DOI: 10.37863/umzh.v72i8.6062

УДК 517.9

М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

ДВОВИМІРНА ДІЙСНА НАПІВСИЛЬНА ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ ТА ВІДПОВІДНІ БЛОЧНІ МАТРИЦІ. I

The relationship between the classical moment problem and the spectral theory of Jacobi matrices is generalized. We present the solution of the two-dimensional half-strong moment problem and suggest an analog of Jacobi-type matrices associated with the two-dimensional half-strong moment problem and the corresponding system of polynomials orthogonal with respect to a measure with compact support in the real plane.

Узагальнено зв'язок класичної проблеми моментів із спектральною теорією матриць Якобі. Наведено розв'язок двовимірної напівсильної проблеми моментів і запропоновано аналог матриць типу Якобі, що відповідає двовимірній напівсильній проблемі моментів, та відповідну систему поліномів, ортогональних відносно міри із компактним носієм на дійсній площині.

1. Вступ. *Цю статтю присвячено 95-річчю від дня народження Ю. М. Березанського* (08.05.1925 – 07.06.2019). Робота складається із двох частин. У вступі наведено основну ідею на прикладі класичної проблеми моментів Гамбургера [2, 6] та основний результат роботи, а саме, класичний випадок порівнюється з новим. У п. 2 для повноти огляду та зручності подальшого викладу наведено розв'язок загального варіанту напівсильної двовимірної дійсної проблеми моментів.

Друга частина роботи містить пряму і обернену спектральні задачі, що відповідають напівсильній двовимірній дійсній проблемі моментів. Ці задачі є узагальненням зв'язку класичної проблеми моментів Гамбургера, матриці Якобі і відповідних ортогональних поліномів на випадок напівсильної двовимірної дійсної проблеми моментів, трьох блочних матриць типу Якобі і відповідних ортогональних поліномів (за двома змінними) на дійсній площині.

Робота є продовженням попередніх досліджень [7 – 9, 17 – 20], які зібрано в [10]. Зауважимо, що в роботах [21, 26] у стислій формі наведено пряму й обернену спектральні задачі, що відповідають сильній (за обома змінними) двовимірній дійсній проблемі моментів.

Основний підхід роботи традиційно базується на розкладі Ю. М. Березанського [7] за узагальненими власними векторами для сім'ї комутуючих самоспряжених операторів. Цей підхід бере початок у роботах М. Г. Крейна [29, 30].

Розгляд напівсильної двовимірної дійсної проблеми моментів веде до дослідження трьох комутуючих самоспряжених операторів, серед яких два є взаємно оберненими. Нагадаємо, що при дослідженні сильної двовимірної дійсної проблеми моментів виникають чотири комутуючі самоспряжені оператори, серед яких кожні два є взаємно оберненими, а не сильної — тільки два комутуючі самоспряжені оператори.

Взагалі двовимірна проблема моментів [20, 24] тісно пов'язана з багатовимірними [1, 2, 4, 11, 12, 15, 16, 27, 28, 35, 38 – 43].

Для кращого розуміння результатів пп. 3, 4 нагадаємо [1, 2] основні положення прямої й оберненої спектральних задач для класичної матриці Якобі та відповідних ортогональних поліномів на дійсній осі $\mathbb{R}$. У класичному випадку вивчається симетрична матриця з умовами на коефіцієнти:

$$J = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad a_n > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{1}$$

На фінітних послідовностях $f \in l_{\rm fin} \subset l_2$ ця матриця визначає оператор, який також позначимо через J. Як відомо, цей оператор є ермітовим з індексами дефекту $(0,0)$ або $(1,1)$ і завжди має самоспряжене розширення в l_2. За певних умов на коефіцієнти матриці J замикання оператора J є самоспряженим оператором в l_2. Далі вважатимемо, що J є самоспряженим.

Опишемо пряму спектральну задачу, тобто розклад за узагальненими власними векторами для J. Потрібно отримати послідовність поліномів $P(x) = (P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, як покроковий розв'язок рівняння $JP(x) = xP(x)$, де за початкову умову взято $P_0(x) = 1$, тобто

$$\begin{gathered} a_{n-1}P_{n-1}(x) + b_nP_n(x) + a_nP_{n+1}(x) = xP_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ P_0(x) := 1, \quad P_{-1}(x) = 0, \quad a_{-1} := 0, \end{gathered} \tag{2}$$

де коефіцієнти взято з матриці (1) із відповідними умовами.

Послідовність поліномів $P(x)$, значення яких при всіх $x \in \mathbb{R}$ належать до дійсної частини $l = \mathbb{C}^\infty$, є узагальненими власними векторами оператора J із власними значеннями x (у сенсі деякого, певним чином побудованого, оснащення l_2). Використовуючи ці власні вектори, відповідне перетворення Фур'є, позначене знаком $\wedge$, записуємо у вигляді

$$l_2 \supset l_{\rm fin} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x) \in L_2(\mathbb{R}, d\rho(x)) =: L_2. \tag{3}$$

Після замикання цей вираз визначає унітарний оператор з усього простору l_2 у весь простір L_2. Образом J при цьому відображенні є оператор множення на x у просторі L_2. Поліноми $P_n(x)$ є ортогональними у просторі L_2 відносно міри $d\rho(x)$.

Під оберненою спектральною задачею у класичному випадку розуміємо наступне. Нехай на $\mathbb{R}$ задано ймовірнісну міру Бореля $d\rho(x)$, яка має всі моменти:

$$s_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \, d\rho(x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Припускається, що носій $d\rho(x)$ містить відкритий інтервал (тобто міра не є чисто атомарною). Тоді виникає питання: чи можна знайти таку матрицю Якобі J, щоб відповідна міра $d\rho(x)$ була однозначно визначеною за J? Відповідь отримуємо за такою схемою. До системи лінійно незалежних відносно $d\rho(x)$ функцій, яка є тотальною в L_2:

$$1, x, x^2, \ldots \tag{5}$$

застосовуємо класичну процедуру ортогоналізації за Шмідтом. Як результат отримуємо послідовність поліномів $P_0(x) = 1,\ P_1(x),\ P_2(x), \ldots$, які утворюють ортонормований базис в L_2. Коефіцієнти матриці J відновлюються за формулами

$$a_n = \int\limits_{\mathbb{R}} x P_n(x) P_{n+1}(x)\, d\rho(x), \quad b_n = \int\limits_{\mathbb{R}} x (P_n(x))^2\, d\rho(x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{6}$$

Зазначений зв'язок матриць Якобі і класичної проблеми моментів та ортогональних поліномів є плідним при дослідженні й інших об'єктів (див., наприклад, роботи [1, 2, 30]).

Мета подальших досліджень полягає в тому, щоб вияснити який вигляд має узагальнення викладеної вище теорії у випадку, коли замість класичної проблеми моментів розглядати дійсну напівсильну двовимірну проблему моментів. При цьому замість одного самоспряженого оператора в l_2 розглядаються три комутуючі самоспряжені оператори у просторі типу l_2, серед яких два є взаємно оберненими. Точніше, замість дійсної частини простору $l_2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \ldots$ пропонується простір

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots, \quad \text{де} \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{7}$$

і замість скалярної матриці (1) розглядаються три блочні матриці типу Якобі. (Насправді, з $\mathbf{l}_2$ теж розглядається тільки дійсна частина.)

Перша матриця має елементи a_n, b_n і c_n, які у свою чергу є скінченновимірними матрицями, що діють між відповідними просторами $\mathcal{H}_n$ з (7), тобто

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{cccll} a_n & : & \mathcal{H}_n & \longrightarrow & \mathcal{H}_{n+1}, \\ b_n & : & \mathcal{H}_n & \longrightarrow & \mathcal{H}_n, \\ c_n & : & \mathcal{H}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{array} \tag{8}$$

Матриця (8) звичайним чином визначає дію оператора (позначимо його A) на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\text{fin}} \subset \mathbf{l}_2$ в $\mathbf{l}_2$. Для простоти викладу припустимо, що норми всіх матриць a_n, b_n і c_n обмежені однією величиною і, отже, оператор A є обмеженим в $\mathbf{l}_2$. Матриці a_n, b_n і c_n та їхні коефіцієнти задовольняють такі умови:

$$a_n = \left.\begin{bmatrix} a_{n;0,0} & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & a_{n;1,1} & \ldots & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & * & * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n;n,n} & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{0 \qquad 0 \qquad \ldots \qquad 0 \qquad 0}_{n+1} & & & & & \underbrace{0 \quad \ldots \quad 0}_{n} & & \end{bmatrix}\right\} \begin{array}{l} n+1 \\ n+2 \end{array}, \tag{9}$$

$$c_n=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccccccc} c_{n;0,0} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ * & c_{n;1,1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ * & * & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ * & * & \ldots & * & c_{n;n,n} & 0 & \ldots & 0\\ * & * & \ldots & * & * & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ * & * & \ldots & * & * & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right]\\ \underbrace{\hphantom{c_{n;0,0}\quad c_{n;1,1}\quad \ldots\quad 0\quad c_{n;n,n}}}_{n+1}\underbrace{\hphantom{0\quad \ldots\quad 0}}_{n+2}\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}n+1\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}n\\ \\ \end{array},\tag{10}$$

$$\begin{gathered} a_{n;0,0}, a_{n;1,1}, \ldots, a_{n;n,n} > 0, \quad c_{n;0,0}, c_{n;1,1}, \ldots, c_{n;n,n} > 0,\\ a_{n;i,j} = c_{n;j,i}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n+2, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}\tag{11}$$

Матриці b_n можуть мати довільну внутрішню структуру, але таку, щоб J_A була ермітовою. Тут і далі $*$ позначає ненульові елементи матриць.

Друга матриця має елементи u_n, w_n і v_n, які також є скінченновимірними операторами (матрицями), що діють між відповідними просторами $\mathcal{H}_n$ з (7), тобто

$$J_{A^{-1}}=\left[\begin{array}{ccccc} w_0 & v_0 & 0 & 0 & \cdots\\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & \cdots\\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right], \qquad \begin{array}{rcrcl} u_n & : & \mathcal{H}_n & \longrightarrow & \mathcal{H}_{n+1},\\ w_n & : & \mathcal{H}_n & \longrightarrow & \mathcal{H}_n,\\ v_n & : & \mathcal{H}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{H}_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{array}\tag{12}$$

Матриця (12) породжує у звичайний спосіб оператор на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \subset \mathbf{l}_2$ у просторі $\mathbf{l}_2$. Норми всіх операторів u_n, w_n і v_n обмежені однією величиною і, отже, оператор також є обмеженим в $\mathbf{l}_2$. Оскільки матриця $J_{A^{-1}}$ є оберненою до J_A, то і відповідний до неї оператор позначено A^{-1}. Елементи u_n, w_n і v_n задовольняють такі умови:

$$u_n=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * & *\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & * & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * & *\\ 0 & \ldots & 0 & u_{n;n+2,n} & \ldots & * & *\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & u_{n;2n+1,2n-1} & *\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & u_{n;2n+2,2n} \end{array}\right]\\ \underbrace{\hphantom{0\quad \ldots\quad 0}}_{n}\underbrace{\hphantom{u_{n;n+2,n}\quad \ldots\quad u_{n;2n+1,2n-1}\quad u_{n;2n+2,2n}}}_{n+1}\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}n+2\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}n+1\\ \\ \end{array},\tag{13}$$

$$v_n = \begin{array}{ll} \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ * & \ldots & * & v_{n;n,n+2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \ldots & * & * & \ldots & 0 & 0 \\ * & \ldots & * & * & \ldots & v_{n;2n-1,2n+1} & 0 \\ * & \ldots & * & * & \ldots & * & v_{n;2n,2n+2} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\end{array}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}*\\ \vdots\\ *\\ *\\ *\end{array}}\right\} n+1 \end{array} \\ \quad\underbrace{\hphantom{0 \ldots 0}}_{n+2}\underbrace{\hphantom{0 \quad \ldots \quad v_{n;2n-1,2n+1} \quad v_{n;2n,2n+2}}}_{n+1} & \end{array}, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} u_{n;n+2,n}, \ldots, u_{n;2n+1,2n-1}, u_{n;2n+2,2n} > 0, \quad v_{n;n,n+2}, \ldots, v_{n;2n-1,2n+1}, v_{n;2n,2n+2} > 0, \\ u_{n;i,j} = v_{n;j,i}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n+2, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{gathered} \tag{15}$$

Матриці w_n можуть мати довільну внутрішню структуру, але таку, щоб $J_{A^{-1}}$ була симетричною й алгебраїчно оберненою до J_A на фінітних векторах з $\mathbf{l}_2$.

Третя матриця має елементи p_n, q_n і r_n, які є скінченновимірними операторами (матрицями) і діють між відповідними просторами $\mathcal{H}_n$ з (7), тобто

$$J_B = \left[\begin{array}{ccccc} q_0 & r_0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & q_1 & r_1 & 0 & \cdots \\ 0 & p_1 & q_2 & r_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right], \qquad \begin{array}{llcll} p_n & : & \mathcal{H}_n & \longrightarrow & \mathcal{H}_{n+1}, \\ q_n & : & \mathcal{H}_n & \longrightarrow & \mathcal{H}_n, \\ r_n & : & \mathcal{H}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{H}_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{array} \tag{16}$$

Матриця (16) визначає природним чином ермітів оператор (позначений B) на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \subset \mathbf{l}_2$ в $\mathbf{l}_2$. Також для простоти викладу вважаємо, що всі матриці, як оператори p_n, q_n і r_n, обмежені однією величиною, а отже, оператор B є обмеженим і самоспряженим в $\mathbf{l}_2$. Елементи p_n, q_n і r_n задовольняють такі умови:

$$p_n = \begin{array}{ll} \left[\begin{array}{ccccc} * & * & * & \ldots & * \\ p_{n;1,0} & * & * & \ldots & * \\ 0 & p_{n;2,1} & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{n;2n+1,2n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right] & \left.\vphantom{\begin{array}{c}*\\ *\\ *\\ \vdots\\ *\\ 0\end{array}}\right\} 2n+3, \\ \quad\underbrace{\hphantom{p_{n;1,0} \quad p_{n;2,1} \quad * \quad \ldots \quad p_{n;2n+1,2n}}}_{2n+1} & \end{array} \tag{17}$$

$$r_n = \begin{array}{ll} \left[\begin{array}{ccccccc} * & r_{n;0,1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & r_{n;1,2} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \ldots & * & r_{n;2n,2n+1} & 0 \end{array}\right] & \left.\vphantom{\begin{array}{c}*\\ *\\ \vdots\\ *\end{array}}\right\} 2n+1, \\ \quad\underbrace{\hphantom{* \quad r_{n;0,1} \quad r_{n;1,2} \quad \ldots \quad 0 \quad r_{n;2n,2n+1} \quad 0}}_{2n+3} & \end{array} \tag{18}$$

$$p_{n;1,0}, p_{n;2,1}, \ldots, p_{n;2n+1,2n} > 0, \quad r_{n;0,1}, r_{n;1,2}, \ldots, r_{n;2n,2n+1} > 0,$$
$$p_{n;i,j} = r_{n;j,i}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n+2, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{19}$$

Матриці q_n можуть мати довільну внутрішню структуру, але таку, щоб матриця J_B була ермітовою і комутувала із J_A (а отже, і з $J_{A^{-1}}$) на фінітних векторах з $\mathbf{l}_2$.

На завершення досліджень наведено приклад з умовами на коефіцієнти a_n, b_n, c_n, u_n, w_n, v_n і p_n, q_n, r_n, $n \in \mathbb{N}_0$, за яких матриці J_A і $J_{A^{-1}}$ є взаємно оберненими і комутують із J_B.

Нехай $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ належать узагальненому спектру операторів A, (A^{-1}) та B і $P(x,y) = (P_{t,j}(x,y))$, $t \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$, $\{x,y\} \in \mathbb{R}^2$, — їхні відповідні узагальнені власні вектори. Тут $P_n(x,y) \in \mathcal{H}_n$ — векторнозначні поліноми змінних x, x^{-1} та y, тобто їхні складові є комбінаціями $y^t x^j$, $t \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}$. Згідно з теоремою про розклад за узагальненими власними векторами Ю. М. Березанського, ці поліноми є розв'язками системи трьох рівнянь типу (2) (але з матричними коефіцієнтами)

$$AP(x,y) = xP(x,y), \quad A^{-1}P(x,y) = x^{-1}P(x,y), \quad BP(x,y) = yP(x,y).$$

Тепер відповідне перетворення Фур'є типу (3) для операторів A, A^{-1} і B має вигляд

$$\mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \hat{f}(x,y) = \sum_{\substack{t \in \mathbb{N}_0 \\ j \in \mathbb{Z}}} (f_{t,j}, P_{t,j}(x,y))_{\mathcal{H}_n} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)) =: L_2, \tag{20}$$

де $d\rho(x,y)$ — спектральна міра A, A^{-1} і B на дійсній площині $\mathbb{R}$. Перетворення (20) є після замикання унітарним оператором, який діє з усього простору $\mathbf{l}_2$ у весь простір L_2. Поліноми $P_{t,j}(x,y)$ ортогональні відносно міри $d\rho(x,y)$ і утворюють базис простору L_2. Останній факт у такому вигляді сформульовано у вигляді теореми 1 у другій частині роботи, але далі перепозначимо поліноми таким чином:

$$P_n(x,y) = (P_{n;0}(x,y), P_{n;1}(x,y), \ldots, P_{n;2n}(x,y)) = (Q_{n;0}(x,y), Q_{n;1}(x,y), \ldots, Q_{n;2n}(x,y)).$$

Описаний вище результат називають прямою спектральною задачею для A (8) з властивостями (9) – (11), A^{-1} (12) з властивостями (13) – (15) і B (16) з властивостями (17) – (19).

Обернена спектральна задача тепер має такий вигляд. Нехай задано борелівську міру $d\rho(x,y)$ з компактним носієм на $\mathbb{R}^2$. Припускається, що міра має всі моменти

$$c_{t,j} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y^t x^j d\rho(x,y), \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{21}$$

а носій $d\rho(x,y)$ такий, що всі функції вигляду $y^t x^j$, $t \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$, лінійно незалежні і утворюють тотальну множину в L_2 (наприклад, носій $d\rho(x,y)$ містить деяку відкриту підмножину з $\mathbb{R}^2$).

Задача полягає у побудові блочних матриць типу Якобі (8), (12) і (16) із властивостями відповідно (9) – (11), (13) – (15), (17) – (19) таких, щоб спектральна міра відповідних комутуючих самоспряжених операторів A, (A^{-1}) і B відповідала початковій (заданій) мірі.

Для розв'язання цієї задачі, як і у класичному випадку, необхідно застосувати до послідовності функцій

$$y^t x^j \in L_2, \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{22}$$

(замість (5)) процедуру ортогоналізації Шмідта. Враховуючи те, що послідовність (22) є двохіндексною і, більш того, один індекс набуває і додатних, і від'ємних значень, потрібно вибрати для (22) деякий оптимально зручний порядок ортогоналізації. Як результат ортогоналізації отримуємо послідовність поліномів

$$P_n(x,y) = (P_{n;0}(x,y), P_{n;1}(x,y), \ldots, P_{n;2n}(x,y)), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

а коефіцієнти матриць (8), (12) і (16) із властивостями (9) – (11), (13) – (15) і (17) – (19) відповідно відновлюються за формулами типу (6).

Спочатку наведемо деякий розв'язок напівсильної проблеми моментів. Під напівсильною розуміється проблема знаходження умов на задану послідовність $\{c_{t,j}\}$, $t \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$, дійсних чисел $c_{t,j} \in \mathbb{R}$, яка породжує додатну міру Бореля $d\rho(x,y)$ на дійсній площині $\mathbb{R}^2$, для якої має місце зображення

$$c_{t,j} = \int_p^\infty \int_q^\infty y^t x^j \, d\rho(x,y), \quad -\infty \le p < \infty, \quad -\infty \le q < \infty, \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Проблема розв'язується за умови, що множина $y^t x^j$, $t \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$, є щільною і лінійно незалежною в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$. Так сформульована проблема є сильною за змінною x і не сильною (звичайною) за змінною y. Звичайну проблему сформульовано в (4). Під сильною проблемою розуміють пошук умов на задану послідовність дійсних чисел $s_n \in \mathbb{R}$, за яких існує така міра $d\rho(x)$ на дійсній осі $\mathbb{R}$, що

$$s_n = \int_p^\infty x^n \, d\rho(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $p = 0$, то цю проблему називають проблемою Стільтьєса. Достатньо вичерпно її розглянуто в роботі [25]. У зв'язку з вивченням ортогональних поліномів, що відповідають цій проблемі, відзначимо роботи [22, 23]. Сильна проблема моментів та відповідні поліноми також мають узагальнення на випадок матричної проблеми [36, 37].

Зауважимо, що, не зважаючи на близькість, дійсна двовимірна проблема, розглянута в [20], і сформульована в (23) мають відмінності.

У роботі підхід до розв'язання проблеми базується на методі з [2], який узагальнює [29, 30]. Розв'язок наведено для випадку (23) із $p = q = -\infty$. Використовуючи задану послідовність дійсних чисел $\{c_{t,j}\}$, $t \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$, будуємо (квазі)скалярний добуток

$$(f,g)_C = \sum_{\substack{t,q \in \mathbb{N}_0 \\ j,k \in \mathbb{Z}}} f_{t,j} \bar{g}_{q,k} c_{t+q,j+k}$$

для фінітних послідовностей $f = (f_{t,j})$ і $g = (g_{q,k})$, $t, q \in \mathbb{N}_0$, $j, k \in \mathbb{Z}$, $f_{t,j}, g_{q,n} \in \mathbb{C}$, де вимагається умова $(f, f)_C \geq 0$ для довільної фінітної послідовності $f = (f_{t,j})$. У гільбертовому просторі, породженому скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_C$, розглядаються оператори A, A^{-1} і B, які діють на фінітних послідовностях за правилом

$$(Af)_{t,j} = f_{t,j-1}, \quad (A^{-1}f)_{t,j} = f_{t,j+1}, \quad (Bf)_{t,j} = f_{t-1,j}, \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{24}$$

де покладається $f_{-1,j} = 0$. Неважко переконатися, що у такому визначенні оператор A є симетричним, A^{-1} — оберненим до A і B — симетричним, а A, A^{-1} і B комутують на фінітних векторах.

Потім до цих операторів (точніше, до самоспряженого розширення операторів A і B, які комутують у сильному резольвентному сенсі, тобто комутують їхні резольвенти, що еквівалентно комутуванню в сенсі розкладів одиниці цих операторів) застосовується теорія розкладу за узагальненими власними векторами [2, 3, 5, 6]. Так побудовані узагальнені власні вектори, відповідні до (24), із двопараметричними власними значеннями $\{x, y\} \in \mathbb{R}^2$ мають вигляд поліномів $P(x, y)$ за змінними $y^t x^j$, $t \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$. Отже, відповідна рівність Парсеваля, отримана завдяки виразу (24), для довільних f і g в термінах їхніх „коефіцієнтів Фур'є” приводить безпосередньо до зображення (23).

У питанні єдиності міри $d\rho(x, y)$, яка дає зображення (23), важливу роль відіграє квазіаналітичний критерій самоспряженості.

У наступному пункті наведено варіант відповідної проєкційної спектральної теореми.

Нагадаємо, що теорію блочних матриць типу Якобі повно викладено в [10]. Серед викладеного в [10] — блочні матриці, що відповідають проблемам моментів у різних постановках: дійсній двовимірній (не сильній), комплексній, зокрема в експоненціальній формі, одновимірній дійсній (сильній), як частинний випадок та із загальної точки зору, тригонометричній (CMV-матриці). Принципову можливість розв'язання прямої та оберненої спектральних задач, пов'язаних із відповідними матрицями, висловлено в роботах [41, 42]. Випадок ермітового або самоспряженого оператора у просторі $l_2(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \ldots$, де $\mathcal{H}$ — довільний гільбертовий простір $\dim\mathcal{H} \leq \infty$, досліджено в [2].

Було б цікаво розвинути теорію блочних матриць типу (8), (12), (16) у просторі $\mathbf{l}_2$ (7) у випадку необмежених комутуючих ермітових операторів A або A^{-1} та B (тут A^{-1} розуміється як щільно визначений). Які умови повинні задовольняти елементи матриць J_A або $J_{A^{-1}}$ та J_B, які б гарантували їхню істотну самоспряженість? У яких термінах можна було б описати самоспряжені розширення A або A^{-1} та B, які б комутували?

1. Попередні відомості. Нехай $\mathcal{H}$ — сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$, A і B — самоспряжені оператори із областями визначення $\mathfrak{D}(A)$ і $\mathfrak{D}(B)$ в $\mathcal{H}$ такі, що існує обернений A^{-1} (можливо, необмежений і щільно визначений) і оператори комутують у сильному резольвентному сенсі. Розглянемо таке оснащення простору $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+ \supset \mathcal{D}, \tag{25}$$

де $\mathcal{H}_+$ — гільбертів простір, топологічно і квазіядерно вкладений в $\mathcal{H}$ (під топологічністю вкладення розуміється щільність і неперервність, а під квазіядерністю — що оператор вкладення є оператором Гільберта – Шмідта), $\mathcal{H}_-$ — дуальний до $\mathcal{H}_+$ простір відносно $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ — лінійна множина, яка є топологічним простором, топологічно вкладеним в $\mathcal{H}_+$.

Оператори A, A^{-1} і B називаються стандартно пов'язаними із ланцюжком (25), якщо $\mathcal{D} \subset \mathfrak{D}(A)$, $\mathcal{D} \subset \mathfrak{D}(A^{-1})$, $\mathcal{D} \subset \mathfrak{D}(B)$ і звуження $A \upharpoonright \mathcal{D}$, $A^{-1} \upharpoonright \mathcal{D}$, $B \upharpoonright \mathcal{D}$ діють неперервно з $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}_+$.

Нагадаємо, що вектор $\omega_0 \in \mathcal{D}$ є сильно циклічним для операторів A, A^{-1} і B, якщо для $t \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}$ маємо $\omega_0 \in \mathfrak{D}(A^j) \cap \mathfrak{D}(B^t)$ і $B^t A^j \omega_0 \in \mathcal{D}$ та множина всіх таких векторів разом із ω_0 є тотальною в $\mathcal{H}_+$ (а отже, і в $\mathcal{H}$). Зауважимо, що сильна циклічність від звичайної відрізняється належністю відповідних векторів не до простору, а до множини $\mathcal{D}$.

Припускаючи, що сильно циклічний вектор існує, сформулюємо спрощений варіант проєкційної спектральної теореми. Повний варіант теореми наведено, наприклад, у [4], розділ 3, теорема 2.7, або [2], розділ 5, [5], розділ 15.

Теорема 1. *Для самоспряжених комутуючих у сильному резольвентному сенсі операторів A, A^{-1} і B, що мають сильно циклічний вектор у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, існує невід'ємна міра Бореля $d\rho(x, y)$ така, що для кожної пари змінних $\{x, y\} \in \mathbb{R}^2$ ρ-майже скрізь існує узагальнений спільний власний вектор $\xi_{x,y} \in \mathcal{H}_-$, тобто*

$$\begin{aligned}(\xi_{x,y}, Af)_{\mathcal{H}} &= x(\xi_{x,y}, f)_{\mathcal{H}},\\ (\xi_{x,y}, A^{-1}f)_{\mathcal{H}} &= x^{-1}(\xi_{x,y}, f)_{\mathcal{H}},\\ (\xi_{x,y}, Bf)_{\mathcal{H}} &= y(\xi_{x,y}, f)_{\mathcal{H}}, \quad f \in \mathcal{D}, \quad \xi_{x,y} \neq 0,\end{aligned}$$

де $\{x, y\}$ — двопараметричне власне значення, $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ — дуальний скалярний добуток (спарення між просторами $\mathcal{H}_+$ і $\mathcal{H}_-$ в сенсі (25)).

Відповідне перетворення Фур'є F має вигляд

$$\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+ \ni f \mapsto (Ff)(x, y) = \hat{f}(x, y) = (f, \xi_{x,y})_{\mathcal{H}} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y))$$

і після замикання є унітарним оператором, що діє з $\mathcal{H}$ в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y))$. Образами операторів A, A^{-1} і B при перетворенні F є оператори множення на x, x^{-1} і y відповідно в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y))$.

Нагадаємо також, що для самоспряженого оператора $\mathcal{A}$, визначеного на $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ в $\mathcal{H}$, вектор $f \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$ називається квазіаналітичним [33, 34], якщо клас $\mathrm{C}\{m_n\}$, де $m_n = \|\mathcal{A}^n f\|_{\mathcal{H}}$, є квазіаналітичним. Нагадаємо, що це клас функцій на $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$, визначений виразом

$$\mathrm{C}\{m_n\} = \{f \in C^\infty([a, b])\ \exists K = K_f > 0,\ |f^{(n)}(t)| \leq K^n m_n,\ t \in [a, b],\ n \in \mathbb{N}_0\},$$

тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}^n f\|_{\mathcal{H}}^{-1/n} = \infty. \tag{26}$$

Квазіаналітичність використовується в критерії самоспряженості і комутативності [2, 3, 5, 33, 34]. В п. 2 істотно використовуються такі теореми [3], розділ 5, § 1 або [5], розділ 13, § 9 і [32].

Теорема 2. *Замкнений ермітів оператор $\mathcal{A}$ в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли в $\mathcal{H}$ існує тотальна множина квазіаналітичних векторів.*

Теорема з [32] дає корисний критерій комутативності необмежених самоспряжених операторів.

Теорема 3. *Нехай A і B — симетричні оператори, визначені на $\mathfrak{D}(A)$ і $\mathfrak{D}(B)$ у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, і щільна в $\mathcal{H}$ лінійна множина $\mathcal{D}$ міститься в області визначення операторів A, B, A^2, AB, BA і B^2, так що $ABf = BAf$ для всіх $f \in \mathcal{D}$.*

Якщо звуження A^2+B^2 на $\mathcal{D}$ є істотно самоспряженим оператором, то A і B комутують у сильному резольвентному сенсі.

2. Двовимірна дійсна напівсильна проблема моментів. Розв'язок двовимірної напівсильної проблеми моментів має такий вигляд.

Теорема 4. *Якщо двохіндексна послідовність дійсних чисел $\{c_{t,j}\}$, $t \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$, має зображення* (23) *з $p = q = -\infty$, тобто*

$$c_{t,j} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y^t x^j d\rho(x,y), \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{27}$$

то

$$\sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{f}_{q,k}c_{t+q,j+k} \geq 0 \tag{28}$$

для всіх фінітних послідовностей чисел $f = (f_{t,j})$, $f_{t,j} \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$.

Якщо для двохіндексної послідовності дійсних чисел $\{c_{t,j}\}$, $t \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}$, виконується (28) *і*

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{c_{(4p-4k),\varepsilon 4k}}\right)^{-1/p} = \infty, \tag{29}$$

де $\varepsilon = 1$ або $(\varepsilon = -1)$, то зображення (27) *існує і є єдиним.*

Доведення. Необхідність умови (28) є майже очевидною. Дійсно, якщо послідовність $\{c_{t,j}\}$, $t \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}$, має зображення (23), то для довільної фінітної послідовності $f = (f_{t,j})$, $f_{t,j} \in \mathbb{C}$, виконується

$$\sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{f}_{q,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{f}_{q,k}\int\limits_{\mathbb{R}^2} y^{t+q}x^{j+k}d\rho(x,y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{\substack{t\in\mathbb{N}_0\\ j\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}y^t x^j\right)\overline{\left(\sum_{\substack{q\in\mathbb{N}_0\\ k\in\mathbb{Z}}} f_{q,k}y^q x^k\right)}d\rho(x,y) \geq 0,$$

тобто отримуємо (28).

Позначимо через l лінійний простір послідовностей $(f_{t,j})_{t=0,j=-\infty}^{\infty,\infty}$ з елементами $f_{t,j} \in \mathbb{C}$, а через l_{fin} його лінійну підмножину, яка містить фінітні послідовності f, тобто такі послдовності, що $f_{t,j} \neq 0$ лише для скінченних номерів t і j. Нехай $\delta_{t,j}, \quad t \in \mathbb{N}_0,\ j \in \mathbb{Z}$, — така δ-послідовність, що кожний $f \in l_{\text{fin}}$ має зображення $f = \sum_{\substack{t\in\mathbb{N}_0\\ j\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\delta_{t,j}$.

Розглянемо лінійні оператори, визначені на l_{fin}:

$$(Af)_{t,j} = f_{t,j-1}, \quad (A^{-1}f)_{t,j} = f_{t,j+1}, \quad (Bf)_{t,j} = f_{t-1,j}, \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{30}$$

де $f_{-1,j} \equiv 0$. Для δ-послідовності маємо

$$A\delta_{t,j} = \delta_{t,j+1}, \quad A^{-1}\delta_{t,j} = \delta_{t,j-1}, \quad B\delta_{t,j} = \delta_{t+1,j}, \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

Оператор A, його обернений A^{-1} і B є ермітовими відносно (квазі)скалярного добутку

$$(f,g)_C = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0,\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{g}_{q,k}c_{t+q,j+k}, \quad f,g \in l_{\text{fin}}. \tag{32}$$

Дійсно, для будь-яких $f,g \in l_{\text{fin}}$

$$(Af,g)_C = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} (Af)_{t,j}\bar{g}_{q,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j-1}\bar{g}_{q,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{g}_{q,k}c_{t+q,j+k+1},$$

$$(f,Ag)_C = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\overline{(Ag)}_{q,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{g}_{q,k-1}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{g}_{q,k}c_{t+q,j+k+1}.$$

Отже, $(Af,g) = (f,Ag),\ f,g \in l_{\text{fin}}$. Аналогічно для будь-яких $f,g \in l_{\text{fin}}$

$$(A^{-1}f,g)_C = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} (A^{-1}f)_{t,j}\bar{g}_{q,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j+1}\bar{g}_{q,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{g}_{q,k}c_{t+q,j+k-1},$$

$$(f,A^{-1}g)_C = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\overline{(A^{-1}g)}_{q,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{g}_{q,k+1}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{g}_{q,k}c_{t+q,j+k-1}.$$

Отже, $(A^{-1}f,g) = (f,A^{-1}g),\ f,g \in l_{\text{fin}}$. Також для будь-яких $f,g \in l_{\text{fin}}$

$$(Bf,g)_C = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} (Bf)_{t,j}\bar{g}_{q,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t-1,j}\bar{g}_{q,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{g}_{q,k}c_{t+q+1,j+k},$$

$$(f,Bg)_C = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\overline{(Bg)}_{q,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{g}_{q-1,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j}\bar{g}_{q,k}c_{t+q+1,j+k}.$$

Отже, $(Bf,g) = (f,Bg),\ f,g \in l_{\text{fin}}$. Зокрема, для будь-яких $f,g \in l_{\text{fin}}$

$$(Af,A^{-1}g)_C = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} (Af)_{t,j}\overline{(A^{-1}f)}_{q,k}c_{t+q,j+k} = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j-1}\bar{f}_{q,k+1}c_{t+q,j+k} = (f,g)_C.$$

Нехай C — гільбертів простір, отриманий як поповнення фактор-простору

$$\dot{l}_{\mathrm{fin}} := l_{\mathrm{fin}}/\{h \in l_{\mathrm{fin}} \mid (h,h)_C = 0\}.$$

Елементи f із C є представниками класу $\dot{f}$ еквівалентних елементів $\dot{l}_{\mathrm{fin}}$. Отже, оператори $\dot{A}$, $\dot{A}^{-1}$ і $\dot{B}$ коректно визначені в C:

$$\dot{A}\dot{f} = (Af)^{\cdot}, \quad f \in \mathfrak{D}(\dot{A}) = \dot{l}_{\mathrm{fin}},$$

$$\dot{A}^{-1}\dot{f} = (A^{-1}f)^{\cdot}, \quad f \in \mathfrak{D}(\dot{A}^{-1}) = \dot{l}_{\mathrm{fin}},$$

$$\dot{B}\dot{f} = (Bf)^{\cdot}, \quad f \in \mathfrak{D}(\dot{B}) = \dot{l}_{\mathrm{fin}}.$$

Позначимо через A, A^{-1} і B також замикання $\dot{A}$, $\dot{A}^{-1}$ і $\dot{B}$ в C. Цей факт у випадку одного самоспряженого оператора описано в [2], розділ 8, § 1, п. 4 і [3], розділ 5, § 5, п. 2.

Очевидно, що оператори A, A^{-1} і B комутують між собою на $G := l_{\mathrm{fin}}$, тобто $ABg = BAg$, $A^{-1}Bg = BA^{-1}g$, $A^{-1}Ag = AA^{-1}g$, $g \in G$.

У подальшому дослідженні використовується теорема 1. Для простоти викладу припустимо, що моментна послідовність $\{c_{t,j}\}$ не є виродженою, тобто якщо $(f,f)_C = 0$ для $f \in l_{\mathrm{fin}}$, то $f = 0$, і, отже, $\dot{f} = f$, $\dot{A} = A$, $\dot{B} = B$. Дослідження у загальному випадку є більш складними і громіздкими (див., наприклад, [2], розділ 8, § 1, п. 4 або [3], розділ 5, § 5, пп. 1 – 3).

Припустимо, що оператори B і A є істотно самоспряженими і комутують у сильному резольвентному сенсі. Нижче буде доведено, що B є істотно самоспряженим і комутує з A (або A^{-1}) у сильному резольвентному сенсі, якщо виконується умова (29) з $\varepsilon = 1$ (або $\varepsilon = -1$).

Розглянемо оснащення

$$(l_2(p))_{-,C} \supset C \supset l_2(p) \supset l_{\mathrm{fin}}, \tag{33}$$

де $l_2(p)$ — зважений l_2-простір з вагою $p = (p_{t,j})$, $t \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$, $p_{t,j} \geq 1$. Норма в $l_2(p)$, задана формулою $\|f\|^2_{l_2(p)} = \sum_{\substack{t\in\mathbb{N}_0\\ j\in\mathbb{Z}}} |f_{t,j}|^2 p_{t,j}$, $(l_2(p))_{-,C} = \mathcal{H}_-$, є негативним простором відносно позитивного $l_2(p) = \mathcal{H}_+$ і нульового $C = \mathcal{H}$ просторів.

Лема 1. *Послідовність $p_{t,j}$ завжди можна вибрати настільки швидко спадною, щоб вкладення $l_2(p) \hookrightarrow C$ було квазіядерним.*

Доведення. Нерівність (28) означає, що мультиматриця $(K_{t,j;q,k})_{t,q\in\mathbb{N}_0,j,k\in\mathbb{Z}}$, де $K_{t,j;q,k} = c_{t+q,j+k}$, є невід'ємною і, більше того,

$$|c_{t+q,j+k}|^2 = |K_{t,j;q,k}|^2 \leq K_{t,j;t,j} K_{q,k;q,k} = c_{2t,2j} c_{2q,2k}, \quad t,q \in \mathbb{N}_0, \quad j,k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Нехай $(q_{t,j})$, $t \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}$, $q_{t,j} \geq 1$, є такою, що $\sum_{t,j\in\mathbb{N}_0,q,k\in\mathbb{Z}} c_{2t,2j} q^{-1}_{t,j} < \infty$. Тоді з (32) і (34) випливає, що

$$\|f\|^2_C = \sum_{\substack{t,q\in\mathbb{N}_0\\ j,k\in\mathbb{Z}}} f_{t,j} \bar{f}_{q,k} c_{t+q,j+k} \leq \left(\sum_{\substack{t\in\mathbb{N}_0\\ j\in\mathbb{Z}}} \frac{c_{2t,2j}}{q_{t,j}} \right) \|f\|^2_{l_2(q)}, \ f \in l_{\mathrm{fin}}.$$

Отже, вкладення $l_2(q) \hookrightarrow C$ є топологічним. Якщо $\sum_{t\in\mathbb{N}_0,j\in\mathbb{Z}} q_{t,j} p^{-1}_{t,j} < \infty$, то вкладення $l_2(p) \hookrightarrow l_2(q)$ буде квазіядерним. Композиція $l_2(p) \hookrightarrow C$ квазіядерного і топологічного вкладень є квазіядерним вкладенням.

Далі використовується оснащення (33) для побудови узагальнених власних векторів. Внутрішня структура простору $(l_2(p))_{-,C}$ є складною, тому що складною є структура простору C. Отже, розглянемо допоміжне оснащення

$$l = (l_{\text{fin}})' \supset (l_2(p^{-1})) \supset l_2 \supset l_2(p) \supset l_{\text{fin}}, \tag{35}$$

де $l_2(p^{-1}),\ p^{-1} = (p_{t,j}^{-1}),\ t \in \mathbb{N}_0,\ j \in \mathbb{Z},$ — негативний простір по відношенню до позитивного $l_2(p)$ і нульового l_2. Ланцюги (33) і (35) мають однаковий позитивний простір $l_2(p)$. Ізоморфізм між просторами $(l_2(p))_{-,C}$ і $l_2(p^{-1})$ встановлює така лема.

Лема 2. *Припустимо, що задано два оснащення:*

$$\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+, \quad \mathcal{F}_- \supset \mathcal{F} \supset \mathcal{F}_+ = \mathcal{H}_+ \tag{36}$$

із однаковими позитивними просторами. Тоді існує такий унітарний оператор $U : \mathcal{H}_- \to \mathcal{F}_-$, $U\mathcal{H}_- = \mathcal{F}_-$, *що*

$$(U\xi, f)_{\mathcal{F}} = (\xi, f)_{\mathcal{H}}, \quad \xi \in \mathcal{H}_-, \quad f \in \mathcal{H}_+ = \mathcal{F}_+. \tag{37}$$

Цей оператор задається виразом $U = \mathbb{I}_{\mathcal{F}}^{-1}\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$, *де* $\mathbb{I}_{\mathcal{F}}$ *і* $\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ — *канонічні ізометричні ізоморфізми* (*ізоморфізм Березанського*) *у ланцюжках відповідно до* $\mathbb{I}_{\mathcal{F}}\mathcal{F}_- = \mathcal{F}_+$, $\mathbb{I}_{\mathcal{H}}\mathcal{H}_- = \mathcal{H}_+$.

Доведення леми див., наприклад, у [10].

Замість ланцюгів (36) використовуються (33) і (35). Нехай $\xi_{x,y} \in (l_2(p))_{-,C}$ — узагальнений власний вектор операторів $A,\ A^{-1}$ і B в термінах оснащень (33). В цьому випадку на підставі теореми 1 отримуємо

$$(\xi_{x,y}, Af)_C = x(\xi_{x,y}, f)_C, \quad (\xi_{x,y}, A^{-1}f)_C = x^{-1}(\xi_{x,y}, f)_C, \quad (\xi_{x,y}, Bf)_C = y(\xi_{x,y}, f)_C, \tag{38}$$

де $\{x, y\} \in \mathbb{R}^2,\ f \in l_{\text{fin}}$.

Позначимо

$$P(x, y) = U\xi_{x,y} \in l_2(p^{-1}) \subset l_2, \quad P(x, y) = (P_{t,j}(x, y)), \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Використовуючи (37), можна записати (38) у вигляді

$$\begin{aligned} (P(x, y), Af)_{l_2} &= x(P(x, y), f)_{l_2}, \\ (P(x, y), A^{-1}f)_{l_2} &= x^{-1}(P(x, y), f)_{l_2}, \\ (P(x, y), Bf)_{l_2} &= y(P(x, y), f)_{l_2}, \quad \{x, y\} \in \mathbb{R}^2,\ f \in l_{\text{fin}}. \end{aligned} \tag{39}$$

Відповідне перетворення Фур'є має вигляд

$$C \supset l_{\text{fin}} \ni f \to (Ff)(x, y) = \hat{f}(x, y) = (f, P(x, y))_{l_2} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y)). \tag{40}$$

Обчислимо $P(x, y)$. Використовуючи оператор A, визначений за правилом (30), (39), для будь-якого $f \in l_{\text{fin}}$ маємо

$$\sum_{\substack{t \in \mathbb{N}_0 \\ j \in \mathbb{Z}}} xP_{t,j}(x, y)\bar{f}_{t,j} = x(P(x, y), f)_{l_2} = (P(x, y), Af)_{l_2} =$$

$$= (AP(x,y), f)_{l_2} = \sum_{\substack{t\in\mathbb{N}_0\\ j\in\mathbb{Z}}} P_{t,j+1}(x,y)\bar{f}_{t,j}, \tag{41}$$

$$\sum_{\substack{t\in\mathbb{N}_0\\ j\in\mathbb{Z}}} x^{-1}P_{t,j}(x,y)\bar{f}_{t,j} = x^{-1}(P(x,y), f)_{l_2} =$$

$$= (P(x,y), A^{-1}f)_{l_2} = (A^{-1}P(x,y), f)_{l_2} = \sum_{\substack{t\in\mathbb{N}_0\\ j\in\mathbb{Z}}} P_{t,j-1}(x,y)\bar{f}_{t,j}. \tag{42}$$

Аналогічно, використовуючи (39), для будь-якого $f \in l_{\text{fin}}$ отримуємо

$$\sum_{\substack{t\in\mathbb{N}_0\\ j\in\mathbb{Z}}} yP_{t,j}(x,y)\bar{f}_{t,j} = y(P(x,y), f)_{l_2} =$$

$$= (P(x,y), Bf)_{l_2} = (BP(x,y), f)_{l_2} = \sum_{\substack{t\in\mathbb{N}_0\\ j\in\mathbb{Z}}} P_{t+1,j}(\lambda)\bar{f}_{t,j}. \tag{43}$$

Отже,

$$\begin{aligned} xP_{t,j}(x,y) &= P_{t,j+1}(x,y),\\ x^{-1}P_{t,j}(x,y) &= P_{t,j-1}(x,y),\\ yP_{t,j}(x,y) &= P_{t+1,j}(x,y), \quad t\in\mathbb{N}_0, \quad j\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Без втрати загальності можна покласти $P_{0,0}(x,y) = 1$. Тоді з (41) і (43) одержимо

$$P_{t,j}(x,y) = y^t x^j, \quad t\in\mathbb{N}_0, \quad j\in\mathbb{Z}. \tag{44}$$

Отже, перетворення Фур'є (40) набирає вигляду

$$C \supset l_{\text{fin}} \ni f \to (Ff)(x,y) = \hat{f}(x,y) = \sum_{\substack{t\in\mathbb{N}_0\\ j\in\mathbb{Z}}} f_{t,j} y^t x^j \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)), \tag{45}$$

а рівність Парсеваля —

$$(f,g)_C = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}d\rho(x,y), \quad f,g\in l_{\text{fin}}. \tag{46}$$

Для побудови перетворення Фур'є (40) і виконання формул (41)–(46) необхідно переконатися, що для операторів A, A^{-1} і B вектор $\Omega = \delta_{0,0} \in l_{\text{fin}}$ є сильно циклічним у сенсі оснащення (33). Але це дійсно так, оскільки з (30) випливає $B^tA^j\Omega = B^tA^j\delta_{0,0} = \delta_{t,j}$.

Рівність Парсеваля (46) приводить до зображення (23). Завдяки (44), (45) $\hat{\delta}_{t,j} = y^t x^j$. Отже, з (32) маємо

$$c_{t,j} = (\delta_{t,j}, \delta_{0,0})_C = (\hat{\delta}_{t,j}, \hat{\delta}_{0,0})_{L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y^t x^j d\rho(x,y),$$

де $t\in\mathbb{N}_0,\ j\in\mathbb{Z},\ \{x,y\}\in\mathbb{R}^2$.

Існування і однозначність зображення (27) випливає з самоспряженості і комутативності операторів A і B у випадку $\varepsilon = 1$ (A^{-1} і B у випадку $\varepsilon = -1$). Отже, для завершення доведення теореми 4 потрібно перевірити виконання того, що (29) дає самоспряженість та комутативність A і B. Далі використовуємо теорему 3 для випадку $\varepsilon = 1$. (Випадок $\varepsilon = -1$ розглядається аналогічно.) Для цього потрібно перевірити, що оператор $\mathcal{A} = A^2 + B^2$ має тотальну множину $\mathcal{D}$ квазіаналітичних векторів.

Завдяки (31) оператор $\mathcal{A} = A^2 + B^2$ діє на $\delta_{m,n} \in \mathcal{D}$ за правилом

$$\mathcal{A}\delta_{m,n} = (A^2 + B^2)\delta_{m,n} = \delta_{m+2,n} + \delta_{m,n+2}. \tag{47}$$

Очевидно, що $\mathcal{A} \geq 0$. Для $p \geq 1$ маємо

$$\mathcal{A}^p\delta_{m,n} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \delta_{m+2(p-k),n+2k}.$$

Згідно з (32), маємо норму $\|\cdot\|_C = \sqrt{(\cdot,\cdot)_C}$ в C. Отже, для будь-якого $\delta_{m,n} \in \mathcal{D}$ отримуємо

$$\|\mathcal{A}^p\delta_{m,n}\|_S = \left\| \sum_{k=0}^{p} C_p^k \delta_{m+2(p-k),n+2k} \right\|_S \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} C_p^k \|\delta_{m+2(p-k),n+2k}\| = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{c_{2m+4(p-k),2n+4k}}. \tag{48}$$

Оскільки

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\|\mathcal{A}^p\delta_{m,n}\|}} \geq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{c_{2m+4p-4k,2n+4k}}}} = \infty, \quad m,n \in \mathbb{N}_0,$$

то доводимо, що квазіаналітичність класу $\mathrm{C}\{\|\mathcal{A}^p\delta_{m,n}\|\}$ випливає з квазіаналітичності класу $\mathrm{C}\left\{\sqrt{\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{c_{2m+4p-4k,2n+4k}}}\right\}$ завдяки властивостям із [14, 31], що еквівалентно квазіаналітичності класу $\mathrm{C}\left\{\sqrt{\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{c_{4p-4k,4k}}}\right\}$. Але з квазіаналітичності з урахуванням (48) випливає умова (29), що і завершує доведення теореми 4.

Зауважимо, що умова (29) не є найбільш оптимальною із можливих. Більш того, можна стверджувати, що для $p = q > -\infty$ або $p = q > 1$ умови теореми можуть спрощуватися. Проте це не є метою роботи, тому що побудовані у подальшому матриці не мають зовнішніх відмінностей залежно від таких варіантів.

Висловлюємо щиру подяку професору Деркачу В. О. за ретельний перегляд рукопису та вкрай важливі зауваження, які покращили роботу.

Література

1. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов*, Физматгиз, Москва (1961).
2. Ю. М. Березанский, *Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наук. думка, Киев (1965).
3. Ю. М. Березанский, *Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных*, Наук. думка, Киев (1978).

4. Ю. М. Березанский, Ю. Г. Кондратьев, *Спектральные методы в бесконечномерном анализе*, Наук. думка, Киев (1988).
5. Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель, *Функциональный анализ: Курс лекций*, Вища шк., Київ (1990).
6. Yu. M. Berezansky, *Some generalizations of the classical moment problem*, Integr. Equat. and Oper. Theory, **44**, 255 – 289 (2002).
7. Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin, *The complex moment problem in the exponential form*, Methods Funct. Anal. and Topology, **10**, № 4, 1 – 10 (2004).
8. Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin, *The direct and inverce spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices*, Methods Funct. Anal. and Topology, **11**, № 4, 327 – 345 (2005).
9. Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin, *On the complex moment problem*, Math. Nachr., № 1-2, 60 – 73 (2007).
10. Ю. М. Березанський, М. Є. Дудкін, *Якобієві матриці і проблема моментів*, Праці Ін-ту математики НАН України, **105** (2019).
11. C. Berg, J. P. R. Christensen, C. U. Jessel, *A remark on the multidimension moment problem*, Math. Ann., **243**, 163 – 169 (1979).
12. T. M. Bisgaard, *On note on factoring of positive definite functions on semigroups*, Math. Nachr., **236**, 31 – 46 (2002).
13. M. J. Cantero, L. Moral, L. Velázquez, *Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle*, Linear Algebra and Appl., **362**, 29 – 56 (2003).
14. T. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris (1926).
15. A. Devinatz, *Integral representations of positive definite functions, II*, Trans. Amer. Math. Soc., **77**, 455 – 480 (1954).
16. A. Devinatz, *Two parameter moment problems*, Duke Math. J., **24**, 481 – 498 (1957).
17. M. E. Dudkin, *The exact inner structure of the block Jacobi type unitary matrices connected with the corresponding direct and inverse spectral problems matrices*, Methods Funct. Anal. and Topology, **14**, № 2, 168 – 176 (2008).
18. M. E. Dudkin, *The complex moment problem in the exponential form with direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type correspondence matrices*, Methods Funct. Anal. and Topology, **18**, № 2, 111 – 139 (2012).
19. M. E. Dudkin, *The inner structure of the Jacobi – Laurent matrix related to the strong Hamburger moment problem*, Methods Funct. Anal. and Topology, **19**, № 2, 97 – 107 (2013).
20. M. E. Dudkin, V. I. Kozak, *Direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional moment problem*, Methods Funct. Anal. and Topology, **20**, № 3, 219 – 251 (2014).
21. М. Є. Дудкін, В. І. Козак, *Пряма спектральна задача з блочними матрицями типу Якобі, що відповідають сильній двовимірній проблемі моментів*, Наук. зап. НаУКМА, Фіз.-мат. науки, **178**, 16 – 22 (2016).
22. W. B. Jones, W. J. Thron, O. Njåstad, *Orthogonal Laurent polynomials and strong Hamburger moment problem*, J. Math. Anal. and Appl., **98**, № 2, 528 – 554 (1984).
23. W. B. Jones, O. Njåstad, *Orthogonal Laurent polynomials and strong moment theory: a survey*, Continued Fractions and Geometric Function Theory (CONFUN) (Trondheim, 1997), J. Comput. and Appl. Math., **105**, № 1-2, 51 – 91 (1999).
24. Р. Б. Зархина, *О двумерной проблеме моментов*, Докл. АН СССР, **124**, № 4, 743 – 746 (1959).
25. И. С. Кац, А. А. Нудельман, *Сильная проблема моментов Стилтьеса*, Алгебра и анализ, **8**, № 6, 26 – 56 (1996).
26. В. І. Козак, *Побудова блочних матриць типу Якобі, відповідних сильній двовимірній дійсній проблемі моментів*, Наук. зап. НаУКМА, Фіз.-мат. науки, **165**, 19 – 26 (2015).
27. А. Г. Костюченко, Б. С. Митягин, *Многомерная проблема моментов*, Докл. АН СССР, **131**, № 6, 1249 – 1252 (1960).
28. А. Г. Костюченко, Б. С. Митягин, *Положительно-определенные функционалы на ядерных пространствах*, Тр. Моск. мат. о-ва, **9**, 283 – 316 (1960).
29. М. Г. Крейн, *Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения*, Докл. АН СССР, **53**, № 1, 3 – 6 (1946).
30. М. Г. Крейн, *Про ермітові оператори з напрямними функціоналами*, Зб. наук. пр. Ін-ту математики АН УРСР, № 10, 83 – 106 (1948).
31. S. Mandelbrojt, *Séries Adhérentes. Régularisation des Suites, Applications*, Gauthier-Villars, Paris (1952).
32. E. Nelson, *Analytic vectors*, Ann. Math., **70**, 572 – 614 (1959).
33. A. E. Nussbaum, *Quasi-analytic vectors*, Ark. Math., **6**, № 10, 179 – 191 (1965).
34. A. E. Nussbaum, *A note on quasi-analytic vectors*, Stud. Math., **33**, 305 – 309 (1969).

35. L. C. Petersen, *On the relation between the multidimensional moment problem and the one-dimensional moment problem*, Math. Scand., **51**, 361 – 366 (1982).
36. K. K. Simonov, *Strong matrix moment problem of Hamburger*, Methods Funct. Anal. and Topology, № 2, 183 – 196 (2006).
37. К. К. Симонов, *Ортогональные матричные полиномы Лорана*, Мат. заметки, **79**, № 2, 316 – 320 (2006).
38. B. Fuglede, *The multidimensional moment problem*, Expo. Math., № 1, 47 – 65 (1983).
39. E. K. Haviland, *On the moment problem for distribution functions in more than one dimension*, Amer. J. Math., **57**, 562 – 572 (1995).
40. E. K. Haviland, *On the moment problem for distribution functions in more than one dimension II*, Amer. J. Math., **58**, 164 – 168 (1996).
41. Y. Xu, *On ortogonal polinomials in several variables*, Amer. Math. Soc., **14**, 247 – 270 (1997).
42. Y. Xu, *Block Jacobi matrices and zeros of multivariate ortogonal polynomials*, Amer. Math. Soc., **342**, № 2, 855 – 866 (1994).
43. Г. И. Ескин, *Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов*, Докл. АН СССР, **133**, № 3, 540 – 543 (1960).

Одержано 05.04.20