DOI: 10.37863/umzh.v73i3.6058

УДК 517.929.2

М. Ф. Городній, В. П. Кравець (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТРИБКАМИ ОПЕРАТОРНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

We study the problem of existence of the unique bounded solution of a linear second-order difference equation with jumps of operator coefficients in a finite-dimensional Banach space.

Досліджується питання про існування єдиного обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів у скінченновимірному банаховому просторі.

Нехай X — m-вимірний комплексний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; I й O — одиничний і нульовий оператори в X; A_1, A_2, B_1, B_2 — фіксовані лінійні оператори в X.

Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= A_1 x_n + A_2 x_{n-1} + y_n, \quad n \geq 1, \\ x_{n+1} &= B_1 x_n + B_2 x_{n-1} + y_n, \quad n \leq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

в якому послідовність $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ є заданою, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шуканою послідовністю елементів простору X.

Мета цієї статті — отримати необхідні і достатні умови на оператори A_1, A_2, B_1, B_2 з деяких спеціальних класів, за яких виконується така умова.

Умова обмеженості. Для довільної обмеженої в X послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі X.

Аналогічне питання для різницевого рівняння першого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта досліджено в [1] для скінченновимірного, а в [2, 3] для нескінченновимірного простору X. Випадок, коли $A_2 = B_2 = -I$, досліджено в [4, 5]. Про дослідження лінійних неавтономних різницевих рівнянь першого порядку у загальному випадку див. [6], а різницевих рівнянь другого порядку зі сталими операторними коефіцієнтами — [7, с. 17; 8] і наведену там бібліографію.

Допоміжні твердження. Покладемо $X^2 = \left\{ \overline{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \,\middle|\, x^{(1)}, x^{(2)} \in X \right\}$. Тоді X^2 — $2m$-вимірний комплексний банахів простір із покоординатним додаванням, множенням на скаляр і нормою $\|\overline{x}\|_* = \|x^{(1)}\| + \|x^{(2)}\|$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in X^2$. Якщо E, F, G, H — лінійні оператори в X, то, як і для випадку числових матриць, $T = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ задає лінійний оператор в X^2 за правилом $T\overline{x} = \begin{pmatrix} Ex^{(1)} + Fx^{(2)} \\ Gx^{(1)} + Hx^{(2)} \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in X^2$.

Нехай $T_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & O \end{pmatrix}$, $T_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ I & O \end{pmatrix}$, $\sigma(T_A)$ — набір власних чисел оператора T_A, $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. У подальшому будемо використовувати такі твердження.

Лема 1. *Для того щоб умова обмеженості виконувалась для рівняння* (1), *необхідно і достатньо, щоб ця умова виконувалась у просторі* X^2 *для різницевого рівняння*

$$\begin{aligned} \overline{x}_{n+1} &= T_A\overline{x}_n + \overline{y}_n, \quad n \geq 1, \\ \overline{x}_{n+1} &= T_B\overline{x}_n + \overline{y}_n, \quad n \leq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Лема 2. *Число* $\lambda \in \mathbb{C}$ *є власним числом оператора* T_A, *що відповідає власному вектору* $\begin{pmatrix} \lambda u \\ u \end{pmatrix}$, *де* u — *деякий ненульовий елемент простору* X, *тоді і тільки тоді, коли* $(\lambda^2 I - A_1\lambda - A_2)u = \overline{0}$.

Доведення лем 1, 2 стандартні, тому ми їх не наводимо.

Лема 3. *Припустимо, що операторне рівняння*

$$\Lambda^2 - A_1\Lambda - A_2 = O \tag{3}$$

має корені Λ_1, Λ_2, *причому існує обернений оператор* $(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$ *до оператора* $\Lambda_1 - \Lambda_2$. *Покладемо*

$$U = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{pmatrix}, \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 \\ -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Тоді U^{-1} — *обернений оператор до* U, *а також*

$$U^{-1}T_AU = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Лема 3 є частковим випадком теореми 2 роботи [8].

Як звичайно, лінійні оператори $G : X \to X$ і $\widetilde{G} : X \to X$ будемо називати подібними, якщо існує такий лінійний оборотний оператор $V : X \to X$, що $\widetilde{G} = V^{-1}GV$.

Наступні леми містять потрібні в подальшому властивості подібних операторів.

Лема 4. *Нехай лінійні оператори* G, $\widetilde{G}$ *подібні і* $\widetilde{G} = V^{-1}GV$. *Тоді:*

1) *матриці операторів* G *і* $\widetilde{G}$ *мають одну і ту ж жорданову нормальну форму;*

2) *оператор* $\widetilde{G}$ *має ланцюг із власного і приєднаних векторів* $e_k \to e_{k-1} \to \ldots \to e_1 \to e$, *що відповідає власному числу* z (*див.* [9, *c.* 189]), *тоді і тільки тоді, коли оператор* G *має ланцюг* $Ve_k \to Ve_{k-1} \to \ldots \to Ve_1 \to Ve$, *що відповідає власному числу* z.

Лема 4 є безпосереднім наслідком означення подібних операторів і скінченної вимірності банахового простору X.

Лема 5. *Якщо* Λ_1, Λ_2 — *корені операторного рівняння* (3) *і* $\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1$, *то оператори* Λ_1, Λ_2 *комутують.*

Доведення. Оскільки $A_1 = \Lambda_1 + \Lambda_2$, то, підставивши Λ_1 у рівняння (3), отримаємо $\Lambda_1^2 - (\Lambda_1 + \Lambda_2)\Lambda_1 - A_2 = O$. Звідси $\Lambda_2\Lambda_1 = -A_2$. Аналогічно $\Lambda_1\Lambda_2 = -A_2$, а отже, $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$.

Лема 6. *Нехай виконується умова леми* 3. *Тоді оператори* Λ_1, Λ_2 *комутують у тому і тільки у тому випадку, коли* $\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1$.

Доведення. *Необхідність.* Оскільки $\Lambda_1,\ \Lambda_2$ — корені рівняння (3), то $\Lambda_k^2 - A_1\Lambda_k - A_2 = O$, $k = 1, 2$, звідки

$$\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2 = A_1(\Lambda_1 - \Lambda_2). \tag{5}$$

Також внаслідок комутовності $\Lambda_1,\ \Lambda_2$

$$\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2 = (\Lambda_1 + \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2). \tag{6}$$

Із (5), (6) і оборотності оператора $\Lambda_1 - \Lambda_2$ випливає, що $\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1$.

Достатність випливає з леми 5.

Наступні приклади показують, що умови лем 3 і 5 незалежні.

***Приклад* 1.** Нехай $X = \mathbb{C}^2$ — арифметичний двовимірний комплексний простір. Зафіксуємо деяку норму в X і будемо ототожнювати оператори, що діють з X в X, з їхніми матрицями у базисі $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Операторне рівняння $\Lambda^2 - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\Lambda + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = O$ має, зокрема, корені $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\Lambda_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. При цьому $\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1$ й існує $(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$; $\Lambda_1 + \Lambda_3 \neq A_1$ і не існує $(\Lambda_1 - \Lambda_3)^{-1}$; $\Lambda_3 + \Lambda_4 \neq A_1$ й існує $(\Lambda_3 - \Lambda_4)^{-1}$.

***Приклад* 2.** Операторне рівняння $\Lambda^2 - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Lambda + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ має корені $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, причому $\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1$ і не існує $(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$.

Нехай T — такий лінійний оператор в X^2, що його спектр $\sigma(T)$ не перетинається з одиничним колом S. Визначимо лінійні підпростори $X_-^2(T)$, $X_+^2(T)$ у просторі X^2 за таким правилом. Якщо $\sigma(T)$ лежить всередині кола S, то $X_-^2(T) = X^2$, $X_+^2(T) = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix} \right\}$. Якщо $\sigma(T)$ лежить зовні S, то $X_-^2(T) = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix} \right\}$, $X_+^2(T) = X^2$. Якщо ж $\sigma(T)$ має непорожні перетини з множинами $S_- = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ і $S_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, то зафіксуємо такий базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_i, \overline{f}_{i+1}, \overline{f}_{i+2}, \ldots, \overline{f}_{2m}$ у просторі X^2, в якому матриця оператора T має жорданову нормальну форму, причому $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_i$ відповідають клітині Жордана з власними числами із S_-, а $\overline{f}_{i+1}, \overline{f}_{i+2}, \ldots, \overline{f}_{2m}$ — клітині Жордана з власними числами із S_+. Тоді $X_-^2(T)$, $X_+^2(T)$ — лінійні оболонки векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_i$ й $\overline{f}_{i+1}, \overline{f}_{i+2}, \ldots, \overline{f}_{2m}$ відповідно.

Внаслідок леми 1 і теореми 1 роботи [1] справджується таке твердження.

Теорема 1. *Для різницевого рівняння* (1) *умова обмеженості виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

а$_1$) $\sigma(T_A) \cap S = \varnothing$, $\sigma(T_B) \cap S = \varnothing$;

а$_2$) $X^2 = X_-^2(T_A) \dot{+} X_+^2(T_B)$, *тобто* X^2 *є прямою сумою підпросторів* $X_-^2(T_A)$ *і* $X_+^2(T_B)$.

Основні результати. У загальному випадку перевірка умов а$_1$), а$_2$) теореми 1 є нетривіальною задачею. Нижче розглядаються два випадки, коли ця перевірка суттєво спрощується.

Теорема 2. *Припустимо, що операторні рівняння*

$$\Lambda^2 - A_1\Lambda - A_2 = O, \qquad \Phi^2 - B_1\Phi - B_2 = O \tag{7}$$

мають такі корені $\Lambda_1,\ \Lambda_2$ *і* $\Phi_1,\ \Phi_2$ *відповідно, що існують оператори* $(\Lambda_1-\Lambda_2)^{-1},\ (\Phi_1 - \Phi_2)^{-1}$. *Для різницевого рівняння* (1) *умова обмеженості виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

b$_1$) $(\sigma(\Lambda_1)\cup\sigma(\Lambda_2))\cap S=\varnothing,\ (\sigma(\Phi_1)\cup\sigma(\Phi_2))\cap S=\varnothing$;

b$_2$) *якщо при* $k=1,2$ *матриця оператора* Λ_k *має жорданову нормальну форму, в якій рівно* p_k *клітин Жордана відповідають власним числам* $z(k,1),z(k,2),\ldots,z(k,p_k)$, *що лежать всередині* S, *причому* $z(k,i)$ *відповідає клітина, що будується за ланцюгом із власного і приєднаних векторів* $u_{l(k,i)}(k,i)\to u_{l(k,i)-1}(k,i)\to\ldots\to u_1(k,i)$, *а матриця оператора* Φ_k *має жорданову нормальну форму, в якій рівно* q_k *клітин Жордана відповідають власним числам* $\lambda(k,1),\lambda(k,2),\ldots,\lambda(k,q_k)$, *що лежать зовні* S, *причому* $\lambda(k,j)$ *відповідає клітина, що будується за ланцюгом* $v_{n(k,j)}(k,j)\to v_{n(k,j)-1}(k,j)\to\ldots\to v_1(k,j)$, *то вектори-стовпчики*

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} z(k,i)u_1(k,i)\\ u_1(k,i)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} z(k,i)u_2(k,i)+u_1(k,i)\\ u_2(k,i)\end{pmatrix},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \begin{pmatrix} z(k,i)u_{l(k,i)}(k,i)+u_{l(k,i)-1}(k,i)\\ u_{l(k,i)}(k,i)\end{pmatrix}, \qquad 1\le i\le p_k, \quad k=1,2;\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} \lambda(k,j)v_1(k,j)\\ v_1(k,j)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \lambda(k,j)v_2(k,j)+v_1(k,j)\\ v_2(k,j)\end{pmatrix},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \begin{pmatrix} \lambda(k,j)v_{n(k,j)}(k,j)+v_{n(k,j)-1}(k,j)\\ v_{n(k,j)}(k,j)\end{pmatrix}, \qquad 1\le j\le q_k, \quad k=1,2,\end{gathered} \tag{9}$$

утворюють базис в X^2.

Доведення. За лемою 3 оператори $T_A,\ T_B$ подібні до операторів

$$\widetilde{T}_A=\begin{pmatrix}\Lambda_1 & O\\ O & \Lambda_2\end{pmatrix}, \qquad \widetilde{T}_B=\begin{pmatrix}\Phi_1 & O\\ O & \Phi_2\end{pmatrix}.$$

Оскільки $\sigma(\widetilde{T}_A)=\sigma(\Lambda_1)\cup\sigma(\Lambda_2)$, $\sigma(\widetilde{T}_B)=\sigma(\Phi_1)\cup\sigma(\Phi_2)$, то з огляду на лему 4 робимо висновок, що умови a$_1$) теореми 1 та b$_1$) теореми 2 виконуються одночасно.

Із умови b$_2$) і структури оператора $\widetilde{T}_A$ випливає, що підпростір $X^2_-(\widetilde{T}_A)$ є лінійною оболонкою векторів, які утворюють такі ланцюги із власних і приєднаних векторів оператора $\widetilde{T}_A$:

$$\begin{pmatrix} u_{l(1,i)}(1,i)\\ \overline{0}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} u_{l(1,i)-1}(1,i)\\ \overline{0}\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix} u_1(1,i)\\ \overline{0}\end{pmatrix}, \quad 1\le i\le p_1,$$

$$\begin{pmatrix} \overline{0} \\ u_{l(2,i)}(2,i) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{0} \\ u_{l(2,i)-1}(2,i) \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} \overline{0} \\ u_2(2,i) \end{pmatrix}, \quad 1 \le i \le p_2.$$

Тому внаслідок рівності (4) і леми 4 підпростір $X_-^2(T_A)$ є лінійною оболонкою векторів (8).

Аналогічно $X_+^2(T_B)$ є лінійною оболонкою векторів (9). Таким чином, за умов теореми 2 умови a_2) теореми 1 та b_2) теореми 2 теж рівносильні.

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Припустимо, що операторні рівняння* (7) *мають корені* $\Lambda_1,\ \Lambda_2$ *і* Φ_1, Φ_2 *відповідно, які зводяться до діагонального вигляду в одному і тому ж базисі, тобто існує такий базис* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *у просторі* X, *що для кожного* $1 \le i \le m$ *і* $k = 1, 2$ *існують такі* $z(k,i)$, $\lambda(k,i) \in \mathbb{C}$, *що*

$$\Lambda_k u_i = z(k,i) u_i, \qquad \Phi_k u_i = \lambda(k,i) u_i, \tag{10}$$

а також

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1, \qquad \Phi_1 + \Phi_2 = B_1. \tag{11}$$

Для різницевого рівняння (1) *умова обмеженості виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

c_1) $|z(k,i)| \ne 1, |\lambda(k,i)| \ne 1$ *для* $k = 1, 2, \quad 1 \le i \le m$;

c_2) *якщо серед чисел* $z(1,i)$, $z(2,i)$ *рівно* p_i *лежать всередині кола* S, *а серед чисел* $\lambda(1,i)$, $\lambda(2,i)$ *рівно* q_i *— зовні* S, *то* $p_i + q_i = 2$ *для кожного* $1 \le i \le m$.

Доведення. Внаслідок (10), (11) умова обмеженості для різницевого рівняння (1) виконується у тому і тільки у тому випадку, коли умова обмеженості виконується для кожного з таких m числових різницевих рівнянь:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= (z(1,i) + z(2,i))\alpha_n - z(1,i)z(2,i)\alpha_{n-1} + \beta_n, \quad n \ge 1, \\ \alpha_{n+1} &= (\lambda(1,i) + \lambda(2,i))\alpha_n - \lambda(1,i)\lambda(2,i)\alpha_{n-1} + \beta_n, \quad n \le 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Тут $\{\beta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана, а $\{\alpha_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шукана обмежені послідовності комплексних чисел.

Застосовуючи при фіксованому $1 \le i \le m$ до рівняння (12) лему 1 і теорему 1, робимо висновок, що для (12) умова обмеженості виконується тоді і тільки тоді, коли оператори в $\mathbb{C}^2$, які задаються матрицями

$$T_{A,i} = \begin{pmatrix} z(1,i) + z(2,i) & -z(1,i)z(2,i) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_{B,i} = \begin{pmatrix} \lambda(1,i) + \lambda(2,i) & -\lambda(1,i)\lambda(2,i) \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

задовольняють умови a_1), a_2) при $X^2 = \mathbb{C}^2$.

Неважко переконатися, що $z(1,i)$, $z(2,i)$ — власні числа оператора $T_{A,i}$, а також при $z(1,i) \ne z(2,i)$ їм відповідають власні вектори $\begin{pmatrix} z(1,i) \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} z(2,i) \\ 1 \end{pmatrix}$, а при $z(1,i) = z(2,i)$ — власний $\begin{pmatrix} z(1,i) \\ 1 \end{pmatrix}$ і приєднаний $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ вектори. Тому при $|z(1,i)| \ne 1,\ |z(2,i)| \ne 1$ підпростори $\mathbb{C}_-^2(T_{A,i})$, $\mathbb{C}_+^2(T_{A,i})$ для цього оператора будуються за таким правилом:

якщо $z(1,i),\ z(2,i)$ лежать всередині кола S, то $\mathbb{C}^2_-(T_{A,i}) = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^2_+(T_{A,i}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$;

якщо $z(1,i),\ z(2,i)$ лежать зовні S, то $\mathbb{C}^2_-(T_{A,i}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathbb{C}^2_+(T_{A,i}) = \mathbb{C}^2$;

якщо $z(1,i)$ лежать всередині, а $z(2,i)$ — зовні S, то

$$\mathbb{C}^2_-(T_{A,i}) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} z(1,i) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathbb{C}^2_+(T_{A,i}) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} z(2,i) \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

де л.о. $\left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\}$ позначає лінійну оболонку в $\mathbb{C}^2$ вектора $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Аналогічно будуються підпростори $\mathbb{C}^2_-(T_{B,i})$ і $\mathbb{C}^2_+(T_{B,i})$. Тому для еквівалентності умов a_2) теореми 1 і c_2) теореми 3 для різницевого рівняння (12) достатньо зауважити, що $\mathbb{C}^2$ є прямою сумою л.о.$\left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ і л.о.$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ для довільних $z, \lambda \in \mathbb{C},\ z \neq \lambda$.

Теорему 3 доведено.

Література

1. М. Ф. Городній, І. В. Гончар, *Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом*, Доп. НАН України, № 12, 12 – 16 (2016).
2. В. Ю. Слюсарчук, *Необхідні і достатні умови оборотності кусково-автономних різницевих операторів у просторі обмежених двосторонніх послідовностей*, Нелінійні коливання, **23**, № 1, 90 – 111 (2020).
3. В. Ю. Слюсарчук, *Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами*, Укр. мат. журн., **72**, № 6, 822 – 841 (2020).
4. М. Ф. Городній, В. П. Кравець, *Обмежені розв'язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта*, Доп. НАН України, № 2, 12 – 16 (2019).
5. М. Ф. Городній, В. П. Кравець, *Про обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку*, Нелінійні коливання, **22**, № 2, 196 – 201 (2019).
6. В. Е. Слюсарчук, *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем*, Укр. мат. журн., **35**, № 1, 109 – 115 (1983).
7. А. Я. Дороговцев, *Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем*, Вища шк., Киев (1992).
8. Л. Ю. Кабанцова, *Линейные разностные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов*, Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика, **17**, вып. 3, 285 – 293 (2017).
9. И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, Наука, Москва (1971).

Одержано 02.04.20