УДК 512.544

**А. В. Тушев,** канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

# О ТОЧНЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНЫХ ГРУПП

We obtain the generalization of the Caschutz criterion for the existence of the exact irreducible representation of finite groups to the class of normal groups.

Одержано узагальнення критерія Гашюца існування точних незвідних зображень скінченних груп на клас локально нормальних груп.

Подгруппа $\mathrm{Soc}(G)$ группы $G$, порожденная всеми ее минимальными нормальными подгруппами, называется цоколем группы $G$ (если $G$ не содержит минимальних нормальных подгрупп, то $\mathrm{Soc}(G) = 1$). Аналогично абелевым цоколем $\mathrm{abSoc}(G)$ группы $G$ называется подгруппа, порожденная всеми абелевыми минимальными нормальными подгруппами $G$, если $G$ обладает такими подгруппами. В противном случае $\mathrm{abSoc}(G) = 1$ [1]. В [2] Гашюц показал, что конечная группа $G$ обладает точным неприводимым представлением над полем нулевой характеристики тогда и только тогда, когда $\mathrm{Soc}(G)$ порождается одним классом сопряженных элементов (см. также [3]). В [4] показано, что существование точных неприводимых представлений разрешимой периодической группы $G$ конечного ранга над абсолютным полем также определяется строением $\mathrm{Soc}(G)$. В связи с этими результатами представляется целесообразным выделить по возможности более широкий класс групп, для которых существование точных неприводимых представлений определяется строением их цоколя. Одним из возможных подходов является следующий. Будем говорить, что группа $G$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, если $\mathrm{Soc}(G) \neq I$, все минимальные нормальные подгруппы группы $G$ конечны и для любой неединичной нормальной подгруппы $N \leq G$ пересечение $N \cap \mathrm{Soc}(G)$ отлично от единичной подгруппы. Отметим, что класс $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ довольно широк и кроме конечных групп содержит также локально нормальные группы и периодические разрешимые группы конечного ранга. Кроме того, класс $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ замкнут относительно прямых произведений и конечных расширений. В настоящей работе получены критерии существования точных неприводимых представлений, аналогичные критериям из [4], для групп из класса $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ и, в частности, для локально нормальных групп.

Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое теоретико-групповое свойство. Группа $G$ называется минимально не $\mathcal{P}$-группой, если она не является $\mathcal{P}$-группой, но всякая ее собственная фактор-группа является $\mathcal{P}$-групповой [5]. В соответствии с этим группу $G$ будем называть минимально не $FC$-группой, если $G$ не $FC$-группа, но всякая ее собственная фактор-группа является $FC$-группой. Полученные в работе результаты о точных неприводимых представлениях локально нормальных групп используются для описания строения периодических разрешимых минимально не $FC$-групп.

**Лемма 1.** *Пусть группа $G$ обладает точным неприводимым представлением над полем $F$, $Z$ — центр группы $G$ и $T$ — периодическая часть $Z$. Тогда $T$ — локально циклическая группа, причем если* $\mathrm{char}\, F = p \neq 0$, *то* $p \,\bar{\in}\, \pi(T)$.

***Доказательство.*** Пусть $M$ — простой $FG$-модуль, на котором группа $G$ действует точно, и $I = \mathrm{Ann}_{FT}(M)$. Покажем что $K = FT/I$ — область целостности. Пусть $a, b \in FT$ и $ab \in I$. Если $a \,\bar{\in}\, I$, то для некоторого $c \in M$ имеем $ca \neq 0$. Отображение $\varphi : x \to xb$ является эндоморфизмом модуля $M$, а так как $0 \neq ca \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$. Тогда из простоты модуля $M$ следует $\operatorname{Ker}\varphi = M$ и поэтому $b \in I$. Таким образом, $K$ — область целостности. Так как группа $G$ действует на $M$ точно, то $1-g \,\overline{\in}\, I$ для любого неединичного элемента $g \in T$. Поэтому можно считать, что $T$ — подгруппа группы единиц кольца $K$. Тогда по теореме 127.3 из [6] $T$ — локально циклическая группа, причем если $\operatorname{char} F = p \neq 0$, то $p \,\overline{\in}\, \pi(T)$. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $F$ — поле, $G$ — группа, $H$ — нормальная подгруппа группы $G$ такая, что $G/H$ — локально циклическая периодическая группа, причем если* $\operatorname{char} F = p \neq 0$, *то* $p \,\overline{\in}\, \pi(G/H)$. *Тогда $G$ имеет неприводимое представление $\varphi$ над $F$ такое, что* $\operatorname{Ker}\varphi = H$.

***Доказательство.*** Пусть $\overline{F}$ — алгебраическое замыкание поля $F$. Согласно теореме 127.3 из [6] периодическая часть $t(\overline{F}^*)$ мультипликативной группы $\overline{F}^*$ поля $\overline{F}$ является делимой локально циклической группой, простыми делителями порядков элементов которой являются все простые числа отличные от $\operatorname{char} F$. Отсюда следует, что $\overline{F}^*$ содержит подгруппу изоморфную делимой оболочке группы $G/H$, и следовательно, $\overline{F}^*$ содержит подгруппу $G_1$ изоморфную группе $G/H$. Таким образом, существует гомоморфизм $\varphi$: $G \to \overline{F}^*$ такой, что $\operatorname{Ker}\varphi = H$ и $\varphi(G) = G_1$. Гомоморфизм $\varphi$ можно продолжить до гомоморфизма колец $\psi: F/G \to \overline{F}$, полагая

$$\psi\left(\sum_i f_i g_i\right) = \sum_i f_i \varphi(g_i),$$

где $g_i \in G$, $f_i \in F$. Тогда $\psi(F/G) = M$ является подполем поля $\overline{F}$, полученным присоединением к $F$ элементов подгруппы $G_1$. Значит, $M$ является неприводимым $F/G_1$-модулем, где элементы из $G_1$ действуют на $M$ умножением справа, и следовательно, $\varphi$ задает неприводимое представление группы $G$ над полем $F$. Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Группа $G$ имеет точное неприводимое представление над полем $F$ тогда и только тогда, когда $G$ содержит подгруппу $N$ такую, что для любой неединичной нормальной подгруппы $X$ группы $G$ пересечение $X \cap N$ неединично, и $N$ имеет неприводимое представление $\varphi$ над полем $F$ такое, что для любой неединичной нормальной подгруппы $X$ группы $G$ пересечение $X \cap N$ не содержится в* $\operatorname{Ker}\varphi$.

***Доказательство.*** Если группа $G$ имеет точное неприводимое представление над полем $F$, то можно положить $N = G$.

Пусть теперь $G$ содержит нужную подгруппу $N$ и $M_1$ — $FN$-модуль представления $\varphi$. Тогда $M_1 \simeq FN/I_1$ где $I_1$ — максимальный правый идеал кольца $FN$. Пусть $I$ — максимальный правый идеал кольца $FG$, содержащий $I_1$, тогда $M = FG/I$ — простой $FG$, модуль. Ввиду максимальности $I$ $FN \cap I = I_1$, т. е.

$$(FN+I)/I \simeq FN/(FN \cap I) = FN/I_1 = M_1,$$

и можно считать, что $M_1 \leq M$. Предположим, что $X = C_G(M) \neq 1$, тогда $X \cap N \neq 1$. Так как $M_1 \leq M$, то $X_1 \leq C_G(M_1)$, и следовательно, $X_1 \leq \operatorname{Ker}\varphi$, что невозможно, так как по условию леммы $X_1 = X \cap N$ не содержится в $\operatorname{Ker}\varphi$. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть $G$ — группа, $G = G_1 \times G_2$, и центр группы $G_1$ тривиален. Пусть $X$ — нормальная погруппа группы $G$ и $X_1$ — проекция подгруппы $X$ на группу $G_1$. Тогда если $X_1 \neq 1$, то $X \cap G_1 \neq 1$.*

***Доказательство.*** Так как центр группы $G_1$ тривиален, то $C_G(X_1) \neq G$. Тогда $[X_1, G] \neq 1$, а так как $[X_1, G] = [X, G_1] \leq X \cap G_1$, то отсюда следует, что $X \cap G_1 \neq 1$. Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Пусть $G = \bigtimes_{i \in I} G_i$ — группа, являющаяся прямым произведением конечных простых неабелевых групп $G_i$. Тогда $G$ имеет точное неприводимое представление над произвольным полем $F$.*

***Доказательство.*** Так как $G_i$ не является $p$-группой, то для каждого $i \in I$ существует элемент $a_i \in G_i$ простого порядка отличного от $\operatorname{char} F$. Положим $N = \bigtimes_{i \in I} \langle a_i \rangle$; тогда $N \cap G_i = \langle a_i \rangle$ для любого $i \in I$.

Обозначим через $J_p$ индексы всех тех элементов $a_i$, которые имеют порядок $p$. Тогда $N_p = \bigtimes_{j \in J} \langle a_i \rangle$ является силовской $p$-подгруппой в $N$. Зафиксируем один индекс $j_p \in J_p$ и положим $L_p = \langle a_{j_1} a_j^{-1} \mid j \in J_p,\ j \neq j_1 \rangle$, тогда фактор-группа $L/L_p$ циклическая и $\langle a_j \rangle \cap L = 1$ для всех $j \in J_p$. Таким образом, если положить

$$L = \bigtimes_{p \in \pi(N)} L_p,$$

то фактор-группа $N/L$ локально циклическая и $\langle a_i \rangle \cap L = 1$ для всех $i \in I$, а так как $\operatorname{char} F \,\overline{\in}\, \pi(N/L)$, то по лемме 2 $N$ имеет неприводимое представление $\varphi$ над $F$ такое, что $\operatorname{Ker} \varphi = L$.

Пусть $X$ — неединичная нормальная подгруппа группы $G$ и $X_i$ — проекция подгруппы $X$ на подгруппу $G_i$. Тогда из леммы 4 следует, что если $X_i \neq 1$, то $X \cap G_i \neq 1$, и следовательно, так как $G_i$ —простая группа, $X \cap G_i = G_i$. Таким образом, любая неединичная нормальная подгруппа группы $G$ является прямым произведением некоторого семейства подгрупп $G_i$, поэтому $X \cap N$ является произведением некоторого семейства подгрупп $\langle a_i \rangle$ и, в частности, $X \cap \cap N \neq 1$. Но поскольку $\langle a_i \rangle \cap L = 1$ для всех $i \in I$, то $X \cap N$ не содержится в $L$. Тогда по лемме 3 группа $G$ имеет точное неприводимое представление над полем $F$. Лемма доказана.

**Лемма 6.** *Пусть $F$ — поле, $G$ — группа, $G = G_1 \times G_2$, и центр группы $G_1$ тривиален. Тогда если группа $G_1$ имеет точное неприводимое представление $\varphi_1$ над полем $F$, то для любого неприводимого представления $\varphi_2$ над полем $F$ существует неприводимое представление группы $G$ над полем $F$ такое, что* $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \varphi_2$.

***Доказательство.*** Пусть $M_i$ — $FG_i$-модуль представления $\varphi_i$ и $a_i$ — порождающие элементы модуля $M_i$, где $i = 1, 2$. Модуль $M_1$ можно рассматривать как $FG$-модуль, считая, что $G_2$ действует на $M_1$ тождественно. Аналогично можно считать, что $M_2$ является $FG$-модулем. Пусть $M' = M_1 \otimes_F M_2$ — тензорное произведение $F$ пространств $M_1$ и $M_2$ с введенным на нем действием группы $G$ по правилу $(a \otimes b)g = ag \otimes bg$ ([7], гл. XVIII, § 2). Тогда нетрудно показать, что $FG$-модуль $M'$ порождается элементом $a = a_1 \otimes a_2$. Кроме того, $\mathrm{Ann}_{FG_i}(a) = \mathrm{Ann}_{FG_i}(a_i)$, поэтому $aFG_i \simeq M_i$, и можно считать, что $M_i = aFG_i$, где $i = 1, 2$. Пусть $L$ — максимальный подмодуль в $M'$, $M = M'/L$, и $\varphi$ — соответствующее модулю $M$ представление группы $G$. Из простоты $M_i$ следует, что $M_i \cap L = 0$. Поэтому можно считать, что $M_i \leq M$, и следовательно, $(\mathrm{Ker}\,\varphi \cap G_i) \leq \mathrm{Ker}\,\varphi_i$, где $i = 1, 2$. Поскольку $\mathrm{Ker}\,\varphi_1 = 1$, $\mathrm{Ker}\,\varphi \cap G_1 = 1$, а так как центр группы $G_1$ тривиален, то из леммы 4 следует, что проекция $\mathrm{Ker}\,\varphi$ на $G_2$ совпадает с единичной подгруппой. Таким образом, $\mathrm{Ker}\,\varphi \leq G_2$, и следовательно, $\mathrm{Ker}\,\varphi \leq \mathrm{Ker}\,\varphi_2$, а так как из определения $M'$ следует, что $\mathrm{Ker}\,\varphi_2 \leq \mathrm{Ker}\,\varphi$, то $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi_2$. Лемма доказана.

Отметим, что абелев цоколь $\mathrm{abSoc}\,(G)$ группы $G$ является полупростым $\mathbb{Z}G$-модулем, где группа $G$ действует на $\mathrm{abSoc}\,(G)$ сопряжениями.

**Теорема 1.** *Группа* $G \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}$ *имеет точное неприводимое представление над полем* $F$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{abSoc}\,(G)$ *содержит такую подгруппу* $H$, *что фактор-группа* $\mathrm{abSoc}\,(G)/H$ *локально-циклическая и* $H$ *не содержит неединичных* $G$*-допустимых подгрупп, причем если* $\mathrm{char}\,F = p \neq 0$, *то* $p \,\overline{\in}\, \pi(\mathrm{abSoc}\,(G))$.

***Доказательство.*** Пусть группа $G$ удовлетворяет условиям теоремы. Используя следствия 1 и 2 леммы 5.23 из [1], нетрудно показать, что $\mathrm{Soc}\,(G) = \mathrm{abSoc}\,(G) \times S$, где $S$ — прямое произведение конечных неабелевых простых групп. По лемме 2 $\mathrm{abSoc}\,(G)$ имеет неприводимое представление $\varphi_1$ над полем $F$ такое, что $H = \mathrm{Ker}\,\varphi_1$, а по лемме 5 $S$ имеет точное неприводимое представление над полем $F$. Тогда по лемме 6 $\mathrm{Soc}\,(G)$ имеет неприводимое представление $\varphi$ над полем $F$ такое, что $\mathrm{Ker}\,\varphi = H$. Таким образом, так как $N = \mathrm{Soc}\,(G)$, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ и $H$ удовлетворяют всем условиям леммы 3, группа $G$ имеет точное неприводимое представление над полем $F$.

Пусть теперь группа $G$ имеет точное неприводимое представление над полем $F$ и $M$ $FG$-модуль, на котором группа $G$ действует точно. Будем рассматривать $A = \mathrm{abSoc}\,(G)$ как полупростой $\mathbb{Z}G$-модуль, на котором группа $G$ действует сопряжениями. Пусть $B$ — изотипная компонента модуля $A$ ([8], гл. VIII, § 3), тогда $B$ — элементарная абелева $p$-группа. Пусть $B = \bigoplus_{i \in I} B_i$ — разложение модуля $B$ в прямую сумму изоморфных простых модулей. Так как модули $B_i$ изоморфны, то все централизаторы $C_G(B_i)$ совпадают между собой, т. е. можно положить $C_G(B_i) = C$ для всех $i \in I$. Значит, $C_G(B) = C$, а так как $G \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}$, то все $B_i$ конечны, и следовательно, $|G : C| < \infty$. Тогда из результатов работы [9] следует, что $M$ содержит простой $FC$-модуль $M'$. Поскольку $B$ содержится в центре подгруппы $C$, то по лемме 2 $|B / C_B(M')| = p$, если $p \neq \mathrm{char}\,F$ и $C_B(M') = B$, если $p = \mathrm{char}\,F$, причем последний случай противоречит лемме 1 из [4], поскольку $B$ — нормальная подгруппа группы $G$ и $C_M(B) \geq M' \neq 0$. Таким образом, $p \neq \mathrm{char}\,F$.

Положим $C_B(M') = H$, тогда $|B/H| = p$. Покажем, что $H$ не содержит ненулевых подмодулей. Предположим, что $T$ — ненулевой подмодуль в $B$, содержащийся в $H$. Тогда $T$ — нормальная подгруппа группы $G$ и $C_M(T) \geq \geq M' \neq 0$, что противоречит лемме 1 из [4].

Таким образом, всякая изотипная компонента модуля $A$ содержит подгруппу простого индекса, не содержащую ненулевых подмодулей. Пусть теперь $A_p$ — силовская $p$-компонента модуля $A$ и $A_p = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — разложение модуля $A_p$ в прямую сумму его изотипных компонент ([8], гл. VIII, § 3). Как показано выше, каждая из компонент $A_i$ содержит подгруппу $H_i$, не содержащую ненулевых подмодулей, такую, что $|A_i / H_i| = p$. Тогда, так как $A_i$ — элементарная абелева $p$-группа, существует такой элемент $a_i \in A_i$, что $A_i = = H_i \oplus \langle a_i \rangle$. Зафиксируем некоторый индекс $i_1 \in I$ и положим $H_p = \langle \{a_i - a_i \mid i_1 \neq 1\} \cup \{H_i \mid i \in I\} \rangle$. Тогда нетрудно показать, что $|A_p / H_p| = p$. Покажем, что $H_p$ не содержит ненулевых подмодулей. Предположим, что $H_p$ содержит ненулевой подмодуль, тогда $H_p$ содержит и простой подмодуль $T$. По определению изотипной компоненты $T \leq A_i$ для некоторого $i \in I$, откуда $T \leq H_p \cap A_i$, но $H_p \cap A_i = H_i$, и следовательно, $T \leq H_i$, что невозможно, поскольку $H_i$ не содержит ненулевых подмодулей.

Таким образом, всякая силовская компонента $A_p$ модуля $A$ содержит подгруппу $H_p$, не содержащую ненулевых подмодулей, такую, что фактор-группа $A_p / H_p$ циклическая. Тогда подгруппа $H = \underset{p \in \pi(A)}{\times} A_p$ будет удовлетворять всем условиям теоремы. Кроме того, как показано выше, для любой изотипной компоненты $A_i$ модуля $A$, являющейся элементарной абелевой $p$-группой, $p$ отлично от $\operatorname{char} F$, откуда $F \,\overline{\in}\, \pi(\operatorname{abSoc}(G))$. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Группа $G \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}$ имеет точное неприводимое представление над полем $F$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{abSoc}(G)$ является локально циклическим $\mathbb{Z}G$-модулем, причем если $\operatorname{char} F = p \neq 0$, то $p \,\overline{\in}\, \pi(\operatorname{abSoc}(G))$.*

***Доказательство.*** Теорема следует из теоремы 1 и леммы 7 работы [4]. Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Локально нормальная группа $G$ тогда и только тогда имеет точное неприводимое представление над полем $F$, когда $\operatorname{abSoc}(G)$ — локально циклический $\mathbb{Z}G$-модуль, причем если $\operatorname{char} F = p \neq 0$, то $p \,\overline{\in}\, \overline{\in}\, \pi(\operatorname{abSoc}(G))$.*

**Лемма 7.** *Пусть $G$ — разрешимая локально нормальная группа, $M$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, аддитивная группа которого периодическая, причем $M$ не содержит ненулевых конечных подмодулей, но для всякого собственного подмодуля $M_1 \leq M$ фактор-модуль $M / M_1$ содержит ненулевой конечный подмодуль. Тогда $M$ — простой $\mathbb{Z}G$-модуль.*

***Доказательство.*** Пусть $M_p$ — силовская $p$-подгруппа в $M$ и $M_{p'}$ — силовская $p'$-подгруппа в $M$. Если $M_p \neq M$, то $M_p \simeq M / M_{p'}$, и следовательно, $M_p$ содержит ненулевой конечный подмодуль, что невозможно. Таким образом, $M$ является $p$-группой. Пусть $L$ — нижний слой группы $M$. Если $M \neq L$, то нижний слой $L_1 / L$ фактор-группы $M / L$ содержит ненулевой конечный подмодуль $L_2 / L$. Но тогда $L_2$ $p$-ненулевой конечный подмодуль модуля $M$, что невозможно. Таким образом, $M$ — элементарная абелева $p$-группа, и следовательно, $M$ можно рассматривать как $\mathbb{Z}_p G$-модуль.

Покажем, что $M$ — простой $\mathbb{Z}_pG$-модуль. Предположим, что $M$ содержит собственный подмодуль $L$, тогда существует подмодуль $L_1 \geq L$ такой, что $L_1 \neq L$ и $|L_1/L| < \infty$. Будем считать, что $C_G(M) = 1$, и пусть $G_1 = C_G(L_1/L)$, тогда $|G : G_1| < \infty$. Поскольку $M$ не содержит конечных подмодулей, то группа $G$ не может быть конечной, и следовательно, $G_1 \neq 1$. Пусть $A$ — конечная абелева $G$-допустимая $q$-подгруппа из $G_1$, где $q$ — простое число. Покажем, что $C_M(A) = D \neq 0$. Предположим, что $q = p$, тогда группа $M \lambda A$ нильпотентная, и следовательно, $D \neq 0$. Пусть теперь $q \neq p$, тогда по теореме Машке существует $\mathbb{Z}_pA$-подмодуль $U \leq M$ такой, что $L_1 = U \otimes L$, а так как $G_1$ действует на $L_1/L$ тождественно и $A \leq G_1$, то $D \geq U \neq 0$.

Таким образом, $C_M(A) = D \neq 0$. Так как $A$ — нормальная подгруппа в $G$, то $D$ — $\mathbb{Z}_pG$-подмодуль модуля $M$, а так как $C_G(M) = 1$, то $D \neq M$. Тогда существует $\mathbb{Z}_pG$-подмодуль $D_1 \geq D$ такой, что $D_1 \neq D$ и $|D_1/D| < \infty$. Пусть $I = \langle 1 - h \mid h \in A \rangle$ — фундаментальный идеал кольца $\mathbb{Z}_pA$. Тогда, так как $A$ — нормальная подгруппа группы $G$, то $D_1 I = D_2$ $\mathbb{Z}_pG$-подмодуль модуля $M$, а так как $A$ действует тождественно на $D$ и $|D_1/D| < \infty$, то $D_2$ — конечный подмодуль модуля $M$, что невозможно, так как $M$ не содержит собственных конечных подмодулей. Лемма доказана.

**Лемма 8.** *Пусть $G$ — разрешимая периодическая минимально не $FC$-группа, $\mathrm{Fitt}(G) = M$ — ее нильпотентный радикал. Тогда $M$ — элементарная абелева $p$-группа, $C_G(M) = M$ и $M$ — простой $\mathbb{Z}_p\Gamma$-модуль, где $\Gamma = G/M$.*

***Доказательство.*** Отметим, что группа $G$ не содержит нееединичных конечных нормальных подгрупп, но всякая ее собственная фактор-группа содержит нееединичную конечную подгруппу. Действительно, если $N$ — нееединичная конечная нормальная подгруппа группы $G$, то $G/N$ — $FC$-группа, откуда ввиду конечности подгруппы $N$ нетрудно получить, что $G$ — $FC$-группа, а это противоречит определению группы $G$. В то же время если $N$ — собственная нормальная подгруппа группы $G$, то фактор-группа $G/N$ является локально нормальной, и следовательно, $G/N$ содержит нееединичную конечную нормальную подгруппу.

Пусть $M$ — максимальная абелева нормальная подгруппа группы $G$. Будем рассматривать $M$ как $\mathbb{Z}G$-модуль, где $G$ действует на $M$ сопряжениями. Тогда $M$ не содержит конечных ненулевых подмодулей, а всякий его собственный фактор-модуль содержит конечный ненулевой подмодуль. Следовательно, по лемме 7 $M$ — элементарная абелева $p$-группа, и $M$ — простой $\mathbb{Z}_pG$-модуль, где $\Gamma = G/H$. Отсюда, в частности, следует, что $M$ является минимальной абелевой нормальной подгруппой группы $G$. Предположим, что $\mathrm{Fitt}(G) \neq M$, тогда существует нильпотентная нормальная подгруппа $N \leq G$ такая, что $M$ содержится в центре $N$. Так как фактор-группа $G/N$ локально нормальная, то существует собственная конечная $G$-допустимая подгруппа $K/N \leq G/N$. Отсюда следует, что $|[K, K]| < \infty$, а так $G$ не содержит собственных конечных нормальных подгрупп, то $[K, K] = 1$, и следовательно, подгруппа $K$ абелева, а это противоречит максимальности $M$. Таким образом, $M = \mathrm{Fitt}(G)$. Тогда равенство $M = \mathrm{Fitt}(G)$ является известным свойством нильпотентного радикала разрешимой группы. Лемма доказана.

**Лемма 9.** *Пусть $G$ — расширение абелевой $p$-группы $M$ с помощью группы $\Gamma$, причем $\Gamma$ содержит конечную нормальную $p'$-подгруппу $A$ такую, что $C_M(A) = 0$. Тогда подгруппа $M$ дополняема в группе $G$ и все ее* *дополнения сопряжены.*

***Доказательство.*** Из условия $C_m(A) = 0$ и ([10], гл. III, следствие 10.2) следует, что $H^n(A, M) = 0$ для всех $n \geq 0$. Тогда по следствию 8.1 из [11] $H^n(\Gamma, M) = 0$ для всех $n > 0$ и, в частности, $H^1(\Gamma, M) = H^2(\Gamma, M) = 0$, это и означает, что подгруппа $M$ сопряженно дополняема в группе $G$. Лемма доказана.

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — периодическая разрешимая группа. Группа $G$ является минимально не $FC$-группой тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия.*

1. $G = M \lambda \Gamma$, *где $M$ — элементарная абелева $p$-группа, $\Gamma$ — локально нормальная группа, и все дополнения к подгруппе $M$ сопряжены в группе $G$.*

2. $\Gamma$ *действует на $M$ точно, $M$ является простым $\mathbb{Z}_p\Gamma$-модулем,* $\operatorname{ab Soc}(G)$ *является локально циклическим $\mathbb{Z}\Gamma$-модулем и $p \overline{\in} \pi(\operatorname{abSoc}(\Gamma))$.*

***Доказательство.*** Достаточность легко следует из того, что любая неединичная нормальная подгруппа группы $G$ содержит подгруппу $M$.

Рассмотрим необходимость. Пусть $M = \operatorname{Fitt}(G)$, тогда по лемме 8 $M$ — элементарная абелева $p$-группа, $M$ — простой $\mathbb{Z}_p\Gamma$-модуль, где $\Gamma = G/M$ и $\Gamma$ действует на $M$ точно. По теореме 2 $\operatorname{abSoc}(\Gamma)$ — локально циклический $\mathbb{Z}\Gamma$-модуль и $p \overline{\in} \pi(\operatorname{abSoc}(\Gamma))$. Отсюда следует, что $\Gamma$ содержит неединичную конечную нормальную $p'$-подгруппу $A \leq \operatorname{abSoc}(\Gamma)$, а так как по лемме 1 работы [4] $C_M(A) = 0$, то по лемме 9 $G = M \lambda \Gamma$ и все дополнения к $M$ сопряжены в группе $G$. Теорема доказана.

1. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. – Berlin: Springer, 1972. – 464 p.
2. *Gaschutz W.* Endliche Gruppen mittreuen absolutirreduziblen Darstellungen // Math. Nachr. – 1954. **12**, № 3/4. – P. 253 – 255.
3. *Жмудь Э. М.* Об изоморфных линейных представлениях конечных групп // Мат. сб. – 1956. – **38**, №4. – С. 417 – 430.
4. *Тушев А. В.* Неприводимые представления локально полициклических групп над абсолютным полем // Укр. мат. жур. – 1990. –**42**, №10. – С. 1389 – 1394.
5. *Robinson D. J. S., Zhang Z.* Groups whose proper quotients have finite derived subgroups // J. Algebra. – 1988. – **118**. – P. 346 – 368.
6. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2-х т. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 416 с.
7. *Ленг С.* Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 564 с.
8. *Бурбаки Н.* Модули, кольца, формы. – М.: Наука, 1966. – 709 с.
9. *Wilsin J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z. – 1970. – **144**, №1. – S. 19 – 21.
10. *Браун К. С.* Когомологии групп. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
11. *Гишарде А.* Когомологии топологических групп и алгебр Ли. – М.: Мир, 1984. – 262 с.

Получено 16. 12. 91