DOI: 10.37863/umzh.v73i9.6093

УДК 517.382+517.52+517.521.2

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ОПЕРАТОРНИХ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ І РЯДІВ

We obtain differential convergence criteria for operator improper integrals and series.

Отримано диференціальні ознаки збіжності операторних невласних інтегралів і рядів.

1. Вступ. Будемо використовувати в статті множини $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ і $\mathbb{N}$ всіх дійсних, комплексних і натуральних чисел відповідно та функції

$$t,\ \ln t,\ \ln\ln t,\ \ln\ln\ln t, \ldots,\ \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{m\ \text{разів}} t, \ldots,$$

$$\exp(t),\ \exp(\exp(t)),\ \exp\big(\exp(\exp(t))\big), \ldots,\ \underbrace{\exp\big(\exp(\ldots\exp}_{m\ \text{разів}}(t)\ldots)\big), \ldots,$$

які позначатимемо через

$$l_0(t),\ l_1(t),\ l_2(t),\ l_3(t), \ldots,\ l_m(t), \ldots,$$

$$l_{-1}(t),\ l_{-2}(t),\ l_{-3}(t), \ldots,\ l_{-m}(t), \ldots$$

відповідно, і

$$\Pi_m(t) = \prod_{k=0}^{m} l_k(t). \tag{1}$$

Легко перевірити, що

$$l_m\big(l_{-m}(t)\big) = t,$$

$$l_{-m}\big(l_m(t)\big) = t,$$

$$\frac{d\,l_m(t)}{dt} = \frac{1}{\Pi_{m-1}(t)} \tag{2}$$

і

$$\frac{d\Pi_m(t))}{dt}\frac{1}{\Pi_m(t)} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\Pi_k(t)} \tag{3}$$

для всіх точок $t \in \mathbb{R}$, в яких визначено відповідні функції, і $m \in \mathbb{N}$.

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(t)\, dt, \tag{4}$$

де $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ — неперервно диференційовна функція, числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \tag{5}$$

де $a_n > 0,\ n \geq 1$, і функції

$$\begin{aligned}
&s_1(t) = -t\,\frac{d\ln f(t)}{dt},\\
&s_2(t) = l_1(t)\ (s_1(t) - 1),\\
&s_3(t) = l_2(t)\ (s_2(t) - 1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&s_{n+1}(t) = l_n(t)\ (s_n(t) - 1).
\end{aligned} \tag{6}$$

В [1, 2] автором встановлено два твердження про умови збіжності та розбіжності невласного інтеграла (4) і числового ряду (5) з використанням функцій (6).

Теорема 1. *Нехай для деякого* $p \in \mathbb{N}$ *існує границя*

$$\lim_{t \to +\infty} s_p(t) = s_p. \tag{7}$$

Тоді:

1) *якщо* $s_p > 1$, *то інтеграл* (4) *збігається*;

2) *якщо* $s_p < 1$, *то інтеграл* (4) *розбігається.*

Теорема 2. *Нехай функція* $f(t)$ *є монотонно спадною на* $[1, +\infty)$, $f(n) = a_n$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *і для деякого* $p \in \mathbb{N}$ *існує границя* (7). *Тоді*:

1) *якщо* $s_p > 1$, *то ряд* (5) *збігається*;

2) *якщо* $s_p < 1$, *то ряд* (5) *розбігається.*

Зазначимо, що для дослідження збіжності широких класів невласних інтегралів і числових рядів теореми 1 і 2 є зручнішими для використання, ніж відомі ознаки збіжності рядів та інтегралів (див., наприклад, [2, 3]).

Важливим для математичного аналізу є встановлення аналогів наведених тверджень для операторних невласних інтегралів і рядів.

2. Основні об'єкт досліджень і твердження. Нехай E — комплексний банаховий простір із нормою $\|\cdot\|_E$, $L(E, E)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів $A \colon E \to E$ з нормою

$$\|A\|_{L(E,E)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Ax\|_E$$

та одиничним оператором I і $\sigma(A)$ — спектр оператора A.

Розглянемо операторні невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} F(t)\,dt, \tag{8}$$

де $F\colon [1,+\infty) \to L(E,E)$ — неперервно диференційовна функція, для якої для кожного зафіксованого $t \in [1,+\infty)$ оператор $F(t)\colon E \to E$ має неперервний обернений оператор $(F(t))^{-1}$, ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n, \tag{9}$$

де $A_n \in L(E,E)$, $n \in \mathbb{N}$, і функції

$$\begin{aligned} &S_1(t) = -t\,\frac{dF(t)}{dt}\,(F(t))^{-1}, \\ &S_2(t) = l_1(t)\,(S_1(t) - I), \\ &S_3(t) = l_2(t)\,(S_2(t) - I), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_{n+1}(t) = l_n(t)\,(S_n(t) - I), \end{aligned} \tag{10}$$

що аналогічні функціям (6).

Основним об’єктом досліджень у статті є встановлення для невласного інтеграла (8) і ряду (9) тверджень, аналогічних теоремам 1 і 2.

Справедливими є такі теореми.

Теорема 3. *Нехай для деякого* $p \in \mathbb{N}$ *існує границя*

$$\lim_{t\to+\infty} S_p(t) = S_p. \tag{11}$$

Тоді:

1) *якщо*

$$\sigma(S_p) \subset \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z > 1\big\}, \tag{12}$$

то інтеграл (8) *збігається*;

2) *якщо*

$$\sigma(S_p) \subset \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z < 1\big\}, \tag{13}$$

то інтеграл (8) *розбігається.*

Теорема 4. *Нехай збігається невласний інтеграл*

$$\int_1^{+\infty} (F(t) - F([t]))\,dt, \tag{14}$$

де $[t]$ — *ціла частина числа* t, $F(n) = A_n$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *і для деякого* $p \in \mathbb{N}$ *існує границя* (11). *Тоді*:

1) *якщо виконується співвідношення* (12), *то ряд* (9) *збігається*;

2) *якщо виконується співвідношення* (13), *то ряд* (9) *розбігається.*

Обґрунтування цих теорем наведено в п. 4.

3. Допоміжні твердження. При доведенні теорем 3 і 4 будемо використовувати інтегральну ознаку збіжності операторних рядів (теореми 5 і 6). Цю ознаку ми використаємо і для дослідження збіжності невласного інтеграла

$$\int\limits_{l_{-m}(1)}^{+\infty} \frac{1}{\Pi_{m-1}(t)} \left(l_m(t)\right)^{-B} dt \tag{15}$$

та ряду

$$\sum_{n>l_{-m}(1)} \frac{1}{\Pi_{m-1}(n)} \left(l_m(n)\right)^{-B}, \tag{16}$$

де $m \in \mathbb{N}$ і $B \in L(E,E)$, що є окремими випадками інтеграла (8) і ряду (9).

Також при доведенні теорем 3 і 4 будемо використовувати оцінки норм операторної експоненти та розв'язків лінійних операторних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, близькими до сталих.

Завдяки тому, що в інтегралі (15) і ряді (16) B — довільний оператор, знаходження умов їхньої збіжності не є тривіальним (див. пп. 3.2).

3.1. Загальна інтегральна ознака збіжності рядів. Важливими для подальшого є такі дві теореми.

Теорема 5. *Нехай*:

1) $A_n \in L(E,E),\ n \geq 1$;

2) $F\colon [1,+\infty) \to L(E,E)$ — *неперервне відображення і* $F(n) = A_n,\ n \geq 1$;

3) *невласний інтеграл* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \big(F(t) - F([t])\big)\, dt$ *збігається.*

Тоді операторний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ *і невласний інтеграл* $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\, dt$ *одночасно збігаються або розбігаються.*

Теорема 6. *Для кожного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, *де* $A_n \in L(E,E)$, *існує неперервне відображення* $F\colon [1,+\infty) \to L(E,E)$, *для якого* $F(n) = A_n,\ n \in \mathbb{N}$, *і невласний інтеграл* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \big(F(t) - F([t])\big)\, dt$ *збігається.*

Ці твердження встановлено автором в [4, 5] для довільних векторних рядів.

Зазначимо, що на підставі теореми 6 інтегральна ознака (теорема 5) застосовна до довільних операторних рядів.

***3.2. Умови збіжності невласного інтеграла* (15) *і ряду* (16).** Очевидно, що інтеграл (15) і ряд (16) є загальними членами операторних послідовностей

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{t} (\ln t)^{-B} dt, \quad \int\limits_{e^e}^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} (\ln\ln t)^{-B} dt, \quad \int\limits_{l_{-3}(1)}^{+\infty} \frac{1}{t \ln t \ln\ln t} (\ln\ln\ln t)^{-B} dt, \ \ldots \tag{17}$$

і

$$\sum_{n>e} \frac{1}{n} (\ln n)^{-B}, \quad \sum_{n>e^e} \frac{1}{n \ln n} (\ln\ln n)^{-B}, \quad \sum_{n>l_{-3}(1)} \frac{1}{n \ln n \ln\ln n} (\ln\ln\ln n)^{-B}, \ \ldots \tag{18}$$

відповідно.

Справджується така теорема.

Теорема 7. *Члени послідовностей* (17) *і* (18) *збігаються лише у випадку*

$$\sigma(B) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 1\}. \tag{19}$$

Доведення. Зафіксуємо довільне число $m \in \mathbb{N}$. Розглянемо операторну функцію

$$F_m(t) = \frac{1}{\Pi_{m-1}(t)}\,(l_m(t))^{-B}.$$

Ця функція є диференційовною на $\big[l_{-m}(1), +\infty\big)$ і

$$\frac{dF_m(t)}{dt} = -\frac{1}{\Pi_{m-1}^2(t)}\,\frac{d\Pi_{m-1}(t)}{dt}\,(l_m(t))^{-B} - \frac{1}{\Pi_{m-1}(t)}\,\frac{dl_m(t)}{dt}\,(l_m(t))^{-B-I}B$$

для всіх $t \geq l_{-m}(1)$. Тому на підставі (1)–(3) та оцінки для норми функції $(l_m(t))^{-B}$:

$$\big\|(l_m(t))^{-B}\big\|_{L(E,E)} \leq (l_m(t))^{\|B\|_{L(E,E}}, \quad t \geq l_{-m}(1),$$

для деякого числа $\gamma_m > 0$ виконується співвідношення

$$\left\|\frac{dF_m(t)}{dt}\right\|_{L(E,E)} \leq \frac{\gamma_m}{t^{3/2}}, \quad t \geq l_{-m}(1).$$

Завдяки цьому співвідношенню та теоремі про скінченний приріст (див. [6, c. 81]) для кожного $t \geq l_{-m}(1)$

$$\big\|F_m(t) - F_m([t])\big\|_{L(E,E)} \leq \sup_{[t]\leq\theta\leq t}\left\|\frac{dF_m(\theta)}{d\theta}\right\|_{L(E,E)}(t-[t]) \leq$$

$$\leq \sup_{[t]\leq\theta\leq t}\left\|\frac{dF_m(\theta)}{d\theta}\right\|_{L(E,E)} \leq \frac{\gamma_m}{[t]^{3/2}}.$$

Звідси з урахуванням збіжності невласних інтегралів

$$\int\limits_{l_{-m}(1)}^{+\infty} \frac{\gamma_m}{[t]^{3/2}}\,dt, \quad m \in \mathbb{N},$$

отримуємо збіжність невласних інтегралів

$$\int\limits_{l_{-m}(1)}^{+\infty} \big(F_m(t) - F_m([t])\big)\,dt, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Отже, за теоремою 5 поведінка операторних невласного інтеграла (15) і ряду (16) (у сенсі збіжності) однакова для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Розглянемо ряд

$$\sum_{n>e}\frac{1}{n}\,(\ln n)^{-B}, \tag{21}$$

що є першим членом послідовності (18). У [7] показано, що цей ряд збігається лише у випадку виконання співвідношення (19). Завдяки збіжності інтеграла (20) при $m = 1$ та теоремі 5 невласний інтеграл

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{t} (\ln t)^{-B} dt, \tag{22}$$

що є першим членом послідовності (17), також є збіжним лише у випадку виконання співвідношення (19).

Покажемо, що невласний інтеграл (15) при $m \geq 2$ також збігається лише у випадку виконання співвідношення (19). У цьому інтегралі замінимо змінну інтегрування t з використанням співвідношення

$$l_m(t) = \ln \tau, \tag{23}$$

де τ — нова змінна інтегрування. Враховуючи, що

$$\frac{dt}{\Pi_{m-1}(t)} = \frac{d\tau}{\tau}$$

(на підставі (23)) і

$$l_m(l_{-m}(1)) = 1,$$

отримуємо рівності

$$\int\limits_{l_{-m}(1)}^{l_{-m}(\ln T)} \frac{1}{\Pi_{m-1}(t)} \left(l_m(t)\right)^{-B} dt = \int\limits_{e}^{T} \frac{1}{\tau} (\ln \tau)^{-B} d\tau, \quad T \geq e.$$

Із цих рівностей випливає, що якщо для деякого оператора $B \in L(E, E)$ існує границя

$$\lim_{T \to +\infty} \int\limits_{l_{-m}(1)}^{l_{-m}(\ln T)} \frac{1}{\Pi_{m-1}(t)} \left(l_m(t)\right)^{-B} dt,$$

тобто інтеграл (15) збігається, то існує границя

$$\lim_{T \to +\infty} \int\limits_{e}^{T} \frac{1}{\tau} (\ln \tau)^{-B} d\tau,$$

тобто інтеграл (22) збігається, і навпаки.

Звідси та з того, що ряд (21) збігається лише у випадку виконання співвідношення (19), отримуємо, що всі члени послідовності (17) також є збіжними лише у випадку виконання співвідношення (19).

Згідно з теоремою 5 та збіжністю інтегралів (20) всі члени послідовності (18) також є збіжними лише у випадку виконання співвідношення (19).

Теорему 7 доведено.

3.3. Оцінка норми операторної експоненти.

Теорема 8 [8, с. 43]. *Нехай* $A \in L(E,E)$. *Для кожного числа* $\alpha \in \mathbb{R}$, *для якого*

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z < \alpha\},$$

існує таке число $M \geq 1$, *що справджується співвідношення*

$$\|e^{tA}\|_{L(E,E)} \leq Me^{\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

3.4. Оцінки норм розв'язків лінійних операторних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, близькими до сталих. Розглянемо операторне диференціальне рівняння

$$\frac{dU(t)}{dt} = -(S + H(t))U(t), \quad t \geq 0, \tag{24}$$

де $S \in L(E,E)$, $H(t)$ — неперервна на $[0,+\infty)$ функція зі значеннями в $L(E,E)$ і

$$U(0) = I. \tag{25}$$

Важливими для подальшого є наступні два твердження.

Теорема 9. *Нехай*

$$\sigma(S) \subset \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > \alpha\}, \quad \alpha > 1,$$

M — *таке додатне число, що*

$$\left\|e^{-tS}\right\|_{L(E,E)} \leq Me^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \tag{26}$$

ε — *довільне додатне число, для якого*

$$\alpha - M\varepsilon > 1, \tag{27}$$

і

$$\sup_{t \geq 0} \|H(t)\|_{L(E,E)} < \varepsilon. \tag{28}$$

Тоді для розв'язку $U(t)$ *рівняння* (24), *що задовольняє* (25), *виконується співвідношення*

$$\left\|U(t)\right\|_{L(E,E)} \leq Me^{-(\alpha - M\varepsilon)t}, \quad t \geq 0. \tag{29}$$

У теоремі 9 число M, для якого виконується співвідношення (26), існує за теоремою 8.

***Доведення теореми* 9.** Згідно з [8, с. 147] розв'язок $U(t)$ рівняння (24), що задовольняє (25), є розв'язком інтегрального рівняння

$$U(t) = e^{-tS} - \int\limits_0^t e^{-(t-\tau)S_p} H(\tau)U(\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0.$$

Тому з урахуванням (26) і (28) (число ε вибрано так, щоб справджувалась нерівність (27)) для всіх $t \geq 0$

$$\left\|U(t)\right\|_{L(E,E)} \leq \left\|e^{-tS}\right\|_{L(E,E)} +$$

$$+\int\limits_0^t \left\|e^{-(t-\tau)S}\right\|_{L(E,E)} \left\|H(\tau)\right\|_{L(E,E)} \left\|U(\tau)\right\|_{L(E,E)} d\tau \leq$$

$$\leq Me^{-\alpha t} + \int\limits_0^t Me^{-\alpha(t-\tau)}\varepsilon \left\|U(\tau)\right\|_{L(E,E)} d\tau,$$

тобто

$$\left\|U(t)\right\|_{L(E,E)} \leq Me^{-\alpha t} + Me^{-\alpha t}\varepsilon \int\limits_0^t e^{\alpha\tau} \|U(\tau)\|_{L(E,E)} d\tau, \quad t \geq 0,$$

і

$$e^{\alpha t}\left\|U(t)\right\|_{L(E,E)} \leq M + M\varepsilon \int\limits_0^t e^{\alpha\tau} \left\|U(\tau)\right\|_{L(E,E)} d\tau, \quad t \geq 0.$$

Звідси на підставі нерівності Гронуолла [9, с. 11] отримуємо співвідношення

$$e^{\alpha t}\left\|U(t)\right\|_{L(E,E)} \leq Me^{M\varepsilon t}, \quad t \geq 0,$$

рівносильне (29).

Теорему 9 доведено.

Теорема 10. *Нехай*

$$\sigma(S) \subset \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z < \beta\},$$

$\beta \in (0,1),$ M *— таке додатне число, що*

$$\left\|e^{tS}\right\|_{L(E,E)} \leq Me^{\beta t}, \quad t \geq 0, \tag{30}$$

δ *— довільне додатне число, для якого*

$$\beta + M\delta < 1, \tag{31}$$

і

$$\sup_{t\geq 0} \|H(t)\|_{L(E,E} < \delta. \tag{32}$$

Тоді для розв'язку $U(t)$ *рівняння* (24), *що задовольняє* (25), *виконується співвідношення*

$$\left\|U(t)\right\|_{L(E,E)} \geq \frac{1}{M}e^{-(\beta+M\delta)t}, \quad t \geq 0. \tag{33}$$

***Доведення теореми* 10.** Використаємо союзне рівняння для рівняння (24) [8, с. 146]:

$$\frac{dV(t)}{dt} = V(t)(S + H(t)), \quad t \geq 0. \tag{34}$$

Вважатимемо, що

$$V(0) = I. \tag{35}$$

У [8, с. 146] показано, що для розв'язків задач (24), (25) і (34), (35) справджується тотожність

$$U(t) \equiv (V(t))^{-1}.$$

Тому для всіх $t \geq 0$

$$\big\|U(t)\big\|_{L(E,E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|U(t)x\|_E \geq \inf_{\|x\|_E=1} \|U(t)x\|_E =$$

$$= \inf_{\|x\|_E=1} \big\|(V(t))^{-1}x\big\|_E = \frac{1}{\sup\limits_{\|x\|_E=1} \|V(t)x\|_E} = \frac{1}{\|V(t)\|_{L(E,E)}}. \tag{36}$$

Оцінимо зверху $\big\|V(t)\big\|_{L(E,E)}$.

Оскільки розв'язок задачі (34), (35) є розв'язком інтегрального рівняння

$$V(t) = e^{tS} + \int\limits_0^t V(\tau)H(\tau)\, e^{(t-\tau)S}\, d\tau, \quad t \geq 0$$

(див. [8, с. 151]), то на підставі (30) і (32) (число δ вибрано так, щоб справджувалась нерівність (31)) для всіх $t \geq 0$

$$\|V(t)\|_{L(E,E)} \leq \big\|e^{tS}\big\|_{L(E,E)} + \int\limits_0^t \big\|V(\tau)\big\|_{L(E,E)} \|H(\tau)\|_{L(E,E)} \big\|e^{(t-\tau)S}\big\|_{L(E,E)}\, d\tau \leq$$

$$\leq Me^{\beta t} + M\delta \int\limits_0^t e^{\beta(t-\tau)} \big\|V(\tau)\big\|_{L(E,E)}\, d\tau, \quad t \geq 0,$$

тобто

$$\|V(t)\|_{L(E,E)} \leq Me^{\beta t} + Me^{\beta t}\delta \int\limits_0^t e^{-\beta\tau} \big\|V(\tau)\big\|_{L(E,E)}\, d\tau, \quad t \geq 0,$$

і

$$e^{-\beta t}\|V(t)\|_{L(E,E)} \leq M + M\delta \int\limits_0^t e^{-\beta\tau} \big\|V(\tau)\big\|_{L(E,E)}\, d\tau, \quad t \geq 0.$$

Звідси на підставі нерівності Гронуолла отримуємо співвідношення

$$e^{-\beta t}\|V(t)\|_{L(E,E)} \leq Me^{M\delta t}, \quad t \geq 0,$$

з якого випливає, що

$$\|V(t)\|_{L(E,E)} \leq Me^{(\beta+M\delta)t}, \quad t \geq 0.$$

Із цього співвідношення та (36) отримуємо (33).

Теорему 10 доведено.

4. Обґрунтування теорем 3 і 4. ***Доведення теореми*** **3.** Оскільки операторна функція $S_p(t)$ при $t \to +\infty$ має границю $S_p \in L(E,E)$, то для деякої неперервної на $[l_{-p}(1), +\infty)$ операторної функції $H_p(t)$ зі значеннями в $L(E,E)$

$$S_p(t) = S_p + H_p(t), \quad t \geq l_{-p}(1),$$

і

$$\lim_{t \to +\infty} \|H_p(t)\|_{L(E,E)} = 0. \tag{37}$$

Тому завдяки (2), (3) і (10) для операторної функції $F(t)$ при $t \geq l_{-p}(1)$ виконується співвідношення

$$F'(t) = \begin{cases} -\dfrac{dl_1(t)}{dt}\,(S_1 + H_1(t))F(t), & \text{якщо} \quad p = 1, \\ -\left(\dfrac{d\Pi_{p-2}(t)}{dt}\dfrac{1}{\Pi_{p-2}(t)}I + \dfrac{dl_p(t)}{dt}\big(S_p + H_p(t)\big)\right)F(t), & \text{якщо} \quad p \geq 2. \end{cases} \tag{38}$$

При $p \geq 2$ функцію $F(t)$ запишемо у вигляді

$$F(t) = \frac{1}{\Pi_{p-2}(t)} V_p(t), \tag{39}$$

де $V_p(t)$ — неперервно диференційовна операторна функція, для якої виконується співвідношення

$$\frac{dV_p(t)}{dt} = -\frac{dl_p(t)}{dt}\big(S_p + H_p(t)\big)V_p(t), \quad t \geq l_{-p}(1). \tag{40}$$

Отже, для функції $V_p(t)$ при $p \geq 2$ виконується співвідношення, аналогічне співвідношенню для функції $F(t)$ при $p = 1$.

Використаємо співвідношення (38)–(40) для оцінки норми функції $F(t)$. Будемо вважати, що виконується співвідношення (12). Запишемо (40) у зручному для подальшого вигляді, використавши нові змінну

$$s = l_p(t) \tag{41}$$

та функцію

$$W_p(s) = V_p(t). \tag{42}$$

Оскільки

$$\frac{dV_p(t)}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{dW_p(s)}{ds} = \frac{dl_p(t)}{dt}\,\frac{dW_p(s)}{ds},$$

то на підставі (40)

$$\frac{dW_p(s)}{ds} = -\Big(S_p + H\big(l_{-p}(s)\big)\Big)W_p(s), \quad s \geq 1. \tag{43}$$

Далі покажемо правильність першої частини твердження теореми 3, використавши теорему 9. Нехай виконується співвідношення (12). Розглянемо довільні числа $\alpha > 1$ і $M \geq 1$, для яких

$$\sigma(S_p) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > \alpha\}$$

і

$$\left\|e^{-sS_p}\right\|_{L(E,E)} \leq Me^{-\alpha s}, \quad s \geq 0. \tag{44}$$

Співвідношення (44) аналогічне (26). Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$, для якого виконується нерівність (27). Візьмемо таке число $s_* > 1$, щоб

$$\big\|H(l_{-p}(s))\big\|_{L(E,E)} < \varepsilon, \quad s \geq s_*.$$

Таке число існує завдяки (37). Тоді на підставі теореми 9 для функції $W_p(s)$, що задовольняє (43), виконується співвідношення

$$\big\|W_p(s)\big\|_{L(E,E)} \leq Me^{-(\alpha - M\varepsilon)(s-s_*)}\big\|W_p(s_*)\big\|_{L(E,E)}, \quad s \geq s_*,$$

аналогічне (29).

Звідси та з (41), (42) випливає, що

$$\big\|V_p(t)\big\|_{L(E,E)} \leq M\left(\frac{l_{p-1}(t_*)}{l_{p-1}(t)}\right)^{\alpha - M\varepsilon}\big\|V_p(t_*)\big\|_{L(E,E)}, \quad t \geq t_*, \tag{45}$$

де t_* — число, для якого $l_p(t_*) = s_*$.

Отже, на підставі (39) і (45) для функції $F(t)$ при $p \geq 2$ виконується співвідношення

$$\big\|F(t)\big\|_{L(E,E)} \leq M\,(l_{p-1}(t_*))^{\alpha - M\varepsilon}\frac{1}{\Pi_{p-2}(t)(l_{p-1}(t))^{\alpha - M\varepsilon}}\,\big\|V_p(t_*)\big\|_{L(E,E)}, \quad t \geq t_*. \tag{46}$$

Оскільки невласний інтеграл

$$\int\limits_{t_*}^{+\infty}\frac{1}{\Pi_{p-2}(t)(l_{p-1}(t))^{\alpha - M\varepsilon}}\,dt,$$

в якому $\alpha - M\varepsilon > 1$, збігається (за теоремою 7), то на підставі (46) збігається операторний невласний інтеграл

$$\int\limits_{t_*}^{+\infty} F(t)\,dt.$$

Збіжності цього інтеграла достатньо для збіжності інтеграла (8) (у випадку $p \geq 2$).

Збіжність інтеграла (8) у випадку $p = 1$ встановлюється аналогічним чином.

Далі покажемо правильність другої частини твердження теореми 3. Будемо вважати, що виконується співвідношення (13). Використаємо (40) і теорему 10.

Розглянемо довільне число $\beta \in (0,1)$, для якого

$$\sigma(S_p) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z < \beta\}.$$

Нехай M — таке додатне число, що

$$\big\|e^{sS_p}\big\|_{L(E,E)} \leq Me^{\beta s}, \quad s \geq 0.$$

Це співвідношення аналогічне (26). Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$, для якого виконуються нерівності (27) і

$$\big\|H(l_{-p}(s))\big\|_{L(E,E)} < \varepsilon, \quad s \geq s_{**},$$

де s_{**} — достатньо велике додатне число. Таке число існує завдяки (37). Тоді на підставі теореми 9 для функції $W_p(s)$, що задовольняє (43), виконується співвідношення

$$\big\|W_p(s)\big\|_{L(E,E)} \geq \frac{1}{M} e^{-(\beta+M\delta)(s-s_{**})} \big\|W_p(s_{**})\big\|_{L(E,E)}, \quad s \geq s_{**}, \tag{47}$$

аналогічне (33).

Зазначимо, що

$$\|W_p(s_{**})\|_{L(E,E)} \neq 0, \tag{48}$$

оскільки для кожного зафіксованого $t \geq 1$ оператор $F(t)$ має обернений неперервний оператор $(F(t))^{-1}$.

Із (47), (41) і (42) випливає, що

$$\|V_p(t)\|_{L(E,E)} \geq \frac{1}{M} \left(\frac{l_{p-1}(t_{**})}{l_{p-1}(t)} \right)^{\beta+M\delta} \|V_p(t_{**})\|_{L(E,E)}, \quad t \geq t_{**},$$

де t_{**} — число, для якого $l_p(t_{**}) = s_{**}$.

Отже, на підставі (39) і (45) для функції $F(t)$ при $p \geq 2$ виконується співвідношення

$$\big\|F(t)\big\|_{L(E,E)} \geq M \left(l_{p-1}(t_{**})\right)^{\beta+M\delta} \frac{1}{\Pi_{p-2}(t)(l_{p-1}(t))^{\beta+M\delta}} \big\|V_p(t_{**})\big\|_{L(E,E)}, \quad t \geq t_{**}, \tag{49}$$

до того ж на підставі (48)

$$\big\|V_p(t_{**})\big\|_{L(E,E)} \neq 0. \tag{50}$$

Оскільки невласний інтеграл

$$\int\limits_{t_{**}}^{+\infty} \frac{1}{\Pi_{p-2}(t)(l_{p-1}(t))^{\beta+M\delta}}\, dt,$$

в якому $\beta + M\delta < 1$, розбігається (за теоремою 7), то на підставі (49) і (50) розбігається операторний невласний інтеграл

$$\int\limits_{t_{**}}^{+\infty} F(t)\, dt.$$

Розбіжності цього інтеграла достатньо для розбіжності інтеграла (8) (у випадку $p \geq 2$).

Розбіжність інтеграла (8) у випадку $p = 1$ встановлюється аналогічним чином.

Теорему 3 доведено.

***Доведення теореми* 4.** Завдяки співвідношенню (12) та теоремі 3 невласний інтеграл (8) збігається. Оскільки також збігається невласний інтеграл (14), то за теоремою 5 збігається операторний ряд (9).

Аналогічно, завдяки співвідношенню (13) та теоремі 3 невласний інтеграл (8) розбігається. Оскільки невласний інтеграл (14) збігається, то за теоремою 5 операторний ряд (9) розбігається.

Теорему 4 доведено.

5. Приклади застосування теорем 3 і 4.

***Приклад* 1.** Дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} t^{-A}\, dt, \tag{51}$$

де $A \in L(E, E)$.

Для цього інтеграла, що є окремим випадком інтеграла (8), $F(t) = t^{-A}$ і для кожного зафіксованого $t > 1$ оператор $F(t)$ має обернений неперервний оператор $(F(t))^{-1} = t^{A}$. Виконання умови про оборотність $F(t)$ є необхідною для того, щоб можна було використовувати теорему 3 для дослідження збіжності інтеграла (51).

Оскільки

$$\frac{dF(t)}{dt} = -At^{-A-I}, \quad t > 1, \tag{52}$$

то згідно з (10)

$$S_1(t) = -t\,\frac{dF(t)}{dt}\,(F(t))^{-1} = -t\big(-At^{-A-I}\big)t^{A} = tt^{-I}A = A, \quad t > 1,$$

і, отже,

$$\lim_{t\to+\infty} S_1(t) = A.$$

За теоремою 3 для збіжності інтеграла (51) достатньо виконання співвідношення

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z > 1\}. \tag{53}$$

Це співвідношення також є необхідним для збіжності інтеграла (51). Справді, використаємо невласний інтеграл

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t}\,(\ln t)^{-A} dt, \tag{54}$$

що за теоремою 7 збігається лише у випадку виконання співвідношення (53). Оскільки

$$\int_e^{T} \frac{1}{t}\,(\ln t)^{-A} dt = \int_1^{\ln T} t^{-A} dt$$

для кожного $T \geq e$, то інтеграл (51) є збіжним тоді і тільки тоді, коли збіжним є інтеграл (54).

Отже, інтеграл (51) є збіжним лише у випадку виконання співвідношення (53).

***Приклад* 2.** Дослідимо на збіжність операторний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-A}, \tag{55}$$

де A — такий оператор, як і в інтегралі (51).

Вважатимемо, що для A виконується співвідношення (53).

Покажемо, що ряд (55) є збіжним.

Оскільки множина $\sigma(A)$ обмежена і замкнена, а множина $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 1\}$ відкрита, то завдяки (51) для деякого $\alpha > 1$ виконується співвідношення

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > \alpha\}.$$

Тоді за теоремою Данфорда про відображення спектра [10, с. 609]

$$\sigma(-A) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} < -\alpha\}. \tag{56}$$

Використаємо функцію $F(t)$, що розглядалась у прикладі 1. Оскільки згідно з (52), (56) і теоремою 8 для деякого числа $M \geq 1$ і всіх $t > 1$ справджуються співвідношення

$$\left\| \frac{dF(t)}{dt} \right\|_{L(E,E)} \leq \|A\|_{L(E,E)} \left\| t^{-A-I} \right\|_{L(E,E)} = \|A\|_{L(E,E)} \left\| t^{-A} \right\|_{L(E,E)} t^{-1} =$$

$$= \|A\|_{L(E,E)} \left\| e^{(\ln t)(-A)} \right\|_{L(E,E)} t^{-1} \leq \|A\|_{L(E,E)} M e^{(\ln t)(-\alpha)} t^{-1} =$$

$$= \frac{\|A\|_{L(E,E)} M}{t^{1+\alpha}} \leq \frac{\|A\|_{L(E,E)} M}{t^2},$$

то на підставі теореми про скінченний приріст для всіх $t \geq 2$

$$\left\| F(t) - F([t]) \right\|_{L(E,E)} \leq$$

$$\leq \sup_{[t] \leq \theta \leq t} \left\| \frac{dF(\theta)}{d\theta} \right\|_{L(E,E)} (t - [t]) \leq \sup_{[t] \leq \theta \leq t} \frac{\|A\|_{L(E,E)} M}{\theta^2} \leq \frac{\|A\|_{L(E,E)} M}{(t-1)^2}.$$

Звідси з урахуванням збіжності інтеграла

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

випливає збіжність інтеграла

$$\int\limits_2^{+\infty} (F(t) - F([t]))dt.$$

Тому на підставі теореми 4 у випадку виконання співвідношення (53) ряд (55) збігається.

Зазначимо, що виконання співвідношення (53) є не лише достатнім, а і необхідним (див. [11]) для збіжності ряду (55).

6. Додаткові зауваження та літературні посилання. Наведені в статті результати про збіжність операторних невласних інтегралів і рядів є новими.

Теореми 3 і 4 залишаються правильними, якщо в (10) операторну функцію

$$S_1(t) = -t\, \frac{dF(t)}{dt}\, (F(t))^{-1}$$

замінити функцією

$$S_1(t) = -t\,(F(t))^{-1}\,\frac{dF(t)}{dt}.$$

Інтегральна ознака Маклорена – Коші [3] є окремим випадком теореми 5.

Твердження статті є правильними й у випадку дійсного простору E. Щоб у цьому переконатися, потрібно використати комплексифікацію цього простору та комплексне розширення відповідних операторів (див., наприклад, [12, с. 477; 13, с. 19 – 22]).

Ряд (55) у випадку $E = \mathbb{R}$ (тоді $A \in \mathbb{R}$), відомий як *узагальнений гармонічний ряд*, збігається лише при $A > 1$ (див. [3, с. 263, 264]), що узгоджується з прикладом 2. Для збіжності цього ряду у випадку $E = \mathbb{C}$ (тоді $A \in \mathbb{C}$) необхідно і достатньо, щоб $\mathrm{Re}\, A > 1$, що також узгоджується з прикладом 2.

Збіжність операторних рядів досліджувалась автором також у [14 – 16].

Література

1. В. Е. Слюсарчук, *Некоторые признаки сходимости числовых рядов*, Математика сегодня ’90, вып. 6, 94 – 105 (1990).
2. В. Ю. Слюсарчук, *Загальні теореми про збіжність числових рядів*, Вид-во Рівнен. техн. ун-ту, Рівне (2001).
3. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 2, Наука, Москва (1966).
4. В. Ю. Слюсарчук, *Нова інтегральна ознака збіжності рядів*, Мат. студ., **41**, № 2, 198 – 200 (2014).
5. В. Ю. Слюсарчук, *Інтегральні ознаки збіжності рядів*, Буков. мат. журн., **2**, № 2-3, 208 – 213 (2014).
6. В. А. Зорич, *Математический анализ*, ч. II, Наука, Москва (1984).
7. В. Ю. Слюсарчук, *Операторний аналог ознаки Бертрана*, Мат. студ., **35**, № 2, 181 – 195 (2011).
8. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
9. В. Лакшмикантам, С. Лила, А. А. Мартынюк, *Устойчивость движения: метод сравнения*, Наук. думка, Киев (1991).
10. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, т. I, Изд-во иностр. лит., Москва (1962).
11. В. Ю. Слюсарчук, *Умови збіжності операторного ряду* $\sum_{n=1,\infty} n^{-A}$, Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика, вип. 485, 113 – 117 (2009).
12. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
13. В. Ю. Слюсарчук, *Диференціальні рівняння в банаховому просторі*, Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, Рівне (2006).
14. В. Е. Слюсарчук, *Операторный аналог признака д’Аламбера*, Математика сьогодні ’09, вип. 15, 101 – 115 (2009).
15. В. Ю. Слюсарчук, *Операторний аналог ознаки Коші*, Мат. студ., **33**, № 1, 97 – 100 (2010).
16. В. Ю. Слюсарчук, *Узагальнення ознак Абеля та Діріхле*, Укр. мат. журн., **72**, № 4, 527 – 539 (2020).

Одержано 30.04.20