DOI: 10.37863/umzh.v72i8.5986

УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова (Донбас. держ. пед. ун-т, Слов'янськ)

НЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ *

We found constructive necessary and sufficient solvability conditions as well as a scheme of construction of solutions for a nonlinear boundary-value problem that is not solved with respect to the derivative. We also suggested concurrent iterative schemes for finding approximations of solutions of this problem. As an example of application of the constructed iterative scheme, we found approximations of solutions of periodic boundary-value problems for a Rayleigh-type equation not solved with respect to the derivative, in particular, in the case of a periodic problem for the equation that determines the satellite motion in an elliptical orbit.

Знайдено конструктивні необхідні та достатні умови розв'язності, а також схему побудови розв'язків нелінійної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків зазначеної задачі. Як приклад застосування побудованої ітераційної схеми знайдено наближення до розв'язків періодичних крайових задач для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно похідної, зокрема, у випадку періодичної задачі для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті.

1. Постановка задачі. Будемо досліджувати задачу про побудову розв'язків

$$z(t,\varepsilon)\colon z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b],\quad z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

крайової задачі [1 – 3]

$$\frac{dz}{dt}=A(t)z+f(t)+\varepsilon Z(z,z',t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon)=\alpha+\varepsilon J\big(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big) \tag{2}$$

у малому околі розв'язку породжуючої нетерової $(m\neq n)$ крайової задачі

$$\frac{dz_0}{dt}=A(t)z_0+f(t),\qquad \ell z_0(\cdot)=\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Тут $A(t)$ — $(n\times n)$-вимірна матриця і $f(t)$ — n-вимірний вектор-стовпець, елементи яких є неперервними на відрізку $[a,b]$ дійсними функціями, $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений векторний функціонал $\ell z(\cdot)\colon\mathbb{C}[a,b]\to\mathbb{R}^m$. Нелінійності $Z(z,z',t,\varepsilon)$ і $J(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задачі (1), (2) припускаємо неперервно диференційовними за невідомою z та її похідною z' у малому околі породжуючого розв'язку і його похідної, а також за малим параметром ε у малому додатному околі нуля. Крім того, вважаємо нелінійну вектор-функцію $Z(z,z',t,\varepsilon)$ неперервною за незалежною змінною t на відрізку $[a,b]$.

Актуальність вивчення неавтономної крайової задачі (1), (2), не розв'язаної відносно похідної, пов'язана з тим фактом, що дослідження традиційної задачі [1], розв'язаної відносно похідної, іноді ускладнюється, наприклад у випадку нелінійностей, не інтегровних в елементарних функціях. Приклад подібної ситуації наведено у статтях [2, 4]. Крім того, прикладом може бути також автономна крайова задача, не розв'язана відносно похідної, зокрема періодична задача для рівняння Лотки – Вольтерра [3].

* Виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України (р/н 0118U003390).

Будемо досліджувати критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$), причому припускаємо виконаною умову

$$P_{Q_d^*}\big\{\alpha - \ell K\big[f(s)\big](\cdot)\big\} = 0. \tag{4}$$

У цьому випадку породжуюча задача (3) має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \qquad r := n - n_1, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $X(t)$ — нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (3), $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матриця, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n \times r)$-матриця, утворена з r лінійно незалежних стовпців $(n \times n)$-матриці-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$, $P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$-матриця, утворена з ($d := m - n_1$) лінійно незалежних рядків $(m \times m)$-матриці-ортопроектора $P_{Q^*} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$,

$$G[f(s); \alpha](t) = K\big[f(s)\big](t) + X(t)Q^+\big\{\alpha - \ell K\big[f(s)\big](\cdot)\big\}$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (3),

$$K\big[f(s)\big](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)\, ds$$

— оператор Гріна задачі Коші для системи (3), Q^+ — псевдообернена матриця за Муром – Пенроузом [1].

2. Умови розв'язності. Необхідні умови існування розв'язку

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon)$$

задачі (1), (2) у критичному випадку визначає наступна лема. Доведення леми аналогічне [1, 3, 5, 6].

Лема. *Припустимо, що для крайової задачі* (1), (2) *має місце критичний* ($P_{Q^*} \neq 0$) *випадок і виконується умова* (4) *розв'язності породжуючої задачі* (3). *Припустимо також, що задача* (1), (2) *має розв'язок, який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється на породжуючий* $z_0(t, c_r^*)$. *Тоді вектор* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *задовольняє рівняння*

$$F(c_r) := P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot, c_r), z_0'(\cdot, c_r), 0) - \ell K[Z(z_0(s, c_r), z_0'(s, c_r), s, 0)](\cdot)\} = 0. \tag{5}$$

По аналогії з слабконелінійними крайовими задачами у критичному випадку [1], рівняння (5) будемо називати рівнянням для породжуючих констант крайової задачі (1), (2), не розв'язаної відносно похідної. Припустимо, що рівняння (5) має дійсні корені та не перетворюється на тотожність [7, 8]. Фіксуючи один із розв'язків $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (5), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

крайової задачі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon\, Z(z_0 + x, z_0' + x', t, \varepsilon), \tag{6}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon\, J\big(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big). \tag{7}$$

У критичному випадку ($P_{Q^*}\neq 0$) за умови (4) крайова задача (6), (7) розв'язна за умови

$$P_{Q_d^*}\Big\{J\big(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)-$$

$$-\ell K\big[Z(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),z_0'(t,c_r^*)+x'(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\big](\cdot)\Big\}=0.$$

У малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t,c_r^*)$ має місце розвинення

$$Z\big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),z_0'(t,c_r^*)+x'(t,\varepsilon),t,\varepsilon\big)=Z\big(z_0(t,c_r^*),z_0'(t,c_r^*),t,0\big)+$$

$$+A_1(t)x(t,\varepsilon)+A_2(t)x'(t,\varepsilon)+\varepsilon\, A_3(t)+R_1\big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),z_0'(t,c_r^*)+x'(t,\varepsilon),t,\varepsilon\big).$$

Тут

$$A_1(t):=\frac{\partial Z(z,z',t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ z'=z_0'(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}},\qquad A_2(t):=\frac{\partial Z(z,z',t,\varepsilon)}{\partial z'}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ z'=z_0'(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}},$$

$$A_3(t):=\frac{\partial Z(z,z',t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ z'=z_0'(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}.$$

Залишок $R_1\big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),z_0'(t,c_r^*)+x'(t,\varepsilon),t,\varepsilon\big)$ має більш високий порядок мализни по $x,\ x'$ та ε в околі точок $x=0,\ x'=0$ й $\varepsilon=0$, ніж перші чотири члени розвинення, тому

$$R_1(z,z',t,\varepsilon)\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ z'=z_0'(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}\equiv 0,\qquad \frac{\partial R_1(z,z',t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ z'=z_0'(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial R_1(z,z',t,\varepsilon)}{\partial z'}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ z'=z_0'(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}\equiv 0,\qquad \frac{\partial R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ z'=z_0'(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}\equiv 0.$$

Використовуючи неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) за першими трьома аргументами векторного функціонала $J\big(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$, виділяємо лінійні $\ell_1x(\cdot,\varepsilon),\ \ell_1x'(\cdot,\varepsilon)$ і $\varepsilon\ell_3\big(z_0(\cdot,c_r^*)\big)$ частини цього функціонала та член $J\big(z_0(\cdot,c_r^*),z_0'(\cdot,c_r^*),0\big)=$ $=J\big(z(\cdot,0),z'(\cdot,0),0\big)$ нульового порядку по ε в околі точок $x=0,\ x'=0$ й $\varepsilon=0:$

$$J\big(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)=J\big(z_0(\cdot,c_r^*),z_0'(\cdot,c_r^*),0\big)+\ell_1x(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+\ell_2x'(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3\big(z_0(\cdot,c_r^*)\big)+J_1\big(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big).$$

Залишок $J_1\big(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$ має більш високий порядок мализни по x, x' і ε в малому околі точок $x=0,\ x'=0$ і $\varepsilon=0$, ніж перші три члени розвинення, тому

$$J_1\big(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ z'=z_0'(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}=0,\qquad \frac{\partial J_1\big(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ z'=z_0'(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}=0,$$

$$\frac{\partial J_1\big(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)}{\partial z'}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ z'=z_0'(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} = 0, \qquad \frac{\partial J_1\big(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ z'=z_0'(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} = 0.$$

Нехай

$$B_0 := P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 X_r(\cdot) + \ell_2 X_r'(\cdot) - \ell K\big[A_1(s)X_r(s) + A_2(s)X_r'(s)\big](\cdot)\Big\}$$

— $(d\times r)$-вимірна матриця. Враховуючи отримані розвинення та рівняння для породжуючих констант, приходимо до операторної системи, рівнозначної до задачі знаходження розв'язків системи (6), які задовольняють крайову умову (7):

$$\begin{gathered} x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r + x^{(1)}(t,\varepsilon), \qquad x^{(2)}(t,\varepsilon) := \big(x^{(1)}(t,\varepsilon)\big)', \\ B_0\, c_r = -P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \ell_2 x^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3\big(z_0(\cdot,c_r^*)\big) + \\ + J_1\big(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big) - \\ - \ell K\big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + A_2(s)x^{(2)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_3(s) + \\ + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon), z_0'(s,c_r^*) + x'(s,\varepsilon), s,\varepsilon)\big](\cdot)\Big\}, \qquad (8) \\ x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\big[Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon), z_0'(s,c_r^*) + x'(s,\varepsilon), s,\varepsilon); \\ J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big](t). \end{gathered}$$

За умови $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ принаймні один розв'язок другого рівняння операторної системи (8) набирає вигляду

$$\begin{gathered} c_r = -B_0^+\, P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \ell_2 x^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3\big(z_0(\cdot,c_r^*)\big) + \\ + J_1\big(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big) - \\ - \ell K\big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + A_2(s)x^{(2)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_3(s) + \\ + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon), z_0'(s,c_r^*) + x'(s,\varepsilon), s,\varepsilon)\big](\cdot)\Big\}. \end{gathered}$$

Тут $P_{B_0^*}$ — $(d\times d)$-вимірна матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{N}(B_0^*)$. Таким чином, за умови $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ принаймні один розв'язок крайової задачі (6), (7) визначає операторна система

$$\begin{gathered} x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r + x^{(1)}(t,\varepsilon), \qquad x^{(2)}(t,\varepsilon) := \big(x^{(1)}(t,\varepsilon)\big)', \\ c_r = -B_0^+\, P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \ell_2 x^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3\big(z_0(\cdot,c_r^*)\big) + \\ + J_1\big(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big) - \\ - \ell K\big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + A_2(s)x^{(2)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_3(s) + \\ + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon), z_0'(s,c_r^*) + x'(s,\varepsilon), s,\varepsilon)\big](\cdot)\Big\}, \qquad (9) \end{gathered}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),z_0'(s,c_r^*)+x'(s,\varepsilon),s,\varepsilon);$$
$$J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t).$$

Операторна система (9) відрізняється від аналогічної операторної системи [1, 9] урахуванням похідних $A_2(s),\ A_3(s)$ та $\ell_2\big(z_0(\cdot,c_r^*)\big),\ \ell_3\big(z_0(\cdot,c_r^*)\big)$ нелінійностей крайової задачі (6), (7) і, в свою чергу, в критичному випадку еквівалентна операторній системі [10]

$$x(t,\varepsilon)=\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)\big). \tag{10}$$

Для побудови розв'язків цієї операторної системи традиційно [1, 9, 11] застосовується ітераційна схема

$$x_{k+1}(t,\varepsilon)=\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x_k(t,\varepsilon)\big),\qquad x_0(t,\varepsilon)\equiv 0,\quad k=0,1,\ldots, \tag{11}$$

яка відповідає методу простих ітерацій. Тут

$$\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)\big):=$$
$$:=-X_r(t)B_0^+\,P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\ell_2x^{(2)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3\big(z_0(\cdot,c_r^*)\big)+$$
$$+J_1\big(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)-$$
$$-\ell K\big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon)+A_2(s)x^{(2)}(s,\varepsilon)+\varepsilon A_3(s)+$$
$$+R_1(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),z_0'(s,c_r^*)+x'(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\big](\cdot)\Big\}+$$
$$+\varepsilon\,G\Big[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),z_0'(s,c_r^*)+x'(s,\varepsilon),s,\varepsilon);$$
$$J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t).$$

Достатньою умовою збіжності ітераційної схеми (11) є умова [12, с. 639]

$$\sup_{\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]}\left\|\frac{\partial\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)\big)}{\partial x}\right\|\le\lambda<1, \tag{12}$$

де $x(t,\varepsilon)$ — вектор-функція з малого околу нуля. Достатня умова збіжності ітераційної процедури (11) безпосередньо випливає з означення оператора стиснення та теореми про середнє значення

$$\left\|\Phi\big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)\big)-\Phi\bigg(z_0(t,c_r^*)+y(t,\varepsilon)\bigg)\right\|=$$
$$=\left\|\frac{\partial\Phi\xi(t,\varepsilon)}{\partial x}\right\|\|x(t,\varepsilon)-y(t,\varepsilon)\|.$$

Тут $\xi(t,\varepsilon)$ — точка відрізка, який сполучає точки $z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)$ і $z_0(t,c_r^*)+y(t,\varepsilon)$. Для оператора $\Phi(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon))$ умова (12) набирає вигляду

$$\sup_{\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]}\left\|\varepsilon G\left\{\left[\frac{\partial Z(z(s,\varepsilon),z'(s,\varepsilon),s,\varepsilon)}{\partial x};\frac{\partial Z(z(s,\varepsilon),z'(s,\varepsilon),s,\varepsilon)}{\partial x'}\right];\right.\right.$$
$$\left.\left.\left[\frac{\partial J\big(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)}{\partial x};\frac{\partial J\big(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)}{\partial x'}\right]\right\}(t)\right\|\le\lambda<1.$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. *Припустимо, що для крайової задачі* (1), (2), *не розв'язаної відносно похідної, має місце критичний* ($P_{Q^*}\neq 0$) *випадок і виконується умова* (4) *розв'язності породжуючої задачі* (3). *Припустимо, що рівняння* (5) *не перетворюється на тотожність та має дійсні розв'язки. Тоді для кожного кореня $c_r^*\in\mathbb{R}^r$ рівняння* (5) *за умов* (12) *і*

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}=0 \tag{13}$$

крайова задача (1), (2), *не розв'язана відносно похідної, має принаймні один розв'язок*

$$z(t,\varepsilon):z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b],\quad z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon=0$ перетворюється на породжуючий

$$z_0(t,c_r^*)=X_r(t)c_r^*+G[f(s);\alpha](t).$$

Цей розв'язок можна визначити за допомогою збіжного для $\varepsilon\in[0,\varepsilon^*]$ ітераційного процесу (11).

Матриця B_0, ключова в дослідженні резонансних слабконелінійних крайових задач, може бути знайдена безпосередньо з рівняння (5), як похідна

$$B_0=\left.\frac{\partial F(c_r)}{\partial c_r}\right|_{c_r=c_r^*}. \tag{14}$$

Дійсно,

$$\frac{\partial F(c_r^*)}{\partial c_r}=\frac{\partial}{\partial c_r}P_{Q_d^*}\Big\{J\big(z_0(\cdot,c_r^*),z_0'(\cdot,c_r^*),0\big)+\ell_1x(\cdot,\varepsilon)+$$
$$+\ell_2x'(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3\big(z_0(\cdot,c_r^*)\big)+J_1\big(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)-$$
$$-\ell K\big[Z(z_0(s,c_r^*),z_0'(s,c_r^*),t,0)+A_1(s)x(s,\varepsilon)+A_2(s)x'(s,\varepsilon)+\varepsilon A_3(s)+$$
$$+R_1(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),z_0'(s,c_r^*)+x'(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\big](\cdot)\Big\}\Big|_{\varepsilon=0}=$$
$$=P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1X_r(\cdot)+\ell_2X_r'(\cdot)-\ell K\big[A_1(s)X_r(s)+A_2(s)X_r'(s)\big](\cdot)\Big\}:=B_0.$$

У випадку $m=n$, наприклад для періодичних крайових задач, матриця B_0 стає квадратною, при цьому умова (13) перетворюється на відому [1, 9, 13] вимогу невиродженості матриці B_0. Умова (13) є узагальненням традиційної достатньої умови розв'язності нелінійних крайових задач у критичному випадку, зокрема вимоги простоти коренів рівняння для породжуючих амплітуд [7, 13], а також аналогічної вимоги для нелінійних крайових задач, розв'язаних відносно похідної, з нетеровою лінійною частиною [1]. За умови (13) будемо казати, що для крайової задачі (1), (2), не розв'язаної відносно похідної, має місце критичний випадок першого порядку. У випадку $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} \neq 0$ для крайової задачі (1), (2), не розв'язаної відносно похідної, може мати місце критичний випадок другого або більш високого порядку [1, 9, 14]. Доведена теорема узагальнює результати [1, 2, 5] на випадок нелінійної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної.

3. Періодична задача для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно похідної. Послідовність наближень, утворена схемою (11), лише на межі перетворюється в розв'язок крайової задачі (1), (2); інакше кажучи, у частковому випадку у задачі відшукання періодичних розв'язків системи (1) послідовність наближень, утворена схемою (11), взагалі кажучи, не є періодичною, а лише на межі перетворюється на періодичний розв'язок крайової задачі (1), (2). Крім того, схема (11) відповідає методу простих ітерацій, отже, має лінійну збіжність, тому природно поставити задачу про прискорення цих ітерацій. Продемонструємо схему побудови ітераційної схеми методом Ньютона – Канторовича [12, 15, 16] на прикладі T-періодичної задачі для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно старшої похідної [17, с. 177],

$$y'' = f(t) + \varepsilon Y(y, y', y'', t, \varepsilon). \tag{15}$$

Тут $Y(y, y', y'', t, \varepsilon)$ — нелінійна скалярна функція, двічі неперервно диференційовна за невідомою y та її похідними y', а також y'' в малому околі розв'язку породжуючої задачі, неперервна по t на відрізку $[a, b]$ і неперервно диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Породжуюча T-періодична задача

$$y_0'' = f(t), \qquad y(0) - y(T) = 0, \qquad y'(0) - y'(T) = 0$$

є критичною:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_r(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що породжуюча T-періодична задача розв'язна; для цього необхідно і достатньо виконується рівність

$$\int_0^T f(t)\,dt = 0.$$

Якщо ця вимога виконується, то розв'язок породжуючої задачі має вигляд

$$y_0(t, c_0) = c_0 + g\big[f(s)\big](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^1,$$

де

$$g\big[f(s)\big](t) := k\big[f(s)\big](t) - \frac{t}{T}\int_0^T (T - s)f(s)\,ds$$

— оператор Гріна породжуючої T-періодичної задачі,

$$k\big[f(s)\big](t) := \int\limits_0^t (t-s)f(s)\,ds$$

— оператор Гріна задачі Коші. Періодичні розв'язки рівняння типу Релея

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon)$$

шукатимемо в околі розв'язку $y_0(t,c_0)$ лінійної частини цього рівняння. Для знаходження збурення

$$x(t,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0;T]$$

отримуємо T-періодичну задачу для рівняння

$$x'' = \varepsilon\, Y\big(y_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon), y_0'(t,c_0) + x'(t,\varepsilon), t, \varepsilon\big),$$

розв'язну тоді й тільки тоді, коли

$$F(c_0) := \int\limits_0^T Y\big(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon), y''(t,\varepsilon), t, \varepsilon\big)\,dt = 0. \tag{16}$$

Припустимо, що рівняння для породжуючих амплітуд у випадку T-періодичної задачі для рівняння типу Релея

$$F_0(c_0) := \int\limits_0^T Y\big(y_0(t,c_0), y_0'(t,c_0), y_0''(t,c_0), t, 0\big)\,dt = 0$$

має простий

$$B_0 := F'(c_0^*) \neq 0$$

дійсний корінь $c_0^* \in \mathbb{R}^1$. Для знаходження періодичного розв'язку рівняння типу Релея можна скористатися методом Ляпунова – Пуанкаре [7], але більш ефективним, саме для знаходження розв'язку $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ рівняння (16), є метод Ньютона – Канторовича [12, 15, 16]. Згідно з прийнятим позначенням, функція $F(c(\varepsilon))$ двічі неперевно диференційовна за невідомою $c(\varepsilon)$ у малому околі точки c_0^*. Припустимо, що для рівняння (16) при

$$0 \le \varepsilon \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$$

мають місце нерівності

$$\big\|\mathcal{J}_j^+(\varepsilon)\big\| \le \sigma_1(j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\big\|d^2F(\zeta_j(\varepsilon)\,; c(\varepsilon) - c_j(\varepsilon))\big\| \le \sigma_2(j)\|c(\varepsilon) - c_j(\varepsilon)\|$$

та існує константа

$$\theta := \sup_{j \in N}\left\{\frac{\sigma_1(j)\,\sigma_2(j)}{2}\right\}.$$

Тоді, згідно з результатами [12], за умов

$$\mathcal{J}_j \neq 0, \quad \theta \cdot \big\| c(\varepsilon) - c_j(\varepsilon) \big\| < 1 \tag{17}$$

для знаходження розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (16) застосовною є ітераційна схема

$$c_{j+1}(\varepsilon) = c_j(\varepsilon) - \mathcal{J}_j^{-1}\, F(c_j(\varepsilon)), \quad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{18}$$

При цьому швидкість збіжності послідовності $\big\{c_j(\varepsilon)\big\}$ до розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (16) є квадратичною [12, 15, 16]. Тут

$$\mathcal{J}_j(\varepsilon) := F'(c_j(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^1$$

— якобіан перетворення

$$F(c(\varepsilon))\colon\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

у точці $c_j(\varepsilon)$. Крім того, $P_{\mathcal{J}_j^*}\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{N}(\mathcal{J}_j^*)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{J}_j^*$. Шуканий розв'язок початкової T-періодичної задачі для рівняння типу Релея (15) визначає ітераційна схема

$$\begin{gathered}
y_{k+1}(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + x_{k+1}(t,\varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\
x_{k+1}(t,\varepsilon) = \xi_{k+1}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \\
x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, g\big[Y(y_k(s,\varepsilon), y_k'(s,\varepsilon), y_k''(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\big](t), \\
c_{k+1}(\varepsilon) = c_0^* + \xi_{k+1}(\varepsilon), \qquad F(c_{k+1}(\varepsilon)) = 0.
\end{gathered} \tag{19}$$

Таким чином, доведено таке твердження.

Наслідок. *Припустимо, що для T-періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея* (15), *не розв'язаного відносно похідної*, *виконується умова розв'язності* (16) *породжуючої задачі. Припустимо також, що рівняння породжуючих амплітуд у випадку T-періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея* (15) *не перетворюється на тотожність та має дійсний розв'язок $c_0^* \in \mathbb{R}^1$. Припустимо також, що для рівняння* (16) *виконується умова* (17). *Тоді для кореня $c_0^* \in \mathbb{R}^1$ рівняння породжуючих амплітуд у випадку T-періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея* (15) *в околі породжуючого розв'язку $y_0(t, c_0^*)$ для знаходження принаймні одного розв'язку T-періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея* (15) *застосовною є ітераційна схема* (19).

Проміжок $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ 0 \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$, збіжності ітераційної схеми (19) до розв'язку T-періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (15), не розв'язаного відносно похідної, можна знайти з умов (12) та (17). Застосуємо знайдені умови розв'язності T-періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (15), не розв'язаного відносно похідної, для 2π-періодичної крайової задачі для рівняння, яке визначає рух супутника [2].

Приклад. Умови доведеної теореми справджуються у випадку 2π-періодичної крайової задачі для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті

$$y'' = \varepsilon\, Y(y, y', y'', t, \varepsilon), \tag{20}$$

де, зокрема,

$$Y(y, y', y'', t, \varepsilon) := 4 \sin t - \sin y + 2\, y' \sin t - y'' \cos t.$$

Рівняння породжуючих амплітуд у випадку T-періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (15), не розв'язаного відносно похідної, має простий,

$$B_0 = -2\pi \neq 0,$$

дійсний корінь $c_0^* = 0$. Періодичні розв'язки рівняння типу Релея (20), не розв'язаного відносно похідної,

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon)$$

будемо шукати в околі розв'язку $y_0(t,c_0) \equiv 0$ лінійної частини цього рівняння. Періодична задача для рівняння першого наближення розв'язна внаслідок рівності $F_0(c_0^*) = 0$, при цьому

$$x_1(t,\varepsilon) = c_1 - 4\,\varepsilon \sin t.$$

Рівняння (16) у випадку 2π-періодичної задачі для рівняння (20) типу Релея має дійсний корінь $c_1 = 0$, при цьому

$$x_2(t,\varepsilon) = c_2 + x_2^{(1)}(t,\varepsilon),$$

де

$$x_2^{(1)}(t,0,1) \approx -\frac{97\;945\;284\,\sin t}{223\;005\;689} + \frac{3\,\sin 2t}{200} - \\ -\frac{229\;674\,\sin 3t}{7\;829\;478\;409} - \frac{9\;171\,\sin 5t}{432\;784\;095\;812}, \quad c_2 = 0,$$

а також

$$x_2^{(1)}(t,0{,}01) \approx -\frac{11393739\,\sin t}{282\;023\;801} + \frac{3\,\sin 2t}{20\;000} - \frac{2\;676\,\sin 3t}{903\;240\;320\;419}.$$

Умовою збіжності ітераційної схеми (19) є умова стиснення

$$\Big\|\varepsilon g_x'\big[Y(y_k(s,\varepsilon), y_k'(s,\varepsilon), y_k''(s,\varepsilon))\big](\cdot)\Big\|_{\mathbb{C}^2[0;2\pi]} \leq \lambda < 1$$

для $k = 0,1,2,\ldots$. Суттєвою особливістю останньої вимоги стиснення є залежність оператора

$$\Phi\big[y_k(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\big](t) := \varepsilon\, g\Big[Y(y_k(s,\varepsilon), y_k'(s,\varepsilon), y_k''(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](t)$$

від похідних $y_k'(s,\varepsilon)$ та $y_k''(s,\varepsilon)$. Оскільки в околі

$$\Omega\colon \big\|y(t,\varepsilon) - y_0(t,c_0^*)\big\|_{\mathbb{C}^2[0;2\pi]} \leq q, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0,$$

породжуючого розв'язку $y_0(t,c_0^*)$ та точки $\varepsilon = 0$ мають місце розвинення

$$Y\big(y_k(t,\varepsilon), y_k'(t,\varepsilon), y_k''(t,\varepsilon), t, \varepsilon\big) = \\ = Y\big(y_0(t,\varepsilon), y_0'(t,\varepsilon), y_0''(t,\varepsilon), t, 0\big) + A_1(t)x(t,\varepsilon) + A_2(t)x'(t,\varepsilon) + \\ + A_3(t)x''(t,\varepsilon) + \varepsilon A_4(t) + R\big(y_k(t,\varepsilon), y_k'(t,\varepsilon), y_k''(t,\varepsilon), t, \varepsilon\big),$$

в околі Ω породжуючого розв'язку $y_0(t,c_0^*)$ та точки $\varepsilon=0$ має місце рівність

$$\Phi'_{x_k}\big[y_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big](t)=\varepsilon\,\Big(g\big[A_1(s)\big](t)\quad g\big[A_2(s)\big](t)\quad g\big[A_3(s)\big](t)\Big),$$

де

$$A_1(t):=Y'_{x_k}(y_0(t,c_0^*),y'_0(t,c_0^*),y''_0(t,c_0^*),t,0),$$
$$A_2(t):=Y'_{x'_k}(y_0(t,c_0^*),y'_0(t,c_0^*),y''_0(t,c_0^*),t,0),$$
$$A_3(t):=Y'_{x''_k}(y_0(t,c_0^*),y'_0(t,c_0^*),y''_0(t,c_0^*),t,0),$$
$$A_4(t):=Y'_{\varepsilon}(y_0(t,c_0^*),y'_0(t,c_0^*),y''_0(t,c_0^*),t,0).$$

Таким чином, умовою збіжності ітераційної схеми (19) є умова стиснення

$$\sup_{y_k,\varepsilon\in\Omega}\left\|\varepsilon\,\Phi'_{x_k}\big[y_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big](\cdot)\right\|_{\mathbb{C}^2[0;2\pi]}\le\lambda<1. \tag{21}$$

Покладемо $\varepsilon_*=0{,}073$, при цьому виконуються нерівності

$$\left\|\Phi'_{x_1}\big[y_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big](\cdot)\right\|_{\mathbb{C}^2[0;2\pi]}\approx 0{,}999\ 773<1,$$
$$\left\|\Phi'_{x_2}\big[y_2(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big](\cdot)\right\|_{\mathbb{C}^2[0;2\pi]}\approx 1{,}00\ 963>1.$$

Водночас для $\varepsilon_*=0{,}01$ мають місце нерівності

$$\left\|\Phi'_{x_1}\big[y_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big](\cdot)\right\|_{\mathbb{C}^2[0;2\pi]}\approx 0{,}138\ 307\ll 1,$$
$$\left\|\Phi'_{x_2}\big[y_2(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big](\cdot)\right\|_{\mathbb{C}^2[0;2\pi]}\approx 0{,}138\ 306\ll 1.$$

Зауважимо, що умови (17) не впливають на оцінку величини ε_*, оскільки

$$\theta_0=\theta_1=\theta_2=0.$$

Точність наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння типу Релея (20), не розв'язного відносно старшої похідної, знайдених за допомогою ітераційної схеми (19), характеризують нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$. Зокрема,

$$\Delta_0(0{,}1)\approx 0{,}4,\qquad \Delta_1(0,1)\approx 0{,}000\ 892\ 783,$$
$$\Delta_2(0,1)\approx 0{,}0149\ 468,$$

а також

$$\Delta_0(0{,}01)\approx 0{,}04,\qquad \Delta_1(0{,}01)\approx 0{,}000\ 897\ 698,$$
$$\Delta_2(0{,}01)\approx 0{,}0000\ 152\ 203.$$

Порівняємо знайдені нульове та перші два наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (20) з нульовим

$$y_{0p}(t, c_0^*) = y_0(t, c_0^*) = 0$$

та першими двома наближеннями до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (20), знайденими за допомогою методу Пуанкаре

$$y_{1p}(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varepsilon\, u_1(t), \qquad u_1(t) = -4\sin t,$$
$$y_{2p}(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varepsilon\, u_1(t) + \varepsilon^2\, u_2(t),$$

де

$$u_2(t) = 4 + 8\cos t - 4\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t.$$

Знайдені за допомогою методу Пуанкаре нульове та перші два наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (20) характеризують нев'язки

$$\delta_{kp}(\varepsilon) = \left\| y''_{kp}(t) - \varepsilon\, Y(y_{kp}, y'_{kp}, y''_{kp}, t, \varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 1, 2.$$

Зокрема, при $\varepsilon = 0{,}1$ маємо

$$\delta_{0p}(0{,}1) \approx 0{,}4, \qquad \delta_{1p}(0{,}1) \approx 0{,}107\,069, \qquad \delta_{2p}(0{,}1) \approx 0{,}0233\,128.$$

Таким чином, знайдені нульове та перші два наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (20) за допомогою ітераційної схеми (19) точніші, ніж перші два наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (20), знайдені за допомогою методу Пуанкаре.

Запропонована у статті схема дослідження нелінійних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної, аналогічно [18 – 21] може бути перенесена на нелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної.

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2th ed., De Gruyter, Berlin; Boston (2016).
2. Ю. Д. Шлапак, *О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной*, Укр. мат. журн, **26**, № 6, 850 – 854 (1974).
3. S. M. Chuiko, O. V. Starkova, *Autonomous Noether boundary-value problems not solved with respect to the derivative*, J. Math. Sci., **232**, № 5, 783 – 799 (2018).
4. А. П. Торжевский, *Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите*, Косм. исслед., **2**, № 5, 667 – 678 (1964).
5. С. М. Чуйко, О. В. Старкова, О. Е. Пирус, *Нелинейные нетеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной*, Динам. системы, **2(30)**, № 1-2, 169 – 186 (2012).
6. С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, О. В. Старкова, *Периодическая задача для уравнения Льенара, не разрешенного относительно производной в критическом случае*, Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины, **29**, 157 – 171 (2015).
7. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва (1956).
8. S. M. Chuiko, *A weakly nonlinear boundary-value problem in a particular critical case*, Ukr. Math. Zh., **61**, № 4, 548 – 562 (2009).
9. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально-разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).
10. А. С. Чуйко, *Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи*, Нелінійні коливання, **8**, № 2, 278 – 288 (2005).

11. Д. К. Лика, Ю. А. Рябов, *Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний*, Штиинца, Кишинев (1974).
12. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
13. Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, Наука, Москва (1979).
14. О. Б. Лыкова, А. А. Бойчук, *Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях*, Укр. мат. журн., **40**, № 1, 62 – 69 (1988).
15. S. M. Chuiko, *To the generalization of the Newton – Kantorovich theorem*, Visnyk V. N. Karazin Kharkiv Nat. Univ. Ser. mat., prykl. mat. i mech., **85**, № 1, 62 – 68 (2017).
16. С. М. Чуйко, *Про узагальнення теореми Ньютона – Канторовича у банаховому просторі*, Доп. НАН України, № 6, 22 – 31 (2018).
17. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Факториал, Москва (1997).
18. S. L. Campbell, *Singular systems of differential equations*, Pitman Adv. Publ. Program, San Francisco etc. (1980).
19. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням*, Вища шк., Київ (2000).
20. A. A. Boichuk, L. M. Shehda, *Degenerate nonlinear boundary-value problems*, Ukr. Math. J., **61**, № 9, 1387 – 1403 (2009).
21. S. M. Chuiko, *On a reduction of the order in a differential-algebraic system*, J. Math. Sci., **235**, № 1, 2 – 18 (2018).

Одержано 23.03.20