УДК 517.5

Е. А. Гирик, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ НА ДВУМЕРНОМ ЗАМКНУТОМ ОРИЕНТИРУЕМОМ МНОГООБРАЗИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С ЗАДАННЫМ НАБОРОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

The possibility of constructing locally gradient and arbitrary vector fields with a given set of singular points on a two-dimensional closed oriented manifold is studied. The sum of the vector field indices at these points is equal to the Euler characteristic of the manifold.

Досліджується можливість побудови на двовимірному замкненому орієнтованому многовиді локально градієнтних та довільних векторних полів з заданим набором особливих точок, сума індексів векторного поля в яких дорівнює ейлеровій характеристиці многовиду.

Для двумерного гладкого замкнутого связного многообразия можно построить гладкую функцию h с тремя критическими точками: минимум, максимум и вырожденное седло [1, с. 37]. Покажем, что на этом многообразии можно построить гладкую функцию f с произвольным количеством максимумов $N_{\max} \geq 1$, минимумов $N_{\min} \geq 1$ и единственным вырожденным седлом.

Эту функцию f можно задать с помощью системы линий уровня f на многообразии. Для этого воспользуемся теоремой классификации двумерных поверхностей [2, с. 268] и представим многообразие в виде склейки фундаментального многоугольника P, для которого возьмем симметричную каноническую форму $P = a_1 \ldots a_N a_1^{-1} \ldots a_N^{\pm 1}$ (–1 соответствует ориентируемому случаю, а 1 — неориентируемому). Разделим этот многоугольник пополам отрезком $x_0 x_1$, соединяющим произвольные противоположные вершины. С одной стороны отрезка $x_0 x_1$ поместим точку максимума и $N_{\min} - 1$ точек минимума, а с другой стороны — $x_0 x_1$ — точку минимума и $N_{\max} - 1$ точек максимума. При этом неособые поверхности уровня будут гомеоморфны окружности S^1 или объединению конечного числа непересекающихся окружностей S^1. Поверхность уровня, проходящая через седловую точку, будет представлять собой объединение границы многоугольника P, отрезка $x_0 x_1$, $N_{\max} - 1$ „капель", расположенных в правой части P и „подвешенных" в точке x_0 (в каждой из таких „капель" находится в точности одна точка максимума) и $N_{\min} - 1$ „капель", расположенных в левой части P и „подвешенных" в точке x_0 (в каждой из таких „капель" находится в точности одна точка минимума). Такое задание функции f неоднозначно.

Функцию, удовлетворяющую таким же условиям, можно построить и для сферы S^2. Представим сферу S^2 как диск D^2, у которого граница стянута в одну точку — точку максимума. Точка минимума находится во внутренней области D^2. Рассмотрим замкнутую кривую γ, лежащую в $\operatorname{int}(D^2)$ и ограничивающую область D_1^2, $x_{\min} \in \operatorname{int}(D_1^2)$. Выберем $x_0 \in \gamma$. Поместим внутри D_1^2 $M_{\max} - 1$ точек максимума, а в $\operatorname{int}(D^2 \setminus D_1^2)$ поместим $N_{\min} - 1$ точек минимума. При этом неособые поверхности уровня будут гомеоморфны окружности S^1 или объединению конечного числа непересекающихся окружностей S^1. Поверхность уровня, проходящая через седловую точку, будет представлять собой объединение границы кривой γ, $N_{\max} - 1$ „капель", расположенных в D_1^2 и „подвешенных" в точке x_0 (в каждой из таких „капель" находится в точности одна точка максимума) и $N_{\min} - 1$ „капель", расположенных в $D^2 \setminus D_1^2$ и „подвешенных" в точке x_0 (в каждой из таких „капель" находится в точности одна точка минимума).

Зафиксируем на многообразии метрику μ. Построенная функция f порождает на многообразии векторное поле $\operatorname{grad}_\mu f$ (в дальнейшем обозначаемое $\operatorname{grad} f$), нули которого совпадают с критическими точками функции f. В случае ориентированной поверхности M_g^2 индекс векторного поля $\operatorname{grad} f$ в точках минимума и максимума функции f равен 1. По теореме Хопфа [3, с. 223] индекс векторного поля $\operatorname{grad} f$ в седловой точке равен $\chi(M_g^2) - N_{\min} - N_{\max}$, где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика многообразия M_g^2 ($\chi(M_g^2) = 2 - 2g$). Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *На любом двумерном гладком замкнутом компактном связном многообразии M и для любых $N_{\max} \geq 1$, $N_{\min} \geq 1$ можно построить гладкую функцию f с $N_{\max}$ максимумами, $N_{\min}$ минимумами и единственной седловой точкой x_0, причем в ориентированном случае значение индекса векторного поля $\operatorname{grad} f$ в этой точке равно $\operatorname{ind}(x_0) = \chi_0 - N_{\max} - N_{\min}$, где $\chi_0 = \chi(M_g^2)$ — эйлерова характеристика M.*

Замечание. Известно, что $\chi(M_g^2) = 2 - 2g$. Следовательно, $\operatorname{ind}(x_0) = 2 - 2g - N_{\max} - N_{\min}$.

***Следствие* 1.** *Пусть кобордизм W диффеоморфен цилиндру с g ($g \geq 0$) приклеенными ручками. Тогда для любых $N_{\max} \geq 0$, $N_{\min} \geq 0$ на W существует гладкая функция f, у которой $N_{\max}$ максимумов, $N_{\min}$ минимумов и единственная вырожденная седловая точка x_0, причем индекс векторного поля $\operatorname{grad} f$ в этой точке $\operatorname{ind}(x_0) = -2g - N_{\max} - N_{\min}$, а интегральные кривые поля $\operatorname{grad} f$ трансверсально подходят к краям кобордизма W.*

Доказательство. Заклеим края кобордизма ∂W_0 и ∂W_1 дисками D_0^2 и D_0^1 соответственно. Получим двумерное гладкое замкнутое связное компактное многообразие M рода g. Используя лемму 1, построим на нем гладкую функцию f_1, у которой $N_{\max} + 1$ максимумов, $N_{\min} + 1$ минимумов и единственная вырожденная седловая точка x_0. Разместим критические точки таким образом, чтобы нижняя граница кобордизма ∂W_0 являлась поверхностью уровня функции f_1 и ограничивала область с единственной критической точкой — минимумом, а верхняя граница кобордизма ∂W_1 являлась поверхностью уровня функции f_1 и ограничивала область с единственной критической точкой — максимумом. Точка минимума функции f_1 является точкой источника для векторного поля $\operatorname{grad} f_1$, а точка максимума — соответственно точкой стока. Следовательно, интегральные кривые поля $\operatorname{grad} f_1$ подходят к ∂W_0 и ∂W_1 трансверсально. Для поля $\operatorname{grad} f_1$

$$\operatorname{ind}(x_0) = \chi(M) - (N_{\max} + 1) - (N_{\min} + 1) =$$
$$= 2 - 2g - N_{\max} - N_{\min} - 2 = -2g - N_{\max} - N_{\min}.$$

Рассмотрим функцию $f = f_1|_W$, f — искомая функция. Поле $\operatorname{grad} f$ определяется как $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} f_1|_W$, для него $\operatorname{ind}(x_0) = -2g - N_{\max} - N_{\min}$.

Рассмотрим двумерное гладкое замкнутое связное компактное ориентируемое многообразие M_g^2 с эйлеровой характеристикой $\chi(M_g^2) = \chi_0$ ($\chi_0 = 2 - 2g$) и набор целых чисел (a_i), $a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq k$.

Набор (a_i) называется *допустимым* для M_g^2, если $\sum_{i=1}^k a_i = \chi_0$. Набор (a_i) называется *реализуемым* для M_g^2, если на M_g^2 существует векторное поле, которое имеет в точности k особых точек x_i, причем $\operatorname{ind}(x_i) = a_i$.

Возникает вопрос — всегда ли допустимый набор реализуем, в частности, при каких условиях он реализуем локально градиентным полем. Рассмотрим сначала такие наборы, что $a_i \le 1$, $1 \le i \le k$.

Известно, что на M_g^2 можно построить локально градиентное векторное поле, имеющее изолированную особую точку любого индекса $a_i \le 1$ [4, с. 979]. Для $x_i \in M_g^2$ рассмотрим карту $(U_i, \varphi_i) \ni x_i$, $\varphi_i\colon U_i \mapsto V_i = \{y_1, y_2, y_1^2 + y_2^2 < 1\}$.

Для поля $\operatorname{grad}\operatorname{Re}(z^n) = \operatorname{grad}\operatorname{Re}((y_1 + iy_2)^n)$ точка $(0, 0)$ является особой точкой индекса $1 - n$, т. е. $\operatorname{ind}(0) = 1 - n$. Тогда точка $x_i = \varphi_i^{-1}(0)$ для векторного поля $\operatorname{grad}\varphi_i^{-1}(\operatorname{Re}(z^n))$ является особой точкой индекса $1 - n$. Для градиентных полей точки минимума и максимума функции имеют индекс 1, седловые точки — отрицательный индекс. Точки, в которых интегральные кривые из некоторого сектора сливаются в одну кривую, имеют индекс 0. Точки с нулевым индексом можно поместить в любой точке многообразия, не изменив при этом картину векторного поля вне некоторой окрестности этой точки.

Теорема 1. *На сфере S^2 любой допустимый набор (a_i) такой, что $a_i \le 1$, $1 \le i \le k$, реализуем с помощью градиентного поля.*

Доказательство. Построим на S^2 функцию f, используя технику доказательства леммы 1. Не ограничивая общности, можно считать, что все ненулевые a_i расположены в невозрастающем порядке в начале набора, а нулевые — в конце набора, т. е. $a_i = \ldots = a_m = 1$, $a_{m+1} \ge a_{m+2} \ge \ldots \ge a_l$, $a_{l+1} = \ldots = a_k$. Представим сферу S^2 как диск D^2, граница которого отождествляется в од-ну точку — точку максимума x_1. Рассмотрим замкнутую кривую γ, лежащую в $\operatorname{int}(D^2)$ и ограничивающую область D_1^2. Точка минимума $x_2 \in \operatorname{int}(D_1^2)$. Точки $x_{m+1}, \ldots, x_l$ разместим на кривой γ, а точки $x_3, \ldots, x_m$ — в $\operatorname{int}(D^2)\setminus\gamma$. Неособые поверхности уровня будут гомеоморфны окружности S^1 или объединению конечного числа непересекающихся окружностей S^1. Особую поверхность уровня построим следующим образом: в каждой из точек x_i, $m + 1 \le i \le l$, „подвесим" в точности $-a_i$ „капель", в каждой из которых находится в точности одна точка минимума или максимума x_s, $3 \le s \le m$. Особая поверхность уровня состоит из этих „капель" и кривой γ. Индекс векторного поля $\operatorname{grad} f$ в точках максимума и минимума x_s, $1 \le s \le m$, равен $\operatorname{ind}(x_s) = a_s = 1$, а в седловых точках x_i, $m + 1 \le i \le l$ — $\operatorname{ind}(x_i) = a_i$.

Теорема 2. *На двумерном компактном ориентируемом многообразии M_g^2, $g \ge 1$, любой допустимый набор (a_i) такой, что $a_i \le 1$, $1 \le i \le k$, можно реализовать с помощью локально градиентного векторного поля.*

Для доказательства многообразие M_g^2 представим в виде тора с $g - 1$ ручками. Разобьем тор на последовательность кобордизмов и применим лемму 1.

Расширим диапазон a_i. Пусть a_i из набора — произвольные целые числа. Докажем, что на компактном двумерном ориентируемом многообразии M_g^2 существует векторное поле (не обязательно локально градиентное), которое реализует набор a_i, $1 \le i \le k$: $\sum_{i=1}^{k} a_i = \chi(M_g^2)$.

Точки произвольных отрицательных индексов реализуются седловыми точками, причем $\operatorname{ind}(x_0) = 1 - n/2$, где n — количество траекторий, входящих в точку и выходящих из нее. Точки положительных индексов, больших единицы, реализуются следующим образом. Пусть в точку x_0 входит и из нее выходит n особых траекторий. Они образуют n секторов. Неособые траектории в каждом секторе представляют собой границы „лепестков", берущих начало в x_0, т. е. эти траектории выходят из x_0 и входят в x_0, ограничивая некоторую область. При этом индекс особой точки $\operatorname{ind}(x_0) = 1 + n/2$.

Можно показать, что на сфере реализуем любой набор a_i, $1 \le i \le k$. Пусть на M_g^2, $g \ge 0$, реализуем любой набор. Докажем, что на M_{g+1}^2 также реализуем любой набор. Не ограничивая общности, можно считать, что a_i расположены в невозрастающем порядке. Если $a_1 \le 1$, то такой набор, как доказано в теореме 2, реализуем локально градиентным векторным полем. Пусть $a_1 \ge 2$. Рассмотрим набор $a_1 + 2$, $a_2, \ldots, a_k$. Такой набор реализуем на M_g^2 по предположению. Пусть он реализуется векторным полем X. В точке x_1, $\operatorname{ind}(x_1) = a_1 + 2$, сходятся $2 + 2a_1$ секторов. Возьмем два произвольных соседних сектора и выберем в каждом из них произвольную интегральную кривую — γ_1 и γ_2 соответственно; γ_i ограничивает некоторую область D_i^2. Приклеим к M_g^2 по γ_1 и γ_2 ручку. При этом род многообразия увеличится на единицу, т. е. получим M_{g+1}^2. Доопределим векторное поле на ручке таким образом, чтобы оно не имело на ней особых точек — „протянем" интегральную кривую γ_1 вдоль ручки, при этом она перейдет в γ_2. Индекс полученного векторного поля Y в точке x_1 будет на два меньше, чем индекс векторного поля X в этой же точке. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть M — двумерное компактное ориентируемое многообразие с эйлеровой характеристикой $\chi(M) = \chi_0$ и набор*

$$\left\{ a_i,\ 1 \le i \le k \,\middle|\, a_i \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^{k} a_i = \chi_0 \right\}.$$

Тогда на M существует векторное поле X такое, что:

1) *X имеет в точности k особых точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$;*

2) *индекс векторного поля X в точке x_i $\operatorname{ind}(x_i) = a_i$, $1 \le i \le k$.*

1. *Фоменко А. Т.* Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 217 с.
2. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 439 с.
3. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1972. – 277 с.
4. *Пуанкаре А.* Избранные труды: В 3-т. – М.: Наука, 1972.– Т. 2. – 999 с.

Получено 12. 04. 93