УДК 517.5

З. Шмарда, канд. физ.-мат. наук (Кафедра математики FE VUT, Брно, Чехия)

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

The sufficient conditions for the existence of the unique solution to the Cauchy problem for singular systems of integro-differential equations are established.

Встановлені достатні умови існування єдиного розв'язку задачі Коші для сингулярних систем інтегро-диференціальних рівнянь.

Начальная задача Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривалась в [1–4]. Эта же задача для некоторых классов сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений изучалась в [5 – 7].

В настоящей статье для сингулярной системы интегро-дифференциальных уравнений вида

$$y' = f(x, y) + \int_{0^+}^{x} g(x, s, y(s))\, ds \tag{1}$$

ставится начальная задача $y(0^+) = 0$, где

$$y(i) = (y_1^i, \dots, y_n^i), \quad i = 0, 1, \quad f = (f_1, \dots, f_n), \quad g = (g_1, \dots, g_n).$$

Исследование разрешимости этой задачи проводится в неполной окрестности точки (0, 0). При этом устанавливаются достаточные условия существования единственного решения задачи (1) в указанной области. В качестве приложения исследована асимптотика решений системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

Теорема 1. *Пусть в области* $D = \varepsilon\,[0 < s \le x < x_0,\ \|y\| \le \beta_0(x)]$, *где* $x_0 > 0$ *достаточно мало,* $0 < \beta_0(x) \in C^0(0, x_0)$, $\beta_0(0^+) = 0$, *выполняются условия:*

1) $f \in C^0(D)$, $g \in C^0(D)$, $\|f\| < \beta_1(x)$, где $0 < \beta_1(x) \in C^0(0, x_0)$,

$$\int_{0^+}^{x} \beta_1(s)\, ds \le \frac{\beta_0(x)}{2}, \quad \|g\| < \alpha(x, s), \quad 0 < \alpha(x, s) \in C^0(0, x_0),$$

$$\int_{0^+}^{x} \int_{0^+}^{s} \alpha(s, u)\, du\, ds \le \frac{\beta_0(x)}{2};$$

$\|\cdot\|$ — евклидова норма;

2) для любых точек $(x, \bar{y})$, $(x, \bar{\bar{y}})$, $(x, s, \bar{y})$, $(x, s, \bar{\bar{y}})$

$$\|f(x, \bar{y}) - f(x, \bar{\bar{y}})\| \le M \|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\|, \quad \|g(x, s, \bar{y}) - g(x, s, \bar{\bar{y}})\| \le N \|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\|,$$

где $0 \le M$, $0 \le N < 1$.

Тогда задача (1) имеет единственное решение $y(x)$ такое, что $(x, y(x)) \in D$.

Доказательство. Задача (1) эквивалентна в области D системе интегральных уравнений

$$y(x) = \int_{0^+}^{x} f(x, y(s))\, ds + \int_{0^+}^{x} \int_{0^+}^{s} g(s, u, y(u))\, du\, ds. \tag{2}$$

Исходя из (1), (2), на интервале $(0, x_0)$ строим последовательные приближения следующим образом:

$$y_0(x) = 0, \quad y_{m+1}(x) = \int_{0^+}^{x} f(s, y_m(s))\, ds + \int_{0^+}^{x}\int_{0^+}^{s} g(s, u, y_m(u))\, du\, ds, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

I. Покажем, что все приближения находятся в D. Для нулевого приближения это справедливо. Если предположим, что m-е приближение находится в D, а в силу условия (1) теоремы

$$\| y_{m+1}(x) \| = \left\| \int_{0^+}^{x} f(s, y_m(s))\, ds + \int_{0^+}^{x}\int_{0^+}^{s} g(s, u, y_m(u))\, du\, ds \right\| \le$$

$$\le \int_{0^+}^{x} \beta_1(s)\, ds + \int_{0^+}^{x}\int_{0^+}^{s} a(s, u)\, du\, ds \le \beta_0(x), \quad m = 0, 1, \ldots ,$$

то $(m+1)$-е приближение, а значит, все приближения, находятся в D.

II. Оценим члены ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} (y_{m+1}(x) - y_m(x)). \tag{2*}$$

В силу предположений заведомо существует такая положительная константа $L > 0$, что $\beta_0(x) \le L$ на интервале $(0, x_0]$. Тогда для первых двух членов рассматриваемого ряда справедливо

$$\| y_1(x) - y_0(x) \| \le \beta_0(x) \le L,$$

$$\| y_2(x) - y_1(x) \| \le M \int_{0^+}^{x} \| y_1(s) - y_0(s) \|\, ds + N \int_{0^+}^{x}\int_{0^+}^{s} \| y_1(x) - y_0(u) \|\, du\, ds \le$$

$$\le MLx + NL\frac{x^2}{2!}.$$

По индукции нетрудно убедиться в справедливости неравенств

$$\| y_{m+1}(x) - y_m(x) \| \le L \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} M^{m-k} N^k \frac{x^{m+k}}{(m+k)!}.$$

Докажем сходимость ряда (2*). Его можно мажорировать следующим образом:

$$\left\| \sum_{m=0}^{\infty} (y_{m+1}(x) - y_m(x)) \right\| \le L \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} M^{m-k} N^k \frac{x^{m+k}}{(m+k)!} \le$$

$$\le L \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} M^{m-k} N^k \frac{x^{m-k}}{(m-k)!}$$

для достаточно малого x_0. Перегруппировав члены в сумме правой части неравенства, получаем

$$\left\| \sum_{m=0}^{\infty} (y_{m+1}(x) - y_m(x)) \right\| \le L \sum_{k=0}^{m} \frac{(Mx)^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k+l}{l} N^l.$$

Так как для любого целого $k \ge 0$ и $|N| < 1$ справедливо

$$\sum_{l=0}^{\infty} \binom{k+l}{l} N^l = (1-N)^{-k-1},$$

то

$$\left\| \sum_{m=0}^{\infty} (y_{m+1}(x) - y_m(x)) \right\| \le L \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Mx)^k}{(1-N)^{k+1} k!} =$$

$$= \frac{L}{1-N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{Mx}{1-N} \right)^k = \frac{L}{1-N} \exp\left(\frac{Mx}{1-N} \right).$$

Отсюда заключаем, что последовательность приближений $y_m(x)$ действительно равномерно сходится к функции

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (y_{m+1}(x) - y_m(x))$$

на интервале $(0, x_0)$.

III. Докажем, что функция $y(x)$ удовлетворяет системе (2). В силу равномерной сходимости рассматриваемого в п. II ряда (2^*) и в силу того, что $(x, y_m(x)) \in D$, $m = 0, 1, \ldots$, делаем вывод, что по любому заданному числу ε, $0 < \varepsilon < x_0$, найдется номер M_ε такой, что при $m > M_\varepsilon$ $\| y_m(x) - y(x) \| < \varepsilon$ на интервале $(0, x_0)$.

Поэтому для $x \in (0, x_0)$ справедливо соотношение

$$\left\| \int_{0^+}^{x} [f(s, y_m(s)) - f(s, y(s))]\, ds + \int_{0^+}^{x} \int_{0^+}^{s} [g(s, u, y_m(u)) - g(s, u, y(u))]\, du\, ds \right\| \le$$

$$\le M \int_{0^+}^{x} \| y_m(s) - y(s) \|\, ds + N \int_{0^+}^{x} \int_{0^+}^{s} \| y_m(u) - y(u) \|\, du\, ds < \varepsilon x_0 M + \varepsilon \frac{x_0^2}{2} N \to 0$$

при $\varepsilon \to 0^+$.

Значит, $y(x)$ является решением системы (2), а следовательно, и системы (1).

IV. Покажем единственность решения $y(x)$ в области D. Пусть на интервале $(0, x_0)$ кроме решения $y(x)$ существует другое решение $\varphi(x)$ такое, что $\varphi(0^+) = 0$. Рассмотрим любой малый интервал $(0, \mu]$, $\mu > 0$, на котором $y(x) \ne \varphi(x)$. Так как функции $y(x)$ и $\varphi(x)$ равны не во всех точках этого интервала, то в некоторой точке x_1, лежащей в интервале $(0, \mu_0]$, норма разности этих функций $\| y(x) - \varphi(x) \|$ достигает наибольшего значения $c > 0$:

$$\max_{x \in (0, \mu]} \| y(x) - \varphi(x) \| = \| y(x_1) - \varphi(x_1) \| = c > 0.$$

Далее рассмотрим

$$\| y(x_1) - \varphi(x_1) \| = c \le \int_{0^+}^{x_1} \| f(s, y(s)) - f(s, \varphi(s)) \|\, ds +$$

$$+ \int_{0^+}^{x_1} \int_{0^+}^{s} g(s, u, y(u)) - g(s, u, \varphi(u))\, du\, ds \le M \int_{0^+}^{x_1} \| y(s) - \varphi(s) \|\, ds +$$

$$+ N \int_{0^+}^{x_1} \int_{0^+}^{s} \| y(u) - \varphi(u) \|\, du\, ds.$$

Или, если распространить интегрирование на интервал $(0, \mu]$,

$$c \le M \int_{0^+}^{\mu} \| y(s) - \varphi(s) \| ds + N \int_{0^+}^{\mu} \int_{0^+}^{s} \| y(u) - \varphi(u) \| du ds < c\mu(M + N\mu).$$

Тогда $1 < \mu(M + N\mu)$, что невозможно, так как $\mu > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Таким образом, полученное противоречие доказывает, что $y(x) \equiv \varphi(x)$ на интервале $(0, x_0]$. Теорема доказана.

В качестве приложения теоремы 1 рассмотрим сингулярную систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$h_i(x) y_i' - y_i = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) + \int_{0^+}^{x} g_i(x, s, y_1(s), \ldots, y_n(s)) ds, \quad i = 1, \ldots n. \quad (3)$$

Ниже сформулированная теорема определяет достаточные условия для того, чтобы поведение решений системы (3) при $x \to 0^+$ характеризовалось поведением решений системы

$$h_i(x) y_i' - y_i = 0, \quad i = 1, \ldots n,$$

при $x \to 0^+$. Введем следующие обозначения:

$$\varphi_i(x, C_i) = C_i \exp \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{h_i(t)}, \quad 0 \ne C_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$Y(x, y) = (Y_1(x, y), \ldots, Y_n(x, y)),$$

где

$$Y_i(x, y) \equiv [y_i - \varphi_i(x, C_i)] (\varphi_i(x, C_i))^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

а также

$$F(x, y) = (F_1(x, y), \ldots, F_n(x, y)),$$

$$G(x, s, y(s)) = (G_1(x, s, y(s)), \ldots, G_n(x, s, y(s))),$$

где

$$F_i(x, y) = (h_i(x) \varphi_i(x, C_i))^{-1} f_i(x, y),$$

$$G_i(x, s, y(s)) = (h_i(x) \varphi_i(x, C_i))^{-1} g_i(x, s, y(s)), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 2. *Пусть:*

I. $h_i(x) \in C^0(0, x_0)$, $h_i(x) > 0$, $\lim_{x \to 0^+} \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{h_i(t)} = +\infty$, $i = 1, \ldots, n$;

II. *для некоторых фиксированных значений констант* $C_i \ne 0$, $i = 1, \ldots, n$, *в области* $D_1 (0 < s \le x < x_0, \| Y(x, y) \| \le \beta_0(x))$ *справедливо:*

а) $f \in C^0(D_1)$, $g \in C^0(D_1)$;

б) $\| F \| < \beta_1(x)$, $\| g \| < \alpha(x, s)$;

в) для любых точек $(x, \bar{y})$, $(x, \bar{\bar{y}})$, $(x, s, \bar{y})$, $(x, s, \bar{\bar{y}}) \in D_1$:

$$\| F(x, \bar{y}) - F(x, \bar{\bar{y}}) \| \le M \| Y(x, \bar{y}) - Y(x, \bar{\bar{y}}) \|,$$

$$\| G(x, s, \bar{y}) - G(x, s, \bar{\bar{y}}) \| \le N \| Y(x, \bar{y}) - Y(x, \bar{\bar{y}}) \|.$$

Функции $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$, $\alpha(x, s)$ *удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме* 1, $0 \le M$, $0 \le N < 1$.

Тогда система (3) *имеет на интервале* $(0, x_0]$ *единственное решение* $y(x)$ *такое, что* $(x, y(x)) \in D_1$. *Координаты этого решения удовлетворяют на интервале* $(0, x_0]$ *неравенствам*

$$| y_i(x) - \varphi_i(x, C_i) | \le \beta_0(x) | \varphi_i(x, C_i) |, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Доказательство. Введем в систему (3) новые переменные по формулам $y_i = \varphi_i(x, C_i)(1 + U_i)$, $i = 1, \dots, n$, где функции $\varphi_i(x, C_i)$ образуют общее решение системы $h_i(x) y_i' = y_i$. Тогда система (3) относительно новых переменных принимает вид

$$U_i' = F_i[x, \varphi_1(1 + U_1), \dots, \varphi_n(1 + U_n)] +$$

$$+ \int\limits_{0^+}^{x} G_i[x, s, \varphi_1(1 + U_1), \dots, \varphi_n(1 + U_n)]\, ds, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

В области D_2 $[0 < s \le x < x_0,\ \| U \| \le \beta_0(x)]$, в которую преобразуется область D_1, ввиду условий теоремы справедливо:

а) $F \in C^0(D_2)$, $G \in C^0(D_2)$;

б) $\| F \| < \beta_1(x)$, $\| G \| < \alpha(x, s)$;

в) для любых точек $(x, \overline{U})$, $(x, \overline{\overline{U}})$, $(x, s, \overline{U})$, $(x, s, \overline{\overline{U}}) \in D_2$:

$$\| F(x, \overline{U}) - F(x, \overline{\overline{U}}) \| \le M \| \overline{U} - \overline{\overline{U}} \|,$$

$$\| G(x, s, \overline{U}) - G(x, s, \overline{\overline{U}}) \| \le N \| \overline{U} - \overline{\overline{U}} \|.$$

Значит, для системы (5) выполнены условия теоремы 1, и следовательно, существует единственное решение системы (5) такое, что $(x, U(x)) \in D_2$. Возвращаясь к переменным y_i, $i = 1, \dots, n$, нетрудно убедиться в том, что существует единственное решение $y(x)$ системы (3) такое, что $(x, y(x)) \in D_1$. Оно удовлетворяет условию II, так как из условий теоремы вытекает, что $\varphi_i(0^+, C_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Неравенства (4) вытекают из вида области D_1.

1. *Диблик Й.* О существовании решений одной вещественной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, входящих в особую точку // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 6. – С. 701–707.
2. *Кигурадзе И. Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1965. – **1**, № 10. – С. 1271–1291.
3. *Норкин С. К.* О существовании 0-решений одной сингулярной задачи // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 4. – С. 563–569.
4. *Просенюк Л. Г.* Существование и асимптотическое поведение решений вещественной системы дифференциальных уравнений вблизи особой точки // Там же. – 1981. – **33**, № 1. – С. 101–104.
5. *Магнидский Н. А.* Асимптотика решений интегральных уравнений Вольтерра // Докл. АН СССР. – 1981. – **269**. – С. 29–32.
6. *Шмарда З.* О поведении решений одного интегро-дифференциального уравнения вблизи особой точки // Современный анализ и его приложения. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 208–214.
7. *Šmarda Z.* The asymptotic behaviour of solutions of the singular integro-differential equation // Demonstratio Mathematica. – 1989. – **22**, № 2. – P. 293–308.

Получено 12.05.92