства лінійних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією знайдено умови існування та приводиться метод знаходження сепаратрисних кривих.

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием следующего вида:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\tau, \varphi), \tag{1}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 1, \tag{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = p_1(x) + \varepsilon p_{12}(\tau, \varphi) y, \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon p_{21}(\tau, \varphi) x + p_2 y, \quad \tau \neq 2\pi\nu, \tag{4}$$

$$\Delta x\,|_{\tau=2\pi\nu} = I_1(\varphi) x + \varepsilon I_{12}(\varphi) y, \tag{5}$$

$$\Delta y\,|_{\tau=2\pi\nu} = \varepsilon I_{21}(\varphi) x + I_2(\varphi) y, \quad \nu = \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{6}$$

Здесь ε — малый положительный параметр, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$, x, $y \in D$, D — ограниченная область пространства E_1, $t \in R$. Вектор-функция $a(\tau, \varphi)$ — непрерывная и периодическая по переменным τ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ с периодом 2π и удовлетворяет условиям Липшица по переменным φ_i, $i = \overline{1, m}$; функции $p_{12}(\tau, \varphi)$ и $p_{21}(\tau, \varphi)$ — непрерывные и периодические по переменным τ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ с периодом 2π, p_1, p_2 — скаляры, $p_2 - p_1 < 0$.

Дифференциальные уравнения этой системы при малых ε имеют сепаратрисные многообразия, которые исследованы в работах [1, 2].

В настоящей работе, используя результаты теории импульсных систем [3], проводится исследование сепаратрисных множеств системы (1)–(4) с учетом импульсных воздействий (5), (6). Здесь выделяются условия существования непрерывных сепаратрисных множеств.

Пусть

$$\varphi = \varphi_t(\tau, \varphi), \qquad \tau = \tau_t(\tau) = \tau + t \tag{7}$$

— решения системы (1), (2), причем при $t = 0$ $\varphi_0 = \varphi$, $\tau_0 = \tau$. С учетом этого перепишем (3) – (6) следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = p_1 x + \varepsilon p_{12}(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi)) y, \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon p_{21}(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi)) x + p_2 y, \quad t \neq 2\pi\nu - \tau, \tag{9}$$

$$\Delta x\,|_{t = 2\pi\nu - \tau} = I_1(\varphi_\nu) x + \varepsilon I_{12}(\varphi_\nu) y, \tag{10}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$\Delta y|_{t=2\pi\nu-\tau} = \varepsilon I_{21}(\varphi_\nu)x + I_2(\varphi_\nu)y, \quad \nu = \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{11}$$

где $\varphi_\nu = \varphi_{2\pi\nu-\tau}(\tau, \varphi)$. Через $x = x_t(\tau, \varphi, \varepsilon; x_0)$, $y = y_t(\tau, \varphi, \varepsilon; y_0)$ обозначим решение системы (8) – (11) с начальным условием $x_0(\tau, \varphi, \varepsilon; x_0) = x_0$; $y_0(\tau, \varphi, \varepsilon; y_0) = y_0$. Переходя к изучению поставленной задачи, рассмотрим сначала (1) – (6) при $\varepsilon = 0$. В этом случае существует сепаратрисная кривая

$$y = 0, \tag{12}$$

с решением

$$\varphi = \varphi_t(\tau, \varphi), \quad \tau = \tau_t(\tau) = t + \tau,$$
$$x_t(\tau, \varphi; x_0) = e^{p_1 t}(1 + I_1(\varphi_\nu))^{-[-t/2\pi]}x_0, \qquad y_t(\tau, \varphi; y_0) \equiv 0 \tag{13}$$

и сепаратрисная кривая

$$x = 0, \tag{14}$$

с решением

$$\varphi = \varphi_t(\tau, \varphi), \quad \tau = \tau_t(\tau) = t + \tau,$$
$$x_t(\tau, \varphi; x_0) \equiv 0, \quad y_t(\tau, \varphi; y_0) = e^{p_2 t}(1 + I_2(\varphi_\nu))^{[t/2\pi]}y_0. \tag{15}$$

При этом условия, обеспечивающие дихотомичность, следующие:

$$p_1 + \frac{1}{2\pi}\ln(1 + I_1(\varphi)) > 0, \quad p_2 + \frac{1}{2\pi}\ln(1 + I_2(\varphi)) < 0, \quad \varphi \in \mathfrak{T}_m, \tag{16}$$

и движения, начинающиеся при $t = 0$ на кривой (12), затухают при $t \to -\infty$, а начинающиеся на (14), — при $t \to +\infty$. Затем при малых положительных ε ищем сепаратрисное многообразие, стягивающееся при $\varepsilon \to 0$ к порождающему многообразию (12), в виде

$$y = u(\tau, \varphi, \varepsilon)x, \tag{17}$$

где $u(\tau, \varphi, \varepsilon)$ — непрерывная функция по совокупности своих переменнных.

Совершим в системе дифференциальных уравнений (8), (9) замену переменных

$$y_t = u(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)x_t. \tag{18}$$

Дифференцируем (18) по t:

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{du}{dt}x_t + u\frac{dx_t}{dt}$$

и применяем к последнему (8), (9):

$$\varepsilon p_{21}(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi))x_t + p_2 u(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)x_t = \dot{u}(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)x_t +$$
$$+ u(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)\{p_1 x_t + \varepsilon p_{12}(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi))\, u(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)x_t\}.$$

В результате приходим к уравнению Риккати относительно функции $u(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon)$:

$$\dot{u} = (p_2 - p_1)u + \varepsilon(-p_{12}(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi))u^2 + p_{21}(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi))). \tag{19}$$

Найдем интегральное представление ограниченного решения уравнения (19) и исследуем его. Применяя метод функции Грина, получаем

$$u(\tau + t;\, \varphi_t(\tau, \varphi);\, \varepsilon) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{t} e^{(p_2 - p_1)(t-s)}(-p_{12}(s + \tau;\, \varphi_s(\tau, \varphi)) \times$$

$$\times\, u^2(s + \tau;\, \varphi_s(\tau, \varphi);\, \varepsilon) + p_{21}(s + \tau;\, \varphi_s(\tau, \varphi)))\, ds. \tag{20}$$

Полагая в (20) $t = 0$, имеем:

$$u(\tau, \varphi, \varepsilon) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-(p_2 - p_1)s}(-p_{12}(s + \tau;\, \varphi_s(\tau, \varphi)) \times$$

$$\times\, u^2(s + \tau;\, \varphi_s(\tau, \varphi);\, \varepsilon) + p_{21}(s + \tau;\, \varphi_s(\tau, \varphi)))\, ds. \tag{21}$$

Нетрудно убедиться, что функция $u(\tau, \varphi, \varepsilon)$ — периодическая по переменным τ, φ_i с периодом 2π, $i = \overline{1, m}$. Заметим, что если вместо τ и φ в (21) подставить $\tau + t$ и $\varphi_t(\tau, \varphi)$, то получим (20).

Теперь найдем условия, гарантирующие существование непрерывного сепаратрисного многообразия (17). Для этого изучим условия скачков (10), (11).

Итак, с одной стороны, $\Delta y = u(t + \tau;\, \varphi_t(\tau, \varphi);\, \varepsilon)\, \Delta x$, т. е.

$$\Delta y\,|_{t=2\pi\nu-\tau} = u(2\pi\nu;\, \varphi_{2\pi\nu-\tau}(\tau, \varphi);\, \varepsilon) \Delta x\,|_{t=2\pi\nu-\tau} =$$

$$= u(2\pi\nu;\, \varphi_\nu;\, \varepsilon)\{I_1(\varphi_\nu)x + \varepsilon I_{12}(\varphi_\nu)\, u(2\pi\nu;\, \varphi_\nu;\, \varepsilon)x\}.$$

С другой стороны,

$$\Delta y\,|_{t=2\pi\nu-\tau} = \varepsilon I_{21}(\varphi_\nu)x + I_2(\varphi_\nu)u(2\pi\nu;\, \varphi_\nu;\, \varepsilon)x.$$

Приравнивая правые части последних двух выражений, с учетом свойства периодичности $u(\tau, \varphi, \varepsilon)$ получаем

$$\varepsilon I_{21}(\varphi_\nu) = \varepsilon I_{12}(\varphi_\nu)u^2(0;\, \varphi_\nu;\, \varepsilon) + (I_1(\varphi_\nu) - I_2(\varphi_\nu))\, u(0;\, \varphi_\nu;\, \varepsilon). \tag{22}$$

Значит, для произвольного $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathfrak{T}_m$ можно указать функции

$$I_i = I_i(\varphi), \quad i = 1, 2, \qquad I_{12} = I_{12}(\varphi), \;\; I_{21} \doteq I_{21}(\varphi), \tag{23}$$

периодические по переменным φ_i, $i = \overline{1, m}$, с периодом 2π такие, что существует сепаратрисная кривая (17), на которой исходная система приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (p_1 + \varepsilon p_{12}(\tau + t;\, \varphi_t(\tau, \varphi))\, u(\tau + t;\, \varphi_t(\tau, \varphi);\, \varepsilon))x, \quad t \neq 2\pi\nu - \tau, \\ \Delta x\,|_{\tau=2\pi\nu-\tau} &= (I_1(\varphi_\nu) + \varepsilon I_{12}(\varphi_\nu)u(0;\, \varphi_\nu;\, \varepsilon)x, \qquad \nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{aligned} \tag{24}$$

где $x = x_t(\tau, \varphi, \varepsilon;\, x_0)$ — решение этой системы, $\varphi_\nu = \varphi_{2\pi\nu-\tau}(\tau, \varphi)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi_t(\tau, \varphi), \quad \tau = \tau_t(\tau) = \tau + t, \quad x = x_t(\tau, \varphi, \varepsilon;\, x_0), \\ &y = y_t(\tau, \varphi, \varepsilon;\, y_0) = u\,(\tau + t;\, \varphi_t(\tau, \varphi);\, \varepsilon))x_t(\tau, \varphi, \varepsilon;\, x_0) \end{aligned} \tag{25}$$

являются решениями исходной системы (1) – (6) и движения x_t, y_t, начинающиеся при $t = 0$ на многообразии (17), затухают при $t \to -\infty$.

Подытоживая изложенное, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть система* (1) – (6) *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $a \in C_{\mathrm{Lip}\,\varphi}(R \times \mathfrak{T}_m)$, $a(\tau, \varphi)$ *— периодическая по переменным* $\tau, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *функция с периодом* 2π;

2) *функции* $p_{12}(\tau, \varphi)$ *и* $p_{21}(\tau, \varphi)$ *непрерывные и периодические по всем своим переменным с периодом* 2π*;*

3) *для каждого* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathfrak{T}_m$ *имеет место первое неравенство* (16).

Тогда существует достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для произвольного* ε, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, *и для каждого решения* (1), (2) *можно указать такие функции* (23), *периодические по* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *с периодом* 2π *и такую функцию* $u(\tau, \varphi, \varepsilon)$, *непрерывную по всем своим переменным, периодическую по* $\tau, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *с периодом* 2π; $u(\tau, \varphi, \varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ *равномерно по* τ, φ, *что исходная система имеет семейство сепаратрисных кривых* (17), *решение на котором определяется* (25).

Аналогичный результат имеет место, когда сепаратрисное многообразие ищется в виде

$$x = v(\tau, \varphi, \varepsilon) y. \tag{26}$$

$$v(\tau, \varphi, \varepsilon) = -\varepsilon \int_0^{+\infty} e^{(p_2 - p_1)s} (-p_{21}(s+\tau; \varphi_s(\tau, \varphi)) \times$$
$$\times v^2(s+\tau; \varphi_s(\tau, \varphi); \varepsilon) + p_{12}(s+\tau; \varphi_s(\tau, \varphi)))\, ds. \tag{27}$$

Условие, гарантирующее существование семейства непрерывных сепаратрисных кривых, следующее:

$$\varepsilon I_{12}(\varphi_\nu) = \varepsilon I_{21}(\varphi_\nu) v^2(0; \varphi_\nu; \varepsilon) + (I_2(\varphi_\nu) - I_1(\varphi_\nu)) v(0; \varphi_\nu; \varepsilon). \tag{28}$$

Исходная задача на сепаратрисном многообразии (26) сводится к системе

$$\begin{gathered} \frac{dy}{dt} = (\varepsilon p_{21}(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi)) v(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon) + p_2) y, \\ \Delta y \big|_{\tau = 2\pi\nu - \tau} = (\varepsilon I_{21}(\varphi_\nu) v(0; \varphi_\nu; \varepsilon) + I_2(\varphi_\nu)) y, \quad \nu = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{gathered} \tag{29}$$

и

$$\begin{gathered} \varphi = \varphi_t(\tau, \varphi), \quad \tau = \tau_t(\tau) = t + \tau, \quad y = y_t(\tau, \varphi, \varepsilon; y_0), \\ x = x_t(\tau, \varphi, \varepsilon; x_0) = v(\tau + t; \varphi_t(\tau, \varphi); \varepsilon) y_t(\tau, \varphi, \varepsilon; y_0) \end{gathered} \tag{30}$$

— решение исходной системы (1) – (6), причем $y = y_t(\tau, \varphi, \varepsilon; y_0)$ находим непосредственно из системы (29), $x_0 = v(\tau, \varphi, \varepsilon) y_0$ и движения x_t, y_t, начинающиеся при $t = 0$ на (26), затухают при $t \to +\infty$. Тогда имеет место теорема 2, аналогичная теореме 1, в которой условие 4 — второе из неравенств (16).

Рассмотрим теперь условия (22) и (28) совместно. В результате получим

$$I_{21}(\varphi_\nu) = \frac{u(0; \varphi_\nu; \varepsilon)}{\varepsilon(1 + u(0; \varphi_\nu; \varepsilon) v(0; \varphi_\nu; \varepsilon))} (I_1(\varphi_\nu) - I_2(\varphi_\nu)), \tag{31}$$

$$I_{12}(\varphi_\nu) = \frac{-v(0; \varphi_\nu; \varepsilon)}{\varepsilon(1 + u(0; \varphi_\nu; \varepsilon) v(0; \varphi_\nu; \varepsilon))} (I_1(\varphi_\nu) - I_2(\varphi_\nu)). \tag{32}$$

Окончательно приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть исходная система* (1) – (6) *удовлетворяет условиям* 1 – 3 *теоремы* 1;

4) *для произвольного* $\varphi \in \mathfrak{T}_m$ *справедливы неравенства* (16).

Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, *что для произвольного* ε, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, *и для каждого решения* (1), (2) *можно указать такие функции* (23), *периодичес-*

кие по φ_i *с периодом* 2π, $i = \overline{1, m}$, *и такие функции* $u(\tau, \varphi, \varepsilon)$, $v(\tau, \varphi, \varepsilon)$, *непрерывные по всем своим переменным, периодические по* τ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *с периодом* 2π; $u(\tau, \varphi, \varepsilon) \to 0$, $v(\tau, \varphi, \varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ *равномерно по* τ, $\varphi = \varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_m$, *что исходная система имеет два семейства сепаратрисных кривых* (17), (26), *решения на которых соответственно* (25) *и* (30).

В качестве примера рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2, \tag{33}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 1, \tag{34}$$

$$\frac{dx}{dt} = x + \varepsilon \sin\varphi y, \tag{35}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y, \quad \tau \neq 2\pi\nu, \tag{36}$$

$$\Delta x\,|_{\tau=2\pi\nu} = \sin\varphi x + \varepsilon I_{12}(\varphi) y, \tag{37}$$

$$\Delta y\,|_{\tau=2\pi\nu} = \varepsilon I_{21}(\varphi) x + \sin(2\varphi) y, \quad \nu = \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{38}$$

Отметим, что для этой системы все условия теоремы 3 выполняются. Решение системы (33), (34) имеет вид $\varphi_t(\tau, \varphi) = \varphi + 2t$, $\varphi_0 = \varphi$, $\tau_t(\tau) = \tau + t$, $\tau_0 = \tau$.

Рассмотрим нетривиальный случай. Пусть $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$. Сепаратрисную кривую ищем в виде $x = v(\varphi, \varepsilon) y$. В этом случае относительно функции $v(\varphi_t(\varphi); \varepsilon)$ получается следующее дифференциальное уравнение: $\dot{v} = 2v + {}$ $= \varepsilon \sin(\varphi + 2t)$. Искомая функция $\dot{v}(\varphi, \varepsilon)$ имеет вид

$$v(\varphi, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{4}(\sin\varphi + \cos\varphi),$$

является периодической по переменной φ с периодом 2π и непрерывной по переменным φ и ε, $v(\varphi, \varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ равномерно по $\varphi \in \mathfrak{T}_1$.

Рассмотрим условие (28), гарантирующее существование непрерывной сепаратрисной кривой. В рассматриваемом примере $I_1(\varphi) = \sin\varphi$, $I_2(\varphi) = \sin(2\varphi)$. Возьмем $I_{21}(\varphi) = 32\cos(2\varphi)$. Тогда в силу (28)

$$I_{12}(\varphi) = \varepsilon^2(\sin(4\varphi) + 2\cos(2\varphi)) - \frac{1}{4}(\sin(2\varphi) - \sin\varphi)(\sin\varphi + \cos\varphi).$$

Таким образом, мы указали такие функции $I_{12} = I_{12}(\varphi)$, $I_{21} = I_{21}(\varphi)$ и нашли функцию $v(\varphi, \varepsilon)$ такую, что существует сепаратрисная кривая

$$x = -\frac{\varepsilon}{4}(\cos\varphi + \sin\varphi) y, \tag{39}$$

на которой система (33) – (38) преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dt} = -y, \quad t \neq 2\pi\nu - \tau,$$

$$\Delta y\,|_{\tau=2\pi\nu-\tau} = (\varepsilon(32\cos(2\varphi_\nu)) v(\varphi_\nu; \varepsilon) + \sin(2\varphi_\nu)) y, \quad \nu = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $\varphi_\nu = \varphi + 4\pi\nu - 2\tau$, решение на этой сепаратрисной кривой имеет вид

$$\varphi_t(\varphi) = \varphi + 2t, \quad \tau_t(\tau) = \tau + t,$$

$$y_t(\tau, \varphi, \varepsilon; y_0) = e^{-t}(1 - 8\varepsilon^2 \cos(2\varphi - 4\tau)(\cos(\varphi - 2\tau) +$$

$$+ \sin(\varphi - 2\tau)) + \sin(2\varphi - 4\tau))^{[t/2\pi]} y_0,$$

$$x_t(\tau, \varphi, \varepsilon; x_0) = -\frac{\varepsilon}{4}(\cos(\varphi + 2t) + \sin(\varphi + 2t))\, y_t(\tau, \varphi, \varepsilon; y_0),$$

$$x_0 = -\frac{\varepsilon}{4}(\cos\varphi + \sin\varphi) y_0; \quad x_t \to 0, \ y_t \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Несложно показать, что в случае $t < 0$ искомой сепаратрисной кривой будет кривая

$$y = 0 \tag{40}$$

(здесь функция $u(\varphi, \varepsilon) = 0$).

Рассмотрим теперь (22). Получим, что для произвольных функций $I_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, $I_{12}(\varphi)$ функция $I_{21}(\varphi) = 0$, $\varphi \in \mathfrak{T}_1$. Таким образом, в этом случае существует сепаратрисная кривая (40) и решение на данной сепаратрисной кривой имеет вид

$$\begin{gathered} \varphi_t(\varphi) = \varphi + 2t, \quad \tau_t(\tau) = \tau + t, \\ x_t(\tau, \varphi, \varepsilon; x_0) = e^{t}(1 + \sin(\varphi - 2\tau))^{+[t/2\pi]} x_0), \quad y_t \equiv 0. \end{gathered} \tag{41}$$

Найдем условия, которые обеспечивают одновременно существование непрерывной сепаратрисной кривой (39) и непрерывной сепаратрисной кривой (40) (см. теорему 3). В этом случае

$$I_1(\varphi) = \sin\varphi, \quad I_2(\varphi) = \sin(2\varphi), \quad I_{21}(\varphi) = 0,$$

$$I_{12}(\varphi) = \frac{1}{4}(\cos\varphi + \sin\varphi)(\sin\varphi - \sin 2\varphi)$$

(см. формулы (31), (32)).

В итоге получаем, что существует сепаратрисная кривая (40) с решением (41) и сепаратрисная кривая (39), решение на которой имеет вид

$$\varphi_t(\varphi) = \varphi + 2t, \quad \tau_t(\tau) = \tau + t, \quad y_t(\tau, \varphi, y_0) = e^{-t}(1 + \sin(2\varphi - 4\tau))^{[t/2\pi]} y_0),$$

$$x_t = -\frac{\varepsilon}{4} e^{-t}(\cos(\varphi + 2t) + \sin(\varphi + 2t))\,(1 + \sin(2\varphi - 4\tau))^{[t/2\pi]} y_0,$$

причем движения x_t, y_t, начинающиеся при $t = 0$ на сепаратрисной кривой (40), затухают при $t \to -\infty$, а движения x_t, y_t, начинающиеся при $t = 0$ на сепаратрисной кривой (39), затухают при $t \to +\infty$.

Как отмечалось выше, условия, гарантирующие существование непрерывных сепаратрисных многообразий требуют определенной связи $I_{ij}(\varphi)$ от $I_1(\varphi)$ и $I_2(\varphi)$.

Общий случай для системы (1) – (6) состоит в том, что сепаратрисное многообразие (17) определятся функцией $u(\tau, \varphi, \varepsilon)$, которая является кусочно-непрерывной. Эта проблема будет исследоваться в продолжении данной работы.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математичекой теории многочастотных колебаний // Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 242 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.

Получено 05. 06. 92