УДК 519.21

Н. В. Москальцова, асп. (Донец. ун-т),
В. М. Шуренков, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЦЕНТРОВАННЫХ ЧАСТОТ СЧЕТНОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

On the basis of results relating to the behavior of the potential of a countable ergodic Markov chain, for a certain class of functions, the asymptotic normality of a variable $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ for $n \to \infty$ has been proved. The asymptotic normality of the centering frequencies has been obtained without using the finiteness conditions for the time $M_0\tau^2$ of the first return into a chain state.

На підставі результатів, що стосуються поведінки потенціалу зліченного ергодичного ланцюга Маркова для певного класу функцій, доведено асимптотичну нормальність величини $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ при $n \to \infty$. Асимптотичну нормальність центрованих частот здобуто без застосування умови скінченності моменту $M_0\tau^2$ часу першого повернення до стану ланцюга.

Настоящая статья является продолжением статьи [1]. Рассматривается однородная эргодическая цепь Маркова $X_0, X_1, \ldots$ в счетном фазовом пространстве E со стационарной мерой π и переходными вероятностями $P_{ij}^{(n)}$, $\mathbb{B}_0$ — класс всех финитных функций на E. Обозначим через $\nu_n(k)$ число попаданий цепи в состояние k за n шагов, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$, где f — некоторая функция, определенная на E.

Теорема . *Если* $f \in \mathbb{B}_0$, $\langle \pi, f \rangle = 0$, *то случайная величина* $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$ *имеет в пределе при* $n \to \infty$ *нормальное распределение.*

Доказательство. В работе ([2], гл. 3, § 2) доказана теорема об асимптотической нормальности некоторой случайной величины в более общем случае. Поэтому сформулированная теорема будет доказана, если показать, что:

I. $\lim\limits_{t\uparrow 1} (1-t) \left| \sum\limits_{n\ge 1} t^n M_0 S_n \right| < \infty;$

II. $\lim\limits_{t\uparrow 1} (1-t)^2 \sum\limits_{n\ge 1} t^n M_0 S_n^2 < \infty.$

Так как

$$(1-t) \sum_{n\ge 1} t^n M_0 S_n = (1-t) \sum_{n\ge 1} t^n \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(0) =$$

$$= \sum_{k\ge 0} P^k f(0) \sum_{n\ge k+1} t^n (1-t) = \sum_{k\ge 0} t^{k+1} P^k f(0),$$

где $P^k f(i) = \sum_j P_{ij}^{(k)} f(j)$, то п. I доказан, потому что ввиду теоремы из [1] ряд $\sum_{k\ge 0} t^{k+1} P^k f(0)$ сходится в пределе при $t \uparrow 1$.

Теперь докажем п. II:

$$\lim_{t\uparrow 1}(1-t)^2\sum_{n\geq 1}t^n M_0 S_n^2 = \lim_{t\uparrow 1}(1-t)^2\sum_{n\geq 1}t^n M_0\left(\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)\right)^2 =$$

$$= \lim_{t\uparrow 1}\left[(1-t)^2\sum_{n\geq 1}t^n M_0\sum_{k=0}^{n-1}f^2(X_k) + 2(1-t)^2\sum_{n\geq 1}t^n M_0\sum_{0\leq k<l<n}f(X_k)f(X_l)\right], \quad (1)$$

$$(1-t)^2\sum_{n\geq 1}t^n M_0\sum_{k=0}^{n-1}f^2(X_k) = (1-t)\sum_{k\geq 0}P^k f^2(0)\sum_{n\geq k+1}t^n(1-t) =$$

$$= (1-t)\sum_{k\geq 0}t^{k+1}P^k f^2(0).$$

Если в последнем равенстве перейти к пределу при $t\uparrow 1$, учесть, что цепь эргодична, а результат подставить в (1), то получим

$$\lim_{t\uparrow 1}(1-t)^2\sum_{n\geq 1}t^n M_0 S_n^2 =$$

$$= \langle\pi, f^2\rangle + 2\lim_{t\uparrow 1}(1-t)^2\sum_{n\geq 1}t^n M_0\sum_{0\leq k<l<n}f(X_k)f(X_l). \quad (2)$$

Функция f^2 принадлежит классу $\mathbb{B}_0$, поэтому первое слагаемое в правой части равенства (2) конечно. Докажем конечность последнего предела. Для этого рассмотрим соотношение

$$M_0[f(X_k)f(X_l)] = M_0[f(X_k)T_k f(X_{l-k})] = M_0\left[f(X_k)M_{X_k}f(X_{l-k})\right] =$$

$$= M_0\left[f(X_k)P^{l-k}f(X_k)\right].$$

Теперь выражение под знаком предела в правой части (2) преобразуется к виду

$$(1-t)^2\sum_{n\geq 1}t^n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n-1}M_0\left[f(X_k)P^{l-k}f(X_k)\right] =$$

$$= (1-t)\sum_{k\geq 0}M_0\left[f(X_k)\sum_{l\geq k+1}P^{l-k}f(X_k)\sum_{n\geq l+1}t^n(1-t)\right] =$$

$$= (1-t)\sum_{k\geq 0}M_0\left[f(X_k)\sum_{l\geq k+1}t^{l+1}P^{l-k}f(X_k)\right] =$$

$$= (1-t)\sum_{k\geq 0}M_0\left[f(X_k)\sum_{l\geq 1}t^{l+k+1}P^l f(X_k)\right] =$$

$$= (1-t)\sum_{k\geq 0}M_0\left[f(X_k)\left(R_t f(X_k)-f(X_k)\right)\right]t^{k+1} =$$

$$= (1-t)\sum_{k\geq 0}t^{k+1}M_0 f(X_k)R_t f(X_k) - (1-t)\sum_{k\geq 0}t^{k+1}M_0 f^2(X_k). \quad (3)$$

В силу [1] $\lim_{t\uparrow 1}R_t f(i) = Vf(i) - \langle\mu, f\rangle = Wf(i)$ конечен, поэтому после предельного перехода при $t\uparrow 1$ в цепочке равенств (3) получаем

$$\lim_{t\uparrow 1}(1-t)\sum_{k\ge 0} t^{k+1} M_0 f(X_k)\left[\, R_t f(X_k) - W f(X_k)\ \right] +$$

$$+\ \lim_{t\uparrow 1}(1-t)\sum_{k\ge 0} t^{k+1} M_0 f(X_k)\left[\, W f(X_k) - f(X_k)\ \right].$$

Функции, стоящие под знаком математического ожидания, в обоих случаях принадлежат $\mathbb{B}_0$, и, кроме того, найдется t_0 такое, что для всех $t > t_0$ можно сделать $|\, f(i)[R_t f(i) - W f(i)]\,|$ как угодно малым равномерно по i; и так как $f \in \mathbb{B}_0$, то можно считать, что $i \le L$. Отсюда вытекает справедливость п. II, а значит, и сформулированной теоремы.

***Следствие* 1.** *Величина* $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\nu_n(j) - \frac{\pi_j}{\pi_0}\nu_n(0)\right)$ *асимптотически нормальна.*

Доказательство. Если в доказанной теореме положить

$$f(i) = \delta_j(i) - \frac{\pi_j}{\pi_0}\delta_0(i),$$

то, учитывая, что $f \in \mathbb{B}_0$ и $\langle \pi, f \rangle = 0$, имеем

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(X_k)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\ \sum_{k=0}^{n-1}\delta_j(X_k) - \frac{\pi_j}{\pi_0}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_0(X_k)\ \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\nu_n(j) - \frac{\pi_j}{\pi_0}\nu_n(0)\right),$$

и последняя величина асимптотически нормальна согласно утверждению теоремы. Следствие 1 доказано.

***Следствие* 2.** *Пусть* $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *такие, что* $\sum_{i=1}^{r}\pi_i a_i = 0$, *тогда* $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{r} a_k \nu_n(k)$ *асимптотически нормальна.*

Доказательство. Рассмотрим $f(i) = \sum_{j=1}^{r} a_j \delta_j(i)$:

$$\langle \pi, f \rangle = \sum_i \pi_i \sum_j a_j \delta_j(i) = \sum_j a_j \sum_i \pi_i \delta_j(i) = 0,$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{r} a_j \delta_j(X_k) = \sum_{j=1}^{r} a_j \sum_{k=0}^{n-1}\delta_j(X_k) = \sum_{j=1}^{r} a_j \nu_n(j).$$

Применив доказанную теорему, убедимся в справедливости следствия 2.

Замечание. Если $M_0\tau^2 = \infty$ (см. следствие 3 из [1]), то случайная величина $\frac{1}{\sqrt{n}}(\nu_n(j) - n\pi_j)$ не обязательно асимптотически нормальна.

1. *Москальцова Н. В., Шуренков В. М.* Об асимптотике потенциала счетной эргодической цепи Маркова // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. – С. 265–270.
2. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

Получено 13. 03. 92