DOI: 10.37863/umzh.v73i11.6073

УДК 517.957

А. Б. Хасанов (Самарканд. держ. ун-т, Узбекистан),
Т. Ж. Алланазарова (Каракалпак. держ. ун-т ім. Бердаха, Нукус, Узбекистан)

ПРО МОДИФІКОВАНЕ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА З НАВАНТАЖЕНИМ ЧЛЕНОМ

In this paper, the method of the inverse spectral problem is applied to finding a solution to the Cauchy problem for the modified Korteweg – de Vries equation (mKdV) in the class of periodic infinite-gap functions. A simple derivation of the Dubrovin system of differential equations is proposed. The solvability of the Cauchy problem for an infinite system of Dubrovin differential equations in the class of five times continuously differentiable periodic infinite-gap functions is proved. It is shown that the sum of a uniformly converging functional series constructed from the solutions of the infinite system of Dubrovin equations and the formulas for the first trace do indeed satisfy the mKdV equation. Moreover, it was proved that:

1) if the initial function is a real π-periodic analytic function, then the solution of the Cauchy problem for the mKdV equation with a loaded term is also a real analytic function with respect to the variable x;

2) if the number $\dfrac{\pi}{2}$ is the period (antiperiod) of the original function, then $\dfrac{\pi}{2}$ is also the period (antiperiod) in the variable x of the solution to the Cauchy problem for the mKdV equation with a loaded term.

У цій роботі метод оберненої спектральної задачі застосовано до розв'язання задачі Коші для модифікованого рівняння Кортевега – де Фріза (мКдФ) у класі періодичних нескінченнозонних функцій. Запропоновано простий вивід системи диференціальних рівнянь Дубровіна. Доведено розв'язність задачі Коші для нескінченної системи диференціальних рівнянь Дубровіна у класі п'ятикратно неперервно диференційовних періодичних нескінченнозонних функцій. Показано, що сума рівномірно збіжного функціонального ряду, побудованого з розв'язків нескінченної системи рівнянь Дубровіна, і формули для першого сліду задовольняють рівняння мКдФ. І навіть більше, було доведено, що:

1) якщо початкова функція є дійсною π-періодичною аналітичною функцією, то розв'язок задачі Коші для рівняння мКдФ з навантаженим членом також є дійсною аналітичною функцією за змінною x;

2) якщо число $\dfrac{\pi}{2}$ є періодом (антиперіодом) вихідної функції, то $\dfrac{\pi}{2}$ також є періодом (антиперіодом) за змінною x розв'язку задачі Коші для рівняння мКдФ з навантаженим членом.

1. Вступ. Обернені спектральні задачі відіграють значну роль при інтегруванні деяких важливих еволюційних рівнянь математичної фізики. Значний прорив було зроблено в 1967 р. з появою статті [1], де показано, що рівняння Кортевега – де Фріза (КдФ)

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx}, \qquad q(x,0) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

можна подати як умову сумісності двох лінійних диференціальних рівнянь, одне з яких виявилося рівнянням Штурма – Ліувілля

$$H\psi \equiv -\psi''(x,k,t) + q(x,t)\psi(x,k,t) = k^2\psi(x,k,t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Було зазначено, що якщо потенціал у цьому рівнянні змінюється за часом згідно з КдФ, то ψ задовольняє ще одне лінійне рівняння, а саме

$$\dot{\psi}_t = -4\psi'''_{xxx} + 6q\psi'_x + 3q_x\psi.$$

Використовуючи цю обставину, в [1] запропоновано процедуру побудови точних розв'язків рівняння КдФ зведенням її до оберненої задачі теорії розсіяння. Обернену задачу теорії розсіяння для оператора Штурма – Ліувілля на всій прямій вивчали в роботах [2 – 4]. У статті [5] показано універсальність методу оберненої задачі розсіяння (МОЗР) й узагальнено рівняння КДФ, вводячи поняття вищого рівняння КДФ. У цьому напрямку наступний важливий результат отримано у статті [6], в якій авторам вдалося інтегрувати нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ):

$$iu_t \pm 2u|u|^2 + u_{xx} = 0.$$

Незабаром у статті [7] на основі ідей роботи [6] було запропоновано метод розв'язання модифікованого рівняння КдФ (мКдФ):

$$u_t \pm 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0.$$

У статтях [8, 9] показано, що МОЗР також можна застосувати і до розв'язання рівняння синус-Гордона

$$u_{xt} = \sin u.$$

Застосування МОЗР до рівнянь НРШ, мКдФ і синус-Гордона спирається на задачу розсіяння для оператора Дірака на всій осі:

$$L = i \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & -q(x) \\ r(x) & -\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Обернена задача розсіяння для оператора Дірака на всій осі вивчалась у багатьох роботах (див., наприклад, [6, 10 – 12]). Відомо, що оператор L не є самоспряженим, у випадку „швидкого спадання" має скінченне число кратних комплексних власних значень і може мати спектральні особливості, які лежать у неперервному спектрі. Дані розсіяння несамоспряженого оператора Дірака, крім характеристик неперервного спектра, містять дискретний спектр і спектральні особливості. У роботах [6 – 9, 13 – 16] у випадку, коли всі власні значення відповідного оператора Дірака L прості, а спектральних особливостей немає, було зінтегровано такі нелінійні еволюційні рівняння, як НРШ, мКдФ і рівняння синус-Гордона. У зв'язку з цим актуальним є пошук розв'язку задачі Коші для нелінійних еволюційних рівнянь без джерела і з самоузгодженим джерелом, відповідним до кратних власних значень оператора Дірака. Цим задачам присвячено роботи [17 – 21].

Відомо, що знаходження явної формули для розв'язку нелінійних еволюційних рівнянь КдФ, мКдФ, НРШ і синус-Гордона у класі періодичних функцій істотно залежить від кількості нетривіальних лакун у спектрі періодичного оператора Штурма – Ліувілля і Дірака.

За допомогою методу оберненої задачі для оператора Штурма – Ліувілля з періодичним потенціалом у випадку, коли в спектрі є тільки скінченне число нетривіальних лакун, у роботах [22, 23] доведено повну інтегровність рівняння КдФ у класі скінченнозонних періодичних і квазіперіодичних функцій. У основній частині цих робіт розв'язання оберненої задачі для випадку скінченнозонних потенціалів було зведено до проблеми обернення Якобі абелевих інтегралів на дволистій компактній рімановій поверхні зі скінченним числом дійсних точок розгалуження. Крім того, для скінченнозонних потенціалів (тобто для розв'язку рівняння КдФ) було виведено явну формулу за допомогою тета-функції Рімана. У роботах [25, 26] за допомогою МОЗР для оператора Дірака встановлено повну інтегровність НРШ і рівняння мКдФ у класі скінченнозонних функцій. Більш детально про цю теорію викладено в монографіях [3, 4, 27 – 29].

Відомо (див. [30]), що якщо $q(x) = 2a\cos 2x,\ a \neq 0$, то всі нетривіальні лакуни в спектрі оператора $Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y,\ x \in \mathbb{R}$, відкриті, іншими словами, $q(x)$ — скінченнозонний періодичний потенціал. Аналогічні приклади наведено в статті [31] для періодичного оператора Дірака. У зв'язку з цим ми вивчаємо задачу Коші для нелінійного рівняння мКдФ із додатковим членом у класі періодичних нескінченнозонних функцій.

У цьому випадку розв'язання оберненої задачі за спектральними даними для періодичного оператора Дірака, коли нескінченне число нетривіальних лакун відкриті, можна звести до проблеми обернення абелевих інтегралів на дволистій некомпактній рімановій поверхні з нескінченним числом дійсних точок розгалуження. Для такої задачі нам не вдалося знайти аналогів формули Ітса – Матвєєва. Проте до цієї задачі можна застосувати метод статті [32]. При цьому розв'язок задачі Коші для нелінійного рівняння мКдФ одержуємо у вигляді рівномірно збіжного функціонального ряду. Слід зауважити, що розв'язки в класі періодичних функцій для нелінійних еволюційних рівнянь із джерелом, а також із додатковим членом вивчалися в роботах [33 – 41] у різних постановках.

У цій роботі розглядається рівняння мКдФ з навантаженим членом вигляду

$$u_t = a\left(t, u\left(x_0, t\right)\right)\left[6u^2u_x - u_{xxx}\right], \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \qquad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^5(\mathbb{R}), \tag{2}$$

у класі дійсних нескінченнозонних π-періодичних по x функцій:

$$u(x+\pi, t) = u(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \tag{3}$$

Тут дійсна функція $a(t,y)$ є заданою, неперервною по t і диференційовною по y, а $x_0 \in \mathbb{R}$ — задане число.

Мета цієї роботи — описати процедуру побудови розв'язку задачі (1) – (3) у рамках оберненої спектральної задачі для періодичного оператора Дірака:

$$L(t)y = By' + \Omega(x,t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x,t) \\ u(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

***Зауваження* 1.** Нехай $q(x,t)$ — розв'язок задачі (1) – (3) у випадку звичайного рівняння мКдФ, тобто при $a(t,y) \equiv 1$. Тоді розв'язок $u(x,t)$ задачі (1) – (3) подамо у вигляді

$$u(x,t) = q(x, b(t)), \tag{5}$$

де функція $b(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$b(t) = \int_0^t a(\tau, q(x_0, b(\tau))d\tau. \tag{6}$$

Доведення безпосередньо випливає з того, що з (5), (6) маємо

$$\frac{db(t)}{dt} = a(t, u(x_0, t)).$$

Диференціюючи по t рівність (5), приходимо до рівняння (1). Неважко бачити, що спектр оператора (4) з потенціалом (5) збігається зі спектром оператора (4) з потенціалом $q(x,0) = u(x,0) = q_0(x)$.

Таким чином, розв'язання задачі Коші (1)–(3) у класі періодичних нескінченнозонних потенціалів зводиться до розв'язання задачі Коші для звичайного рівняння мКдФ (тобто при $a(t,y) \equiv 1$) у класі періодичних нескінченнозонних функцій.

2. Необхідні відомості про пряму та обернену спектральні задачі. У цьому пункті для повноти викладу ми наведемо деякі основні відомості, що стосуються оберненої спектральної задачі для оператора Дірака з періодичними коефіцієнтами [42–45]. Розглянемо систему рівнянь Дірака на всій прямій

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ — дійсні π-періодичні функції з класу $C^1(\mathbb{R})$, а λ — комплексний параметр.

Позначимо через $c(x,\lambda) = (c_1(x,\lambda), c_2(x,\lambda))^T$ і $s(x,\lambda) = (s_1(x,\lambda), s_2(x,\lambda))^T$ розв'язки рівняння (7) з початковими умовами $c(0,\lambda) = (1,0)^T$ і $s(0,\lambda) = (0,1)^T$. Вектор-функції $c(x,\lambda)$ і $s(x,\lambda)$ є цілими функціями щодо λ при фіксованих x, складають фундаментальну систему розв'язків рівняння (7) і задовольняють тотожність

$$W\{c(x,\lambda), s(x,\lambda)\} \equiv c_1(x,\lambda)s_2(x,\lambda) - c_2(x,\lambda)s_1(x,\lambda) = 1.$$

Крім того, розв'язки $c(x,\lambda)$ і $s(x,\lambda)$ при великих $|\lambda|$ задовольняють такі асимптотичні формули:

$$\begin{aligned} c(x,\lambda) &= \begin{pmatrix} \cos\lambda x \\ \sin\lambda x \end{pmatrix} + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda| x}}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \to \infty, \\ s(x,\lambda) &= \begin{pmatrix} -\sin\lambda x \\ \cos\lambda x \end{pmatrix} + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda| x}}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \to \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

Означення 1. *Функція $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\lambda) + s_2(\pi,\lambda)$ називається функцією Ляпунова для оператора Дірака* (7).

Із асимптотики (8) при дійсних λ отримаємо таку асимптотичну формулу для функції Ляпунова:

$$\Delta(\lambda) = 2\cos\lambda\pi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \to \infty.$$

Вектор-функція

$$\psi_\pm(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_{1\pm}(x,\lambda) \\ \psi_{2\pm}(x,\lambda) \end{pmatrix} = c(x,\lambda) + m^\pm(\lambda)s(x,\lambda)$$

називається розв'язком Флоке рівняння (7). Функція Вейля – Тітчмарша визначається формулами

$$m^{\pm}(\lambda) = \frac{s_2(\pi,\lambda) - c_1(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi,\lambda)}.$$

Спектр оператора L повністю неперервний і складається з множини

$$\sigma(L) \equiv E = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \le 2\} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n=-\infty}^{n=\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right),$$

при цьому інтервали $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in \mathbb{Z}$, називаються лакунами, де λ_{4k-1}, λ_{4k} — власні значення періодичної задачі $(y(0) = y(\pi))$, а λ_{4k+1}, λ_{4k+2} — власні значення антиперіодичної задачі $(y(0) = -y(\pi))$ для рівняння (7).

Корені рівняння $s_1(\pi,\lambda) = 0$ позначимо через ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$. Вони збігаються із власними значеннями задачі Діріхле для системи рівнянь (7) із граничними умовами $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$, при цьому $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Означення 2. *Числа ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, разом зі знаками*

$$\sigma_n = \operatorname{sign}\left\{ s_2(\pi,\xi_n) - c_1(\pi,\xi_n) \right\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

називаються спектральними параметрами оператора L.

***Зауваження* 2.** Якщо $\xi_n = \lambda_{2n-1}$ або $\xi_n = \lambda_{2n}$, то $s_2(\pi,\xi_n) - c_1(\pi,\xi_n) = 0$. У цьому випадку для визначеності покладемо $\sigma_n = 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Означення 3. *Спектральні параметри ξ_n, σ_n, $n \in \mathbb{Z}$, і межі спектра λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, називаються спектральними даними оператора L.*

Задача знаходження спектральних даних оператора L становить пряму задачу, а відновлення коефіцієнтів $p(x)$ і $q(x)$ за спектральними даними — обернену. Коефіцієнти $p(x)$ і $q(x)$ оператора L визначаються однозначно за спектральними даними $\{\lambda_n, \xi_n, \sigma_n = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$ (див. [43, 45]).

Якщо в системі диференціальних рівнянь (7) замість $p(x)$, $q(x)$ розглядати $p(x+\tau)$, $q(x+\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, то спектр одержуваного оператора

$$L(\tau)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x+\tau) & q(x+\tau) \\ q(x+\tau) & -p(x+\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

не залежатиме від параметра τ, тобто $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$, а спектральні параметри залежатимуть від параметра τ, $\xi_n = \xi_n(\tau), \sigma_n = \sigma_n(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$, і будуть періодичними функціями $\xi_n(\tau + \pi) = \xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau + \pi) = \sigma_n(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$. Ці спектральні параметри задовольняють аналог системи рівнянь Дубровіна

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = (-1)^n \sigma_n(\tau) h_n(\xi) \left\{ 2\xi_n(\tau) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau) \right) \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

і початкові умови

$$\xi_n(\tau)|_{\tau=0} = \xi_n(0), \quad \sigma_n(\tau)|_{\tau=0} = \sigma_n(0), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

де

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau))} \sqrt{\prod_{k=-\infty, k\neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau))}{(\xi_k(\tau) - \xi_n(\tau))^2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$ змінюється на протилежний при кожному зіткненні значення $\xi_n(\tau)$ з межами своєї лакуни $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

З метою подальшого дослідження системи рівнянь Дубровіна виконаємо заміну змінних

$$\xi_n(\tau) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді вона набере вигляду

$$\frac{dx_n(\tau)}{d\tau} = H_n(\ldots, x_{-1}(\tau), x_0(\tau), x_1(\tau), \ldots), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

$$x_n(0) = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_n(0) - \lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

де

$$H_n(x(\tau)) = \frac{1}{2}(-1)^{n-1} \sigma_n(0) h_n(\ldots, \xi_{-1}(\tau), \xi_0(\tau), \xi_1(\tau), \ldots), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Введемо банаховий простір

$$\mathbf{K} = \left\{ x = (\ldots, x_{-1}(\tau), x_0(\tau), x_1(\tau), \ldots) : \|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1})|x_n| < \infty \right\}.$$

Запишемо систему (12), (13) у вигляді одного рівняння в банаховому просторі $\mathbf{K}$:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = H(x(\tau)), \quad x(\tau)|_{\tau=0} = x^0.$$

У роботі [43] показано, що при всіх $x, y \in \mathbf{K}$ виконується нерівність

$$\left\| H(x(\tau)) - H(y(\tau)) \right\| \leq C \left\| x(\tau) - y(\tau) \right\|,$$

де

$$C = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|(\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) < \infty. \tag{14}$$

Ряд (14) збігається, якщо періодичний потенціал задовольняє умови $p(x+\pi) = p(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $q(x+\pi) = q(x) \in C^2(\mathbb{R})$. Тому нескінченна система рівнянь (10), (11) має єдиний розв'язок при будь-яких початкових даних. Отже, система рівнянь Дубровіна, а також формули слідів

$$\begin{gathered} p(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau) \right), \quad q(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sigma_n(\tau) h_n(\xi), \\ q^2(\tau) + q'(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau) \right) \end{gathered} \tag{15}$$

приводять до методу розв'язання оберненої задачі. Тут $\xi_k(\tau),\ k \in \mathbb{Z}$, — власні значення задачі Діріхле $(y_1(0) = 0,\ y_1(\pi) = 0)$ для системи Дірака (9).

У роботі [43] показано, що нескінченна система рівнянь (10), (11) має єдиний розв'язок при будь-яких початкових даних і розв'язок існує для всіх $\tau \in \mathbb{R}$. Крім того, в цій же роботі за допомогою системи рівнянь Дубровіна (10) і формул слідів (15) вивчається зв'язок довжини лакун із аналітичністю коефіцієнтів $p(x)$ і $q(x)$ системи рівнянь Дірака.

Теорема 1. *Якщо $p(x),\ q(x)$ — π-періодичні дійсні функції з класу $C^2(\mathbb{R})$ і довжини лакун $\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}$ оператора Дірака* (7) *експоненціально спадають, тобто якщо існують сталі числа $a > 0,\ b > 0$, для яких $\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1} < ae^{-b|n|}$ при будь-яких цілих n, то $p(x)$ і $q(x)$ є дійсними аналітичними функціями на всій прямій.*

Теорема 2. *Якщо $p(x)$ і $q(x)$ — дійсні аналітичні π-періодичні функції, то довжини лакун $\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}$ оператора Дірака* (7) *спадають експоненціально.*

Слід зазначити, що ці теореми для оператора Хілла вперше довів Трубовіц [47].

У роботах [44, 49] для оператора Дірака було доведено такий аналог оберненої теореми Борга [48].

Теорема 3. *Для того щоб число $\dfrac{\pi}{2}$ було періодом* (*антиперіодом*) *коефіцієнтів $p(x)$ і $q(x)$ системи рівнянь* (7), *необхідно і достатньо двократності всіх власних значень антиперіодичної* (*періодичної*) *задачі.*

Наведемо деякі найпростіші властивості розв'язку системи Дірака у випадку $p(x) \equiv 0$.

Теорема 4. *Якщо число λ є власним значенням граничної задачі Діріхле*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in (0, \pi), \tag{16}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0, \tag{17}$$

де $q(x) \in C\,[0, \pi]$, і йому відповідає власна вектор-функція $(y_1(x), y_2(x))^T$, то $(-\lambda)$ теж є власним значенням цієї задачі, і йому відповідає власна вектор-функція $(y_1(x), -y_2(x))^T$.

***Зауваження* 3.** Ця теорема справедлива й при інших граничних умовах, наприклад при граничних умовах Неймана $y_2(0) = 0,\ y_2(\pi) = 0$, при періодичних і антиперіодичних граничних умовах $y(0) = \pm y(\pi)$.

Легко помітити, що з теореми єдиності розв'язку задачі Коші випливає

$$(c_1\,(x, -\lambda), -c_2\,(x, -\lambda))^T = (c_1(x, \lambda), c_2(x, \lambda))^T,$$

$$(-s_1\,(x, -\lambda), s_2\,(x, -\lambda))^T = (s_1(x, \lambda), s_2(x, \lambda))^T.$$

Звідси, зокрема, маємо

$$\Delta\,(-\lambda) = c_1\,(\pi, -\lambda) + s_2\,(\pi, -\lambda) = c_1(\pi, \lambda) + s_2(\pi, \lambda) = \Delta(\lambda).$$

***Зауваження* 4.** Позначимо через $\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}$, всі власні значення граничної задачі Діріхле (16), (17). Оскільки вони розташовані симетрично відносно нуля, ми можемо нумерувати їх таким чином: $\xi_{-n} = -\xi_n,\ n > 0$. Крім того, $\xi = 0$ завжди є власним значенням і йому відповідає власна вектор-функція

$$\left(0, \exp\left\{-\int\limits_0^x q(t)dt\right\}\right)^T,$$

а також виконується рівність

$$\sigma_{-n} = \operatorname{sign}\left\{s_2\left(\pi, \xi_{-n}\right) - c_1\left(\pi, \xi_{-n}\right)\right\} = \operatorname{sign}\left\{s_2\left(\pi, -\xi_n\right) - c_1\left(\pi, -\xi_n\right)\right\} =$$

$$= \operatorname{sign}\left\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\right\} = \sigma_n.$$

***Зауваження* 5.** Розглянемо рівняння (16) з граничною умовою Неймана $y_2(0) = 0,\ y_2(\pi) = 0$. Позначимо через $\eta_n,\ n \in \mathbb{Z}$, всі власні значення цієї задачі. Оскільки вони розташовані симетрично відносно нуля, ми можемо їх нумерувати таким чином: $\eta_{-n} = -\eta_n,\ n > 0$. Крім того, $\eta_0 = 0$ завжди є власним значенням і йому відповідає власна вектор-функція

$$\left(\exp\left\{-\int\limits_0^x q(t)dt\right\},\ 0\right)^T.$$

Теорема 5. *Якщо в рівнянні* (16) *коефіцієнт* $q(x) \in C^1[0, \pi]$ *є дійсною неперервно диференційовною функцією, то компоненти розв'язку* $(y_1(x), y_2(x))^T$ *задовольняють рівняння*

$$-y_1'' + \left[q^2(x) + q'(x)\right] y_1 = \lambda^2 y_1, \quad -y_2'' + \left[q^2(x) - q'(x)\right] y_2 = \lambda^2 y_2.$$

***Наслідок* 1.** *Якщо* $(y_{n,1}(x), y_{n,2}(x))^T$ *є власною вектор-функцією граничної задачі* (16), (17), *що відповідає власному значенню* $\xi_n,\ \xi_n \neq 0$, *то* $y_{n,1}(x)$ *є власною функцією крайової задачі*

$$-y_{n,1}'' + \left[q^2(x) + q'(x)\right] y_{n,1} = \xi_n^2 y_{n,1}, \quad y_{n,1}(0) = 0, \quad y_{n,1}(\pi) = 0.$$

***Наслідок* 2.** *Якщо* $(y_{n,1}(x), y_{n,2}(x))^T$ *є власною вектор-функцією граничної задачі Неймана для рівняння* (16), *що відповідає власному значенню* $\eta_n,\ \eta_n \neq 0$, *то* $y_{n,2}(x)$ *є власною функцією крайової задачі*

$$-y_{n,2}'' + \left[q^2(x) - q'(x)\right] y_{n,2} = \eta_n^2 y_{n,2}, \quad y_{n,2}(0) = 0, \quad y_{n,2}(\pi) = 0.$$

***Наслідок* 3.** *Якщо* $\int_0^\pi q(x)dx = 0$, *то* $\lambda = 0$ *є двократним власним значенням періодичної граничної задачі* $(y(0) = y(\pi))$ *для рівняння* (16), *і навпаки, якщо число* $\lambda = 0$ *є двократним власним значенням періодичної граничної задачі, то* $\int_0^\pi q(x)dx = 0$.

***Зауваження* 6.** Число $\lambda = 0$ не є власним значенням антиперіодичної граничної задачі $(y(0) = -y(\pi))$ для рівняння (16).

***Наслідок* 4.** *Якщо* $(y_{n,1}(x), y_{n,2}(x))^T$ *є власною вектор-функцією періодичної задачі для рівняння* (16), *що відповідає власному значенню* $\nu_n \neq 0$, *то* $y_{n,1}(x)$ *і* $y_{n,2}(x)$ *є власними функціями крайових задач*

$$-y_{n,1}'' + \left[q^2(x) + q'(x)\right] y_{n,1} = \nu_n^2 y_{n,1}, \qquad y_{n,1}(0) = y_{n,1}(\pi), \qquad y_{n,1}'(0) = y_{n,1}'(\pi),$$

$$-y_{n,2}'' + \left[q^2(x) - q'(x)\right] y_{n,2} = \nu_n^2 y_{n,2}, \qquad y_{n,2}(0) = y_{n,2}(\pi), \qquad y_{n,2}'(0) = y_{n,2}'(\pi).$$

Для антиперіодичної крайової задачі для рівняння (16) також справедливим є такий наслідок.

3. Еволюція спектральних параметрів. Розглянемо задачу Коші для рівняння мКдФ

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{18}$$

з початковою умовою

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^5(\mathbb{R}) \tag{19}$$

у класі дійсних нескінченнозонних π-періодичних по x функцій:

$$q(x+\pi,t) = q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \tag{20}$$

Основним результатом цієї роботи є така теорема.

Теорема 6. *Нехай $q(x,t)$ — розв'язок задачі* (18) – (20). *Тоді межі спектра $\lambda_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора Дірака*

$$L(\tau,t)y \equiv By' + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{21}$$

де

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

не залежать від параметрів τ і t, тобто $\lambda_n(\tau,t) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$, а спектральні параметри $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}$, задовольняють аналог системи рівнянь Дубровіна

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \left\{ -2\xi_n \left[q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t) \right] - 4\xi_n^3 \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Тут знак $\sigma_n(\tau,t)$ змінюється на протилежний при кожному зіткненні точки $\xi_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}$, з межами своєї лакуни $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Крім того, виконуються початкові умови

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{23}$$

де $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$, — спектральні параметри оператора Дірака $L(\tau,0)$ з коефіцієнтом $q_0(x+\tau)$.

4. Доведення. ***Доведення теореми* 6.** Позначимо через $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}$, власні значення задачі Діріхле

$$y_1(0,\tau,t) = 0, \quad y_1(\pi,\tau,t) = 0 \tag{24}$$

для рівняння (21). Нехай $y_n(x,\tau,t) = \big(y_{n,1}(x,\tau,t), y_{n,2}(x,\tau,t)\big)^T$, $n \in \mathbb{Z}$, — ортонормовані власні вектор-функції задачі Діріхле (21), (24), що відповідають власним значенням $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Диференціюючи по t рівняння

$$\xi_n(\tau,t) = \big(L(\tau,t)y_n, y_n\big), \quad n \in \mathbb{Z},$$

і використовуючи симетричність оператора $L(\tau,t)$, маємо

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \left(\dot{\Omega}(x+\tau,t) y_n, y_n \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{25}$$

Використовуючи явний вигляд скалярного добутку

$$(y,z) = \int\limits_0^\pi \left[y_1(x)\overline{z_1(x)} + y_2(x)\overline{z_2(x)} \right] dx, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix},$$

рівність (25) записуємо у вигляді

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2 \int\limits_0^\pi y_{n,1}(x,\tau,t) y_{n,2}(x,\tau,t) q_t(x+\tau,t) dx. \tag{26}$$

Підставляючи рівняння (18) у (26), знаходимо

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = J_1 + J_2, \tag{27}$$

де

$$J_1 = 4 \int\limits_0^\pi y_{n,1} y_{n,2} d\left(q^3(x+\tau,t) \right), \qquad J_2 = -2 \int\limits_0^\pi y_{n,1} y_{n,2} d\left(q_{xx}(x+\tau,t) \right).$$

З рівняння (21) випливають рівності

$$y'_{n,1} + \xi_n y_{n,2} = q(x+\tau,t) y_{n,1},$$

$$-y'_{n,2} + \xi_n y_{n,1} = q(x+\tau,t) y_{n,2}.$$

Використовуючи ці тотожності та інтегруючи частинами інтеграл J_1, маємо

$$J_1 = -2\xi_n q^2(\tau,t) \left[y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t) \right] + 2\xi_n \int\limits_0^\pi \left[y_{n,1}^2 + y_{n,2}^2 \right] d\left(q^2(x+\tau,t) \right). \tag{28}$$

Тепер обчислюємо інтеграл J_2:

$$J_2 = \left[-2\xi_n q_\tau(\tau,t) - 4\xi_n^3 \right] \left[y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t) \right] - 2\xi_n \int\limits_0^\pi \left[y_{n,1}^2 + y_{n,2}^2 \right] d\left(q^2(x+\tau,t) \right). \tag{29}$$

З (27)–(29) отримуємо

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \left[y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t) \right] \left[-2\xi_n \left(q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t) \right) - 4\xi_n^3 \right]. \tag{30}$$

Позначимо через $c(x,\lambda,\tau,t) = \left(c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t) \right)^T$ і $s(x,\lambda,\tau,t) = \left(s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t) \right)^T$ розв'язки рівняння (21) з початковими умовами $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ і

$s(0,\lambda,\tau,t)=(0,1)^T$. Функція $\Delta(\lambda)=c_1(\pi,\lambda,\tau,t)+s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ називається функцією Ляпунова для рівняння (21).

Із рівності

$$\int\limits_0^\pi\left[s_1^2\left(x,\lambda,\tau,t\right)+s_2^2\left(x,\lambda,\tau,t\right)\right]dx=s_1\left(\pi,\lambda,\tau,t\right)\frac{\partial s_2\left(\pi,\lambda,\tau,t\right)}{\partial\lambda}-s_2\left(\pi,\lambda,\tau,t\right)\frac{\partial s_1\left(\pi,\lambda,\tau,t\right)}{\partial\lambda}$$

отримуємо зображення для норми власної вектор-функції $s(x,\xi_n,\tau,t)$, що відповідає власному значенню $\xi_n=\xi_n(\tau,t),\ n\in\mathbb{Z}$, задачі Діріхле (21), (24):

$$c_n^2(\tau,t)=\int\limits_0^\pi\left[s_1^2\left(x,\xi_n,\tau,t\right)+s_2^2\left(x,\xi_n,\tau,t\right)\right]dx=-s_2\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)\frac{\partial s_1\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)}{\partial\lambda}. \qquad (31)$$

Використовуючи рівності

$$y_n(x,\tau,t)=\frac{1}{c_n(\tau,t)}s\left(x,\xi_n,\tau,t\right)$$

і (31), маємо

$$y_{n,2}^2(\pi,\tau,t)-y_{n,2}^2(0,\tau,t)=\frac{s_2^2\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)-1}{c_n^2(\tau,t)}=-\frac{s_2\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)-s_2^{-1}\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)}{\partial s_1\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)/\partial\lambda}. \qquad (32)$$

Підставляючи значення $x=\pi$ і $\lambda=\xi_n(\tau,t)$ у тотожність

$$c_1\left(x,\lambda,\tau,t\right)s_2\left(x,\lambda,\tau,t\right)-c_2\left(x,\lambda,\tau,t\right)s_1\left(x,\lambda,\tau,t\right)=1,$$

знаходимо

$$c_1\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)=\frac{1}{s_2\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)}. \qquad (33)$$

Враховуючи рівність (33) і тотожність

$$\left[c_1\left(\pi,\lambda,\tau,t\right)-s_2\left(\pi,\lambda,\tau,t\right)\right]^2=\left(\Delta^2(\lambda)-4\right)-4c_2\left(\pi,\lambda,\tau,t\right)s_1\left(\pi,\lambda,\tau,t\right),$$

одержуємо

$$s_2\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)-\frac{1}{s_2\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)}=\sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2\left(\xi_n\right)-4},$$

де

$$\sigma_n(\tau,t)=\operatorname{sign}\left\{s_2\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)-c_1\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)\right\}.$$

Тому рівність (32) набере вигляду

$$y_{n,2}^2(\pi,\tau,t)-y_{n,2}^2(0,\tau,t)=-\frac{\sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2\left(\xi_n\right)-4}}{\partial s_1\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)/\partial\lambda}. \qquad (34)$$

Використовуючи розклади

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_{2k-1})(\lambda - \lambda_{2k})}{a_k^2},$$

$$s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = \pi \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k(\tau, t) - \lambda}{a_k},$$

де $a_0 = 1$ і $a_k = k$ при $k \neq 0$, рівність (34) можемо записати у вигляді

$$y_{n,2}^2(\pi, \tau, t) - y_{n,2}^2(0, \tau, t) = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi). \tag{35}$$

Підставляючи вираз (35) у тотожність (30), отримуємо систему (22).

Якщо замінити граничні умови Діріхле періодичними $(y(0, \tau, t) = y(\pi, \tau, t))$ або антиперіодичними $(y(0, \tau, t) = -y(\pi, \tau, t))$ граничними умовами, то замість рівняння (30) будемо мати

$$\frac{\partial \lambda_n(\tau, t)}{\partial t} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, $\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n(\tau, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тепер у рівнянні (21) покладемо $t = 0$. Оскільки власні значення $\lambda_n(\tau) = \lambda_n(\tau, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, періодичної або антиперіодичної задачі для рівняння $L(\tau, 0)y = \lambda y$ не залежать від параметра τ, маємо $\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n(\tau, 0) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теорему доведено.

***Зауваження* 7.** Використовуючи формули слідів

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right), \tag{36}$$

$$q(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)), \tag{37}$$

систему диференціальних рівнянь (22) можна записати в замкненій формі

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) \times$$

$$\times \left\{ -\xi_n(\tau, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau, t) \right) - 4\xi_n^3(\tau, t) \right\}. \tag{38}$$

***Зауваження* 8.** Покажемо, що нескінченна система рівнянь Дубровіна (22), (23) має єдиний розв'язок при будь-яких початкових даних.

Розглянемо систему Дубровіна у вигляді

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))}\, g_n(\xi(\tau, t)) f_n(\xi(\tau, t)), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{39}$$

з початковими умовами

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \qquad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{40}$$

де $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau)\}$ — спектральні дані оператора Дірака з коефіцієнтами $q_0(x+\tau),\ x, \tau \in \mathbb{R}$,

$$g_n(\xi(\tau,t)) = -\xi_n(\tau,t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau,t)\right) - 4\xi_n^3(\tau,t),$$

$$f_n(\xi(\tau,t)) = \sqrt{\prod_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_n(\tau,t) - \xi_k(\tau,t))^2}}.$$

З метою подальшого дослідження системи рівнянь Дубровіна (39), (40) виконаємо заміну змінних

$$\xi_n(\tau,t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau,t), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді вона набере вигляду

$$\frac{dx_n(\tau,t)}{dt} = H_n(\ldots, x_{-1}(\tau,t), x_0(\tau,t), x_1(\tau,t), \ldots,), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{41}$$

$$x_n(\tau,t)|_{t=0} = x_n^0(\tau) = \arcsin\sqrt{\frac{\xi_n^0(\tau) - \lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{42}$$

де

$$H_n(x(\tau,t)) =$$
$$= (-1)^n \sigma_n(0) g_n(\ldots, \xi_{-1}(\tau,t), \xi_0(\tau,t), \xi_1(\tau,t), \ldots) f_n(\ldots, \xi_{-1}(\tau,t), \xi_0(\tau,t), \xi_1(\tau,t), \ldots),$$
$$\sigma_n(\tau,t)\, \mathrm{sign}\{\sin x_n(\tau,t) \cos x_n(\tau,t)\} = \sigma_n^0(\tau).$$

Для вивчення задачі Коші (41), (42) введемо банаховий простір

$$\mathbf{K} = \left\{ x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) \colon \|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+|n|)(\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1})|x_n| < \infty \right\}.$$

Запишемо систему (41), (42) у вигляді одного рівняння в банаховому просторі $\mathbf{K}$:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt} = H(x(\tau,t)), \quad x(\tau,t)|_{t=0} = x^0(\tau), \quad x^0(\tau) \in \mathbf{K}. \tag{43}$$

Для того щоб задача Коші (43) у банаховому просторі $\mathbf{K}$ мала єдиний розв'язок, достатньо виконання умови Ліпшиця для функції $H(x(t))$, тобто

$$\big\|H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t))\big\| \le \mathrm{const}\big\|x(\tau,t) - y(\tau,t)\big\| \quad \forall x(\tau,t), \quad y(\tau,t) \in \mathbf{K}.$$

З умови $q_0(x) \in C^5(\mathbb{R}),\ q_0(x+\pi) = q_0(x)$ і асимптотики (див. [45, с. 98]) власних значень періодичної й антиперіодичної задач для системи рівнянь Дірака отримаємо такі оцінки:

$$\lambda_{2k},\, \lambda_{2k-1} = k + \sum_{j=1}^{6} c_j k^{-j} \pm 2^{-5}|k|^{-5}|q_{2k}^5| + |k|^{-6}\varepsilon_k^{\pm}, \tag{44}$$

$$\gamma_k \equiv \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{1}{2^4}\frac{|q_{2k}^5|}{|k|^5} + \frac{\delta_k}{|k|^6}, \quad \delta_k = \varepsilon_k^+ - \varepsilon_k^-, \tag{45}$$

$$q_{2k}^5 \equiv -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi q_0^{(5)}(t)e^{-2ikt}dt, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\varepsilon_k^{\pm})^2 < \infty, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_k^2 < \infty. \tag{46}$$

Звідси, враховуючи, що $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, одержуємо $\inf_{k\neq n}|\xi_n - \xi_k| \geq a > 0$. Тепер, використавши цю нерівність і (44), оцінимо функції $|f_n(\xi)|$, $\left|\dfrac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right|$ і $|g_n(\xi)|$, $\left|\dfrac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right|$.

Лема 1. *Справедливі такі оцінки*:

$$c_1 \leq |f_n(\xi)| \leq c_2, \qquad \left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| \leq c_3, \qquad \left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right| \leq c_4, \tag{47}$$

$$|g_n(\xi)| \leq c_5|n|^3, \qquad \left|\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| \leq c_6|m|\,|n|, \qquad \left|\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right| \leq c_7|n|^2, \tag{48}$$

де $c_j > 0$, $j = \overline{1,7}$, *і не залежать від* n *і* m.

Доведення. Розглянемо послідовність

$$f_n^2 = \prod_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2} =$$
$$= \prod_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right)\left(1 + \frac{\lambda_{2k} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right)$$

і оцінимо її зверху:

$$f_n^2 = \prod_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty}\left|1 + \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right|\left|1 + \frac{\lambda_{2k} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right| \leq$$
$$\leq \prod_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty}\left(1 + \left|\frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right|\right)\left(1 + \left|\frac{\lambda_{2k} - \xi_k}{\xi_k - \xi_n}\right|\right) \leq$$
$$\leq \prod_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a}\right)^2 \leq \prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a}\right)^2 \equiv C_2^2,$$

де стала $C_2 > 0$ не залежить від n.

Тепер оцінимо $\left|f_n(\xi)\right|$ знизу. Для цього введемо множину індексів

$$M = \left\{k \in \mathbb{Z}\colon \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a} \geq 1\right\}.$$

Ця множина має скінченне число елементів. Розглянемо нескінченні добутки

$$A_n = \prod_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}, \qquad B_n = \prod_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty}\frac{\lambda_{2k} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}.$$

Зрозуміло, що $f_n^2 = A_n B_n$. Запишемо A_n у вигляді $A_n = A_{n,1}A_{n,2}A_{n,3}$, де

$$A_{n,1} = \prod_{\substack{k=-\infty,\, k\neq n\\ k\notin M}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}, \qquad A_{n,2} = \prod_{k=-\infty,\, k\in M}^{n-1} \frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n},$$

$$A_{n,3} = \prod_{k=n+1,\, k\in M}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}.$$

Якщо $k \neq n$ і $k \notin M$, то маємо

$$\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right| \leq \frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a} < 1,$$

$$-\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right| \geq -\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a} > -1,$$

$$1-\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right| \geq 1-\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a} > 0.$$

Звідси отримуємо

$$|A_{n,1}| = \prod_{\substack{k=-\infty,\, k\neq n\\ k\notin M}}^{\infty} \left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right| = \prod_{\substack{k=-\infty,\, k\neq n\\ k\notin M}}^{\infty} \left|1+\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right| \geq$$

$$\geq \prod_{\substack{k=-\infty,\, k\neq n\\ k\notin M}}^{\infty} \left(1-\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right|\right) \geq \prod_{\substack{k=-\infty,\, k\neq n\\ k\notin M}}^{\infty} \left(1-\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}\right) >$$

$$> \prod_{k=-\infty,\, k\notin M}^{\infty} \left(1-\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}\right) = C_1'.$$

Якщо $k \leq n-1$ і $k \in M$, то

$$|A_{n,2}| = \prod_{k=-\infty,\ k\in M}^{n-1} \left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right| = \prod_{k=-\infty,\ k\in M}^{n-1} \frac{\xi_n-\lambda_{2k-1}}{\xi_n-\xi_k} =$$

$$= \prod_{k=-\infty,\ k\in M}^{n-1} \left(1+\frac{\xi_k-\lambda_{2k-1}}{\xi_n-\xi_k}\right) > 1.$$

Тепер розглянемо випадок $k \geq n+1$ і $k \in M$. Введемо позначення $\Delta = \max_{k\in\mathbb{Z}}(\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1})$ і розглянемо два випадки.

Випадок 1. Нехай $k \geq n+1,\ k \in M,\ |\xi_k - \xi_n| \leq 2\Delta$. Тоді

$$\prod_{k=n+1,\ k\in M^*}^{\infty} \left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right| > \prod_{k=n+1,\ k\in M^*}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}-\lambda'_{2k-1}}{2\Delta} \geq$$

$$\geq \prod_{k=-\infty,\ k\in M}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \lambda'_{2k-1}}{2\Delta}.$$

Тут $M^* = \big\{k \in M : |\xi_k - \xi_n| < 2\Delta\big\}$, число λ'_{2k-1} вибрано з умов

$$\max\big\{\lambda_{2k-2},\ \lambda_{2k-1} - 2\Delta\big\} < \lambda'_{2k-1} < \lambda_{2k-1}.$$

Випадок 2. Нехай $k \geq n+1,\ k \in M,\ |\xi_k - \xi_n| > 2\Delta$. Тоді, оскільки

$$\frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_k - \xi_n} < \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{2\Delta} < \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{2\Delta} < \frac{1}{2},$$

$$-\frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_k - \xi_n} > -\frac{1}{2}, \qquad 1 - \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_k - \xi_n} > \frac{1}{2}, \qquad \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} > \frac{1}{2},$$

отримуємо оцінку

$$\prod_{k=n+1,\ k\in M^{**}}^{\infty} \left|\frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}\right| > \prod_{k=n+1,\ k\in M^{**}}^{\infty} \frac{1}{2} > \prod_{k=-\infty,\ k\in M}^{\infty} \frac{1}{2},$$

де $M^{**} = \big\{k \in M : |\xi_k - \xi_n| > 2\Delta\big\}$.

Отже,

$$|A_{n,3}| = \prod_{k=n+1,\ k\in M}^{\infty} \left|\frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}\right| > \prod_{k=-\infty,\ k\in M}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \lambda'_{2k-1}}{4\Delta} = C''_1.$$

Використовуючи отримані нерівності, виводимо оцінку

$$|A_n| = |A_{n,1}||A_{n,2}||A_{n,3}| > C'_1 C''_1 = C_{1,1}.$$

Аналогічним чином одержуємо оцінку

$$|B_n| > C_{1,2}.$$

Перемножаючи ці оцінки і добуваючи квадратний корінь, отримуємо нерівність $C_1 \leq \big|f_n(\xi)\big|$, де $C_1 = \sqrt{C_{1,1}C_{1,2}} > 0$.

Тепер доведемо другу нерівність із (47).

Якщо $m \neq n$, то

$$f_n^2 = \prod_{k=-\infty, k\neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2},$$

$$2f_n \frac{\partial f_n}{\partial \xi_m} = \frac{\partial f_n^2}{\partial \xi_m} = -2\frac{(\lambda_{2m-1} - \xi_n)(\lambda_{2m} - \xi_n)}{(\xi_m - \xi_n)^3} \times$$

$$\times \prod_{k=-\infty, k\neq n,m}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2} = \frac{2f_n^2}{\xi_n - \xi_m},$$

тобто

$$\frac{\partial f_n}{\partial \xi_m} = \frac{f_n}{\xi_n - \xi_m}.$$

Звідси у випадку $m \neq n$ одержуємо оцінку

$$\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| = \frac{\left|f_n(\xi)\right|}{|\xi_n - \xi_m|} \leq \frac{C_2}{a}.$$

Тепер оцінимо функцію $\left|\dfrac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right|$. Для цього використаємо рівність $f_n^2 = A_n B_n$, де

$$A_n = \prod_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty} \frac{\xi_n - \lambda_{2k-1}}{\xi_n - \xi_k}, \qquad B_n = \prod_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty} \frac{\xi_n - \lambda_{2k}}{\xi_n - \xi_k}.$$

Диференціюючи тотожність

$$\ln A_n = \ln \prod_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_n - \xi_k}\right) = \sum_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_n - \xi_k}\right),$$

отримуємо рівність

$$\frac{\partial A_n}{\partial \xi_n} = A_n \sum_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{(\xi_n - \lambda_{2k-1})(\xi_n - \xi_k)}.$$

Із цієї рівності, враховуючи нерівність $|A_n| \leq C_2$, виводимо оцінку

$$\left|\frac{\partial A_n}{\partial \xi_n}\right| \leq |A_n| \sum_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty} \frac{|\lambda_{2k-1} - \xi_k|}{|\xi_n - \lambda_{2k-1}|\,|\xi_n - \xi_k|} \leq$$

$$\leq C_2 \sum_{k=-\infty,\, k\neq n}^{\infty} \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a^2} \leq \tilde{C}_1.$$

Аналогічним чином, використовуючи нерівність $|B_n| \leq C_2$, одержуємо

$$\left|\frac{\partial B_n}{\partial \xi_n}\right| \leq \tilde{C}_1.$$

Із отриманих нерівностей випливає оцінка

$$\left|\frac{\partial f_n^2}{\partial \xi_n}\right| \leq \left|\frac{\partial A_n}{\partial \xi_n}\right| |B_n| + \left|\frac{\partial B_n}{\partial \xi_n}\right| |A_n| \leq \tilde{C}_2.$$

Звідси маємо

$$\left|f_n(\xi)\right| \left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right| \leq \tilde{C}_3.$$

Використовуючи оцінку $C_1 \leq \left|f_n(\xi)\right|$, виводимо нерівність

$$C_1\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial\xi_n}\right|\le\left|f_n(\xi)\right|\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial\xi_n}\right|\le\tilde{C}_3,$$

тобто

$$\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial\xi_n}\right|\le\frac{\tilde{C}_3}{C_1}.$$

Аналогічним чином можна довести оцінки (48).

Використовуючи лему 1, оцінюємо похідну функції $F_n(\xi)=g_n(\xi)f_n(\xi)$:

$$\left|\frac{\partial F_n(\xi)}{\partial\xi_m}\right|\le\left|\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial\xi_m}\right||f_n(\xi)|+\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial\xi_m}\right||g_n(\xi)|\le c_8(|m|+1)|n|^3,$$

де стала c_8 не залежить від n і m.

Лема 2. *Якщо* $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^5(\mathbb{R})$, *то вектор-функція* $H(x(\tau,t))$ *задовольняє умову Ліпшиця в банаховому просторі* $\mathbf{K}$, *тобто існує стала* $L=\mathrm{const}>0$ *така, що для довільних елементів* $x,y\in\mathbf{K}$ *виконується нерівність*

$$\left\|H(x(\tau,t))-H(y(\tau,t))\right\|\le L\left\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\right\|.$$

Доведення. Використовуючи вираз $H_n(x(\tau,t))=(-1)^n\sigma_n^0(\tau)F_n(\xi(\tau,t))$, отримуємо рівність $\left|H_n(x(\tau,t))-H_n(y(\tau,t))\right|=\left|F_n(\xi(\tau,t))-F_n(\eta(\tau,t))\right|$. Тепер застосуємо теорему Лагранжа про скінченний приріст до функції $\varphi(t)=F_n(\xi+t(\eta-\xi))$ на відрізку $t\in[0,1]$. Тоді одержимо рівність $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t^*)$, тобто

$$F_n(\xi(\tau,t))-F_n(\eta(\tau,t))=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial\xi_m}(\xi_m(\tau,t)-\eta_m(\tau,t)),$$

де $\theta=\xi+t^*(\eta-\xi)$. Звідси випливає, що

$$\left|H_n(x(\tau,t))-H_n(y(\tau,t))\right|=\left|F_n(\xi(\tau,t))-F_n(\eta(\tau,t))\right|\le$$

$$\le\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial\xi_m}\right||\xi_m(\tau,t)-\eta_m(\tau,t)|\le$$

$$\le\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_8(|m|+1)|n|^3|\lambda_{2m}-\lambda_{2m-1}|\left|\sin^2 x_m(\tau,t)-\sin^2 y_m(\tau,t)\right|\le$$

$$\le c_8|n|^3\sum_{m=-\infty}^{\infty}(|m|+1)|\lambda_{2m}-\lambda_{2m-1}|\left|x_m(\tau,t)-y_m(\tau,t)\right|=$$

$$=c_8|n|^3\sum_{m=-\infty}^{\infty}(|m|+1)\gamma_m\left|x_m(\tau,t)-y_m(\tau,t)\right|=c_8|n|^3\left\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\right\|.$$

Тут використано рівності

$$\xi_k(\tau,t)=\lambda_{2k-1}+(\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1})\sin^2 x_k(\tau,t),\quad \eta_k(\tau,t)=\lambda_{2k-1}+(\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1})\sin^2 y_k(\tau,t).$$

Тепер оцінимо норму $\left\|H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t))\right\|$:

$$\left\|H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t))\right\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)(\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1})\left|H_k(x(\tau,t)) - H_k(y(\tau,t))\right| \le$$

$$\le c_6 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)|k|^3(\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1})\left\|x(\tau,t) - y(\tau,t)\right\| = L\left\|x(\tau,t) - y(\tau,t)\right\|,$$

де

$$L = c_6 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)|k|^3\gamma_k < \infty,$$

тобто умова Ліпшиця виконується. Тому розв'язок задачі Коші (22), (23) для всіх $t > 0$ і $\tau \in \mathbb{R}$ існує й єдиний.

***Наслідок* 5.** *Теорема* 6 *визначає метод розв'язання задачі* (18) – (20). *Для цього спочатку знайдемо спектральні дані* $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau),\ n \in \mathbb{Z}$, *оператора* $L(\tau, 0)$, *що відповідають коефіцієнту* $q_0(x+\tau)$. *Позначимо спектральні дані оператора* $L(\tau,t)$ *через* $\lambda_n,\ \xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1,\ n \in \mathbb{Z}$. *Тепер, розв'язуючи задачу Коші* (38), (23) *при довільному значенні* τ, *знаходимо* $\xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t),\ n \in \mathbb{Z}$. *Із формул слідів* (37) *одержуємо* $q(\tau,t)$, *тобто розв'язок задачі* (18) – (20). *Отже, з* (5), (6) *отримуємо* $u(x,t)$, *тобто розв'язок задачі* (1) – (3).

До цього ми припускали, що задача Коші (18) – (20) має розв'язок. Цього припущення неважко позбутися, безпосередньо переконавшись, що отримана таким чином функція $q(\tau,t)$ задовольняє рівняння (18).

***Зауваження* 9.** Покажемо, що функція $q(\tau,t)$, побудована за допомогою системи рівнянь Дубровіна (22) і формули слідів (37), задовольняє рівняння мКдФ вигляду (18). При цьому ми також будемо використовувати систему рівнянь Дубровіна вигляду

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial \tau} = (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t) 2\xi_n h_n\left(\xi(\tau,t)\right) \tag{49}$$

і формулу слідів (36), а також

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t)\right) = p(\tau,t) = 0. \tag{50}$$

Диференціюючи формулу слідів (37) по t, маємо

$$q_t(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m}\frac{\partial \xi_m}{\partial t}\right). \tag{51}$$

Із рівностей (22) і (49) знаходимо

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2\left[q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t)\right]\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial \tau} + 4\xi_n^2(\tau,t)\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial \tau}.$$

Підставляючи цей вираз у рівність (51), одержуємо

$$q_t(\tau,t)=2\left[q^2(\tau,t)+q_\tau(\tau,t)\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m(\tau,t)}\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}+$$
$$+4\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\xi_m^2(\tau,t)\frac{\partial\xi_m(\tau,t)}{\partial\tau}\right). \tag{52}$$

Враховуючи рівність

$$q_\tau(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\tau},$$

отриману диференціюванням формули слідів (37) по τ, рівність (52) записуємо у вигляді

$$q_t=2q^2(\tau,t)q_\tau(\tau,t)+2q_\tau^2(\tau,t)+$$
$$+\,4\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n}{\partial\xi_m}\xi_m^2\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right). \tag{53}$$

Тепер, диференціюючи по τ формулу слідів (36), маємо

$$2qq_\tau+q_{\tau\tau}=-2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}.$$

Якщо підставити в останню рівність вираз (49), то вона набере вигляду

$$2qq_\tau+q_{\tau\tau}=-4\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\xi_n^2h_n(\xi).$$

Диференціюючи ще раз по τ одержану тотожність, отримуємо

$$2q_\tau^2+2qq_{\tau\tau}+q_{\tau\tau\tau}=-4\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{4\xi_n^2h_n^2(\xi)+(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\xi_n^2\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)\right\}. \tag{54}$$

Додаючи рівності (53) і (54), знаходимо

$$q_t+2qq_{\tau\tau}+q_{\tau\tau\tau}=$$
$$=2q^2q_\tau+4\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{-4\xi_n^2h_n^2(\xi)+(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty,m\neq n}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}(\xi_m^2-\xi_n^2)\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)\right\}. \tag{55}$$

Підставляючи вираз

$$\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}=\frac{h_n(\xi)}{\xi_n-\xi_m},\quad m\neq n,$$

у рівність (55), виводимо

$$q_t+2qq_{\tau\tau}+q_{\tau\tau\tau}=$$

$$= 2q^2 q_\tau + 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -4\xi_n^2 h_n^2(\xi) + (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty, m\neq n}^{\infty} \frac{h_n(\xi)}{\xi_n - \xi_m} (\xi_m^2 - \xi_n^2) \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\},$$

тобто

$$q_t + 2qq_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} =$$

$$= 2q^2 q_\tau - 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 4\xi_n^2 h_n^2(\xi) + (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty, m\neq n}^{\infty} h_n(\xi)(\xi_n + \xi_m) \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\}.$$

Запишемо останню рівність у вигляді

$$q_t + 2qq_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} = 2q^2 q_\tau -$$

$$-4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 4\xi_n^2 h_n^2(\xi) + (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} - \xi_n \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} + \xi_n \sum_{m=-\infty, m\neq n}^{\infty} \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} \right) \right\}. \tag{56}$$

Використовуючи формули слідів (36) і (50), виводимо тотожності

$$-2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} = 2qq_\tau + q_{\tau\tau}, \tag{57}$$

$$\sum_{m=-\infty, m\neq n}^{\infty} \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} = -\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau}. \tag{58}$$

Якщо враховувати формули (57) і (58), то рівність (56) набере вигляду

$$q_t + 2qq_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} =$$

$$= 2q^2 q_\tau - 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 4\xi_n^2 h_n^2(\xi) + (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \left[-\frac{1}{2}(2qq_\tau + q_{\tau\tau}) - 2\xi_n \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} \right] \right\},$$

тобто

$$q_t + 2qq_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} = 2q^2 q_\tau - 4 \left\{ -\frac{1}{2}(2qq_\tau + q_{\tau\tau})q \right\}.$$

Отже, справджується тотожність

$$q_t = 6q^2 q_\tau - q_{\tau\tau\tau}.$$

***Зауваження* 10.** Рівномірна збіжність рядів у наведених вище формулах випливає з (45) і оцінки $|h_k| \leq c\gamma_k,\ k \geq 0,\ c = \text{const}$.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 7. *Якщо початкова функція $q_0(x)$ задовольняє умову $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^5(\mathbb{R})$, то існує єдиний розв'язок $q(x,t)$ задачі* (18), (19), *який визначається сумою ряду* (37) *і належить до класу $C_x^3(t>0) \bigcap C_t^1(t>0) \bigcap C(t \geq 0)$.*

Ця теорема справедлива і для розв'язку $u(x,t)$ задачі (1) – (3).

***Наслідок* 6.** *Використовуючи теореми* 1 *і* 2, *виводимо*, *що якщо початкова функція* $q_0(x)$ *є дійсною* π*-періодичною аналітичною функцією*, *то розв'язок* $q(x,t)$ *задачі Коші* $(18)-(20)$ *також є дійсною аналітичною функцією по* x. *Отже*, *з рівності* (5) *випливає*, *що розв'язок* $u(x,t)$ *задачі Коші* $(1)-(3)$ *також є дійсною аналітичною функцією по* x.

***Наслідок* 7.** *Якщо число* $\dfrac{\pi}{2}$ *є періодом* (*антиперіодом*) *для початкової функції* $q_0(x)$, *то все корені рівняння* $\Delta(\lambda)+2=0$ $(\Delta(\lambda)-2=0)$ *є двократними. Оскільки функція Ляпунова*, *що відповідає коефіцієнту* $q(x,t)$, *збігається з* $\Delta(\lambda)$, *то згідно з теоремою* 3 *число* $\dfrac{\pi}{2}$ *також є періодом* (*антиперіодом*) *для розв'язку* $q(x,t)$ *за змінною* x. *Отже*, *з рівності* (5) *випливає*, *що число* $\dfrac{\pi}{2}$ *також є періодом* (*антиперіодом*) *для розв'язку* $u(x,t)$ *задачі* $(1)-(3)$ *за змінною* x.

Література

1. C. Gardner, I. Green, M. Kruskal, R. Miura, *A method for solving the Korteweg–de Vries equation*, Phys. Rev. Lett., **19**, 1095–1098 (1967).
2. Л. Д. Фаддеев, *Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **73**, 314–336 (1964).
3. В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наук. думка, Киев (1977).
4. Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, Москва (1984).
5. P. D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Commun. Pure and Appl. Math., **21**, 467–490 (1968).
6. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах*, Журн. эксперим. и теор. физики, **61**, № 1, 118–134 (1971).
7. M. Wadati, *The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation*, J. Phys. Soc. Japan, **32**, № 6, 44–47 (1972).
8. В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Полное описание решений „sin-Gordon" уравнения*, Докл. АН СССР, **219**, № 6, 1334–1337 (1974).
9. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Method for solving the sine-Gordon equation*, Phys. Rev. Lett., **30**, № 25, 1262–1264 (1973).
10. И. С. Фролов, *Обратная задача для системы Дирака на всей оси*, Докл. АН СССР, **207**, № 1, 44–47 (1972).
11. Л. П. Нижник, Фам Лой Ву, *Обратная задача рассеяния на полуоси с несамосопряженной потенциальной матрицей*, Укр. мат. журн., **26**, № 4, 469–485 (1974).
12. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
13. V. K. Mel'nikov, *Integration of the nonlinear Schrödinger equation with a source*, Inverse Problems, **8**, 133–147 (1992).
14. V. K. Mel'nikov, *Integration of the nonlinear Schrödinger equation with a self-consistent source*, Commun. Math. Phys., **137**, 359–381 (1991).
15. Y. Shao, Y. Zeng, *The solutions of the NLS equations with self-consistent sources*, J. Phys. A: Math. and Gen., **38**, 2441–2467 (2005).
16. Y. Zeng, W. Ma, R. Lin, *Integration of the soliton hierarchy with self-consistent sources*, J. Math. Phys., **41**, № 8, 5453–5489 (2000).
17. А. Б. Хасанов, Г. У. Уразбоев, *Об уравнении sine-Гордон с самосогласованным источником, соответствующим кратным собственным значениям*, Дифференц. уравнения, **43**, № 4, 544–552 (2007).
18. А. Б. Хасанов, Г. У. Уразбоев, *Об интегрировании уравнения sine-Гордон с самосогласованным источником интегрального типа в случае кратных собственных значений*, Изв. вузов. Математика, № 3, 55–66 (2009).
19. А. Б. Хасанов, Г. У. Уразбоев, *Об интегрировании уравнения sine-Гордон с самосогласованным источником*, Мат. труды, **11**, № 1, 153–166 (2008).
20. А. Б. Хасанов, У. А. Хоитметов, *Об интегрировании уравнения Кортевега–де Фриза в классе быстроубывающих комплекснозначных функций*, Изв. вузов. Математика, № 3, 79–90 (2018).
21. А. Б. Хасанов, У. А. Хоитметов, *Интегрирование общего нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза с интегральным источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций*, Изв. вузов. Математика, № 7, 52–66 (2021).
22. А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, *Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза*, Теор. и мат. физика, **23**, № 1, 51–68 (1975).

23. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега – де Фриза*, Журн. эксперим. и теор. физики, **67**, № 12, 2131 – 2143 (1974).
24. P. D. Lax, *Periodic solutions of the KdV equations*, Commun. Pure and Appl. Math., **28**, 141 – 188 (1975).
25. А. Р. Итс, В. П. Котляров, *Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера*, Докл. АН УССР. Сер. А, № 11, 965 – 968 (1976).
26. А. О. Смирнов, *Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза*, Мат. сб., **185**, № 8, 103 – 114 (1994).
27. Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко, *Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты*, Наук. думка, Киев (1987).
28. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
29. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
30. E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, New York (1956).
31. П. Б. Джаков, Б. С. Митягин, *Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака*, Успехи мат. наук, **61**, № 4, 77 – 182 (2006).
32. Б. А. Дубровин, *Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза в классе конечнозонных потенциалов*, Функцион. анализ и его прил., **9**, вып. 3, 41 – 51 (1975).
33. P. G. Grinevich, I. A. Taimanov, *Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type*, Geometry, Topology and Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, AMS, Providence, RI, 125 – 138 (2008).
34. А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов, *Об уравнении Кортевега – де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций*, Теор. и мат. физика, **164**, № 2, 214 – 221 (2010).
35. А. Б. Хасанов, М. М. Матякубов, *Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега – де Фриза с дополнительным членом*, Теор. и мат. физика, **203**, № 2, 192 – 204 (2020).
36. H. McKean, E. Trubowitz, *Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presense of infinitely many branch-points*, Commun. Pure and Appl. Math., **29**, 143 – 226 (1976).
37. H. McKean, E. Trubowitz, *Hill's surfaces and their theta functions*, Amer. Math. Soc., **84**, № 9, 1052 – 1085 (1978).
38. M. U. Schmidt, *Integrable systems and Riemann surfaces of infinite genus*, Mem. Amer. Math. Soc., **122**, № 581, (1996).
39. P. Lax, *Almost periodic solutions of the KdV equation*, SIAM Rev., **18**, № 3, 351 – 375 (1976).
40. А. В. Домрин, *Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений*, Изв. РАН. Сер. мат., **74**, вып. 3, 23 – 44 (2010).
41. А. Б. Хасанов, М. М. Хасанов, *Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным членом в классе периодических функций*, Теор. и мат. физика, **199**, № 1, 60 – 68 (2019).
42. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака*, Наука, Москва (1988).
43. А. Б. Хасанов, А. М. Ибрагимов, *Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом*, Узб. мат. журн., № 3-4, 48 – 55 (2001).
44. А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов, *Аналог обратной теоремы Г. Борга для оператора Дирака*, Узб. мат. журн., № 3-4, 40 – 46 (2000).
45. Т. В. Мисюра, *Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака, I, II*, Теория функций, функцион. анализ и их прил., вып. 30, 90 – 101 (1978); вып. 31, 102 – 109 (1979).
46. Л. В. Станкевич, *Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла*, Докл. АН СССР, **192**, № 1, 34 – 37 (1970).
47. E. Trubowitz, *The inverse problem for periodic potentials*, Commun. Pure and Appl. Math., **30**, 321 – 337 (1977).
48. G. Borg, *Eine Umkehrung der Sturm – Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta Math., **78**, 1 – 96 (1946).
49. S. Currie, T. Roth, B. Watson, *Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **60**, № 3, 615 – 633 (2017).
50. Н. И. Ахиезер, *Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов*, Докл. АН СССР, **141**, № 2, 262 – 266 (1961).
51. H. Flashka, *On the inverse problem for Hill's operator*, Arch. Ration. Mech. and Anal., **59**, № 4, 293 – 309 (1975).
52. H. Hochstadt, *A generalization of Borg's inverse theorem for Hill's equation*, J. Math. Anal. and Appl., **102**, 599 – 605 (1984).

Одержано 16.04.20