DOI: 10.37863/umzh.v73i1.6113

УДК 517.937, 519.21

В. А. Літовченко (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ФЛУКТУАЦІЇ ХОЛЬЦМАРКА НЕСТАЦІОНАРНИХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ПОЛІВ

We construct the Holtsmark distributions of non-stationary fluctuations of local interaction of moving objects in a system where the gravitational influence is governed by a power law. We find a pseudodifferential equation with a Riesz operator of fractional differentiation corresponding to this process. We also elucidate the general nature of stable symmetric random Levy processes.

Побудовано розподіли Хольцмарка нестаціонарних флуктуацій локальної взаємодії рухомих об'єктів системи із гравітаційним впливом, що підпорядкований степеневому закону. Знайдено псевдодиференціальне рівняння з оператором Рісса дробового диференціювання, яке відповідає цьому процесу. З'ясовано загальну природу симетричних стійких випадкових процесів Леві.

1. Вступ. Однією з основних проблем небесної механіки є аналіз природи сили взаємодії між об'єктами в тій чи іншій зірковій системі. Сила $\mathcal{F}$, що діє на конкретну зірку системи, має дві складові: перша K — це вплив усієї системи в цілому і друга F — локальний вплив безпосереднього оточення: $\mathcal{F} = K + F$.

Вплив усієї системи можна описати за допомогою гравітаційного потенціалу $\mathcal{R}(r;t)$ [1], одержаного традиційно інтегруванням зваженої густини $n(r;m;t)$, яка характеризує середній просторовий розподіл зірок різної маси m у момент часу t. Така сила K, віднесена до одиниці маси, що діє на розглядувану зірку $Z(0)$ з боку системи (як цілого), визначається формулою

$$K(r;t) = -\operatorname{grad}\mathcal{R}(r;t).$$

Сила $K(r;t)$ — функція з повільною зміною у просторі й часі, оскільки відповідний потенціал $\mathcal{R}(r;t)$ характеризує „згладжений" розподіл матерії в зірковій системі. Інша ж сила $F(t)$, віднесена до одиниці маси, має відносно швидкі, різкі зміни, спричинені миттєвими змінами локального розподілу зірок з оточення Z у момент часу t. Величина $F(t)$ піддається флуктуаціям, тому можна говорити лише про її ймовірнісні значення.

Дослідженням статистичних властивостей $F(t)$ займався Ж. Хольцмарк [1, 2]. Його дослідження ґрунтуються на класичному гравітаційному законі Ньютона „обернених квадратів", згідно з яким

$$F(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} F_j = G\sum_{j=1}^{N(t)} \frac{m_j}{|r_j|^2} r_j^{\circ},$$

де G — гравітаційна стала, m_j — маса типової зірки „поля", r_j — радіус-вектор її положення відносно розглядуваної зірки Z, розміщеної у початку координат, $r_j^{\circ} := r_j/|r_j|$ — орт вектора r_j, а $N(t)$ — кількість зірок, що на момент t формують локальне оточення Z. Припустивши сталість середньої густини $n(r;m;t) \equiv n$ просторового розподілу зірок, а також виконання рівності

$$N = \frac{4}{3}\pi R^3 n \quad (\forall R > 0),$$

Хольцмарк класичними засобами теорії ймовірностей у поєднанні з інтегральним численням знайшов стаціонарний розподіл $W(F)$ величини F у вигляді

$$W(F) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F)-a|\xi|^{3/2}} d\xi \equiv \mathbb{F}^{-1}[e^{-a|\xi|^{3/2}}](F).$$

Тут $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у $\mathbb{R}^3$, $|x| := (x,x)^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}^3$; $a := \dfrac{4}{15}(2\pi G)^{3/2} n \langle m^{3/2} \rangle$ — коефіцієнт флуктуацій, в якому $\langle m^{3/2} \rangle$ — середнє значення величини $m^{3/2}$, що відповідає розглядуваному закону розподілу зірок у зірковій системі, а $\mathbb{F}$ — оператор перетворення Фур'є.

Даний розподіл Хольцмарка відноситься до класу розподілів П. Леві

$$\mathcal{L}_\alpha(x) = \mathbb{F}^{-1}[e^{-b|\xi|^\alpha}](x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

симетричних стійких випадкових процесів [3]. Те, що $\mathcal{L}_\alpha(\cdot)$ лише при $\alpha \in (0;2]$ є функцією розподілу ймовірностей, було остаточно встановлено П. Леві в [4].

Яскравими представниками цього класу є також класичні розподіли Гаусса ($\alpha = 2$) і Коші ($\alpha = 1$). У сучасній літературі наведено багато прикладів реальних застосувань розподілів Хольцмарка, Коші, Гаусса та Парето в астрономії, ядерній фізиці, економіці, соціології, в промисловій та військовій галузях тощо [5 – 10]. Кожне з цих застосувань характеризує стохастичні особливості розподілів Леві при тому чи іншому значенні α.

Однак, крім індивідуальних характеристик, симетричні стійкі випадкові процеси Леві мають спільну природу. У даній роботі встановлено, що кожен такий процес Леві при $\alpha \in (0;2)$ можна трактувати як процес локального впливу рухомих об'єктів у системі, в якій взаємодія між масами відбувається згідно з певним степеневим законом $(\cdot)^{-\beta}$. Зокрема, класичному процесу Хольцмарка ($\alpha = 3/2$) відповідає взаємодія з $\beta = 2$ (випадок ньютонівської гравітації), а процесу Коші — взаємодія з показником $\beta = 3$. Тут також розглянуто задачу Хольцмарка в загальній постановці та одержано псевдодиференціальне рівняння (ПДР) з оператором Рісса дробового диференціювання, функцією Гріна задачі Коші для якого є відповідний нестаціонарний розподіл Хольцмарка. Наявність цього рівняння відкриває широкі можливості для дослідження процесів Хольцмарка в областях з краями засобами теорії крайових задач для ПДР.

2. Фрактальні розподіли Хольцмарка. Розглянемо зіркову систему, в якій взаємодія між масами підпорядкована потенціалу М. Рісса [11], тобто гравітаційний вплив між її двома довільними зірками маси M і m описується законом

$$F = G\frac{Mm}{|r|^\beta} r^\circ, \quad \beta > 0, \tag{1}$$

де G — відповідна гравітаційна стала, а r — вектор відстані між цими зірками. Розвиваючи ідею Хольцмарка, знайдемо нестаціонарний розподіл $W_\beta(F(t))$ для сили $F(t)$, яка діє на одиницю маси зірки Z у момент часу t внаслідок гравітації, спричиненої зірками з її близького оточення.

Припустимо також, що розподіл зірок в околі Z піддається флуктуаціям і зірки різної маси m зустрічаються у зірковій системі згідно з деяким цілком визначеним, емпірично встановленим законом. При цьому в кожен момент часу t флуктуації густини зірок підпорядковані умові сталості їхньої середньої густини на одиницю об'єму:

$$n(r;m;t) \equiv n(t).$$

Нехай розглядувана зірка Z знаходиться у початку координат системи, а її сферичний окіл радіуса R у момент часу t містить $N(t)$ зірок. Тоді, згідно з зазначеним вище,

$$F(t) = G\sum_{j=1}^{N(t)} \frac{m_j}{|r_j|^{\beta+1}} r_j \equiv \sum_{j=1}^{N(t)} F_j$$

і

$$N(t) = \frac{4}{3}\pi R^3 n(t). \tag{2}$$

Спочатку для фіксованого t розглянемо розподіл $W_{\beta,N(t)}\big(F(t)\big)$ у центрі сферичного околу радіуса R, який охоплює $N(t)$ зірок системи, і знайдемо ймовірність $W_{\beta,N(t)}\big(F_\circ(t)\big)dF_\circ(t)$ того, що величина $F(t)$ потрапляє в куб $[F_\circ(t); F_\circ(t)+dF_\circ(t)] \subset \mathbb{R}^3$. Застосувавши відомий метод характеристичних функцій, одержимо

$$W_{\beta,N(t)}\big(F_\circ(t)\big) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F_\circ(t))} A_{N(t)}(\xi)d\xi,$$

де

$$A_{N(t)}(\xi) := \prod_{j=1}^{N(t)} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,F_j)} \tau_j(r_j;m_j;t)dr_j \right) dm_j.$$

Тут $\mathbb{K}_R(0)$ — куля радіуса R з центром у початку координат, а $\tau_j(r_j;m_j;t)$ — розподіл ймовірності того, що в момент часу t j-та зірка має масу m_j і знаходиться у положенні r_j. Якщо тепер зважити на те, що мають місце лише флуктуації, сумісні з просторовою сталістю середньої густини, то

$$\tau_j(r_j;m_j;t) = \frac{3\tau(m;t)}{4\pi R^3},$$

де $\tau(m;t)$ — частота, з якою зустрічаються зірки різної маси в момент часу t.

Звідси приходимо до зображення

$$A_{N(t)}(\xi) = \left(\frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,\eta)} \tau(m;t)dr \right) dm \right)^{N(t)},$$

в якому

$$\eta := Gmr/|r|^{\beta+1}. \tag{3}$$

Спрямувавши тепер $R \to +\infty$ і $N(t) \to +\infty$, згідно з (2) дістанемо

$$W_\beta(F(t)) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F(t))} A(\xi;t)d\xi, \tag{4}$$

де

$$A(\xi;t) := \lim_{R\to\infty}\left[\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,\eta)}\tau(m;t)dr\right)dm\right]^{4\pi R^3 n(t)/3}.$$

Оскільки для кожного t

$$\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} \tau(m;t)dr\right)dm = 1,$$

то

$$A(\xi;t) = \lim_{R\to\infty}\left[1-\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} (1-e^{i(\xi,\eta)})\tau(m;t)dr\right)dm\right]^{4\pi R^3 n(t)/3}. \qquad (5)$$

Далі, з огляду на абсолютну збіжність у (5) інтеграла зі змінною інтегрування r в усьому просторі $\mathbb{R}^3$ при $\beta > \dfrac{3}{2}$ рівність (5) можна записати у вигляді

$$A(\xi;t) = \lim_{R\to\infty}\left[1-\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} (1-e^{i(\xi,\eta)})\tau(m;t)dr\right)dm\right]^{4\pi R^3 n(t)/3}$$

й одержати зображення

$$A(\xi;t) = e^{-n(t)B_\beta(\xi;t)}, \qquad (6)$$

в якому

$$B_\beta(\xi;t) := \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} (1-e^{i(\xi,\eta)})\tau(m;t)dr\right)dm.$$

Перейшовши у внутрішньому інтегралі виразу з попередньої рівності від змінної інтегрування r до змінної η згідно з правилом (3), а відтак до сферичної системи координат з віссю аплікат, спрямованою в напрямку вектора ξ, знайдемо

$$B_\beta(\xi;t) = \frac{4\pi(G|\xi|)^{3/\beta}\langle m^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}(\rho-\sin\rho)\rho^{-2-3/\beta}d\rho.$$

Зазначимо, що інтеграл з останньої рівності збігається лише при $\beta > \dfrac{3}{2}$. Зінтегрувавши його частинами, прийдемо до зображення

$$B_\beta(\xi;t) = \frac{4\beta\pi \mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)}(G|\xi|)^{3/\beta}\langle m^{3/\beta}\rangle, \quad t\ge 0, \quad \xi\in\mathbb{R}^3, \quad \beta > 3/2, \qquad (7)$$

в якому

$$\mathrm{I}(\beta) := \begin{cases} \dfrac{\beta}{3-\beta}\Gamma(2-3/\beta)\cos\dfrac{(2-3/\beta)\pi}{2}, & \dfrac{3}{2} < \beta < 3, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \beta = 3, \\ \Gamma(1-3/\beta)\sin\dfrac{(1-3/\beta)\pi}{2}, & \beta > 3 \end{cases}$$

(тут $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера).

Об'єднавши рівності (4), (6) і (7), остаточно знайдемо

$$W_\beta(F(t)) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F(t))}e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}d\xi,$$

де

$$a_\beta(t) := \frac{4\beta\pi\mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)}G^{3/\beta}n(t)\langle m^{3/\beta}\rangle.$$

Отже, правильним є таке твердження.

Теорема 1. *При раніше зазначених припущеннях для кожного $\beta > 3/2$ функція*

$$W_\beta(F(t)) = \mathbb{F}^{-1}\Big[e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}\Big](F;t) \tag{8}$$

є розподілом імовірностей сили $F(t)$ локального впливу рухомих об'єктів у системі з взаємодією, що відбувається згідно зі степеневим законом (1).

Позначимо $\mathcal{H}_\gamma(F;t) := W_\beta(F(t))$, де $\gamma := 2/\beta$. Функцію $\mathcal{H}_\gamma(\cdot;\cdot)$ назвемо розподілом Хольцмарка порядку γ флуктуацій нестаціонарних гравітаційних полів. Класичній ситуації, розглянутій Хольцмарком, відповідає $\beta = 2$; у цьому випадку порядок розподілу $\gamma = 1$. З огляду на співвідношення $\beta > 3/2$ це єдиний випадок цілого порядку γ, решта можливих значень γ мають ненульову дробову частину: $\gamma \in (0;4/3)$.

3. Зв'язок з ПДР. Дослідження флуктуацій локальної взаємодії рухомих об'єктів, особливо в обмеженому середовищі з тими чи іншими умовами на межі, хотілося б проводити шляхом зведення до розв'язування відповідних крайових задач для диференціальних чи псевдодиференціальних рівнянь. Це дозволило б задіяти розвинений обчислювальний апарат теорії крайових задач і скористатися відомими її результатами. У зв'язку з цим виникає потреба в одержанні відповідного диференціального рівняння, яке адекватно відображає досліджуваний процес. Спробуємо за певних умов вивести це рівняння, „відштовхуючись" від функції розподілу $\mathcal{H}_\gamma$. Для цього попередньо з'ясуємо властивості цієї функції.

Припускатимемо тут, що коефіцієнт $a_\beta(\cdot)$ — додатна, неперервно диференційовна функція на проміжку $(0;T]$. Безпосередньо з [12, 13] випливає, що для всіх $\gamma \in (0;4/3)$ функція $\mathcal{H}_\gamma(x;t)$ на множині $\mathbb{R}^3\times(0;T]$ диференційовна по t і нескінченно диференційовна за змінною x, причому для її похідних виконуються оцінки

$$\begin{gathered} |\partial_x^k\mathcal{H}_\gamma(x;t)| \le c_1 t(t^{\frac{2}{3\gamma}} + |x|)^{-(3+|k|+\frac{3\gamma}{2})}, \\ |\partial_t\partial_x^k\mathcal{H}_\gamma(x;t)| \le c_2 t^{\frac{2}{\gamma}-1}(t^{\frac{2}{3\gamma}} + |x|)^{-(3+|k|+\frac{3\gamma}{2})} \end{gathered} \tag{9}$$

з деякими додатними сталими c_1 і c_2.

Оцінка (9) забезпечує належність $\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t)$ до $L_1(\mathbb{R}^3)$ при кожному фіксованому $t \in (0;T]$, що в свою чергу гарантує існування перетворення Фур'є функції $\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t)$ та виконання рівності

$$\mathbb{F}[\mathcal{H}_\gamma(x;t)](\xi;t) = e^{-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3\gamma}{2}}}, \quad t \in (0;T], \quad \xi \in \mathbb{R}^3. \tag{10}$$

Класичними засобами переконуємось у правильності рівності

$$\partial_t \mathcal{H}_\gamma(x;t) = -\frac{a'_\beta(t)}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{\frac{3\gamma}{2}} e^{-i(x,\xi) - a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3\gamma}{2}}} d\xi, \quad t \in (0;T], \quad \xi \in \mathbb{R}^3,$$

з якої, враховуючи (10), знаходимо

$$\partial_t \mathcal{H}_\gamma(x;t) = -a'_\beta(t)\mathbb{F}^{-1}\big[|\xi|^{\frac{3\gamma}{2}}\mathbb{F}[\mathcal{H}_\gamma](\xi;t)\big](x;t), \quad t \in (0;T], \quad \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Отже, розподіл Хольцмарка $\mathcal{H}_\gamma$ є розв'язком рівняння

$$\partial_t u(x;t) + a'_\beta(t) A_\nu u(\xi;t) = 0, \quad t \in (0;T], \quad \xi \in \mathbb{R}^3, \tag{11}$$

з оператором Рісса A_ν дробового диференціювання порядку $\nu := \dfrac{3\gamma}{2}$ [14].

З'ясуємо питання існування граничного значення розподілу $\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t)$ у точці $t = 0$.

Спочатку розглянемо випадок $a_\beta(0) \neq 0$. Згідно з рівністю (10) та відомою формулою перетворення Фур'є згортки елементів класу Лебега $L_1(\mathbb{R}^3)$ одержуємо

$$\mathcal{H}_\gamma(x;t) = \big(G_\nu * \hat{\mathcal{H}}_\gamma\big)(x;t), \quad t \in (0;T], \quad \xi \in \mathbb{R}^3,$$

де $\hat{\mathcal{H}}_\gamma(\cdot) := \mathcal{H}_\gamma(\cdot;0)$ — відповідний стаціонарний розподіл Хольцмарка, а

$$G_\nu(\cdot;t) := \mathbb{F}^{-1}\left[e^{-\int_0^t a'_\beta(\tau)d\tau|\xi|^\nu}\right](\cdot;t).$$

Для кожної неперервної обмеженої на $\mathbb{R}^3$ функції $\varphi(\cdot)$ виконується граничне співвідношення [13]

$$\big(G_\nu * \varphi\big)(\cdot;t) \underset{t\to+0}{\to} \varphi(\cdot). \tag{12}$$

Звідси, враховуючи нескінченну диференційовність та обмеженість на $\mathbb{R}^3$ функції $\hat{\mathcal{H}}_\gamma(\cdot)$, приходимо до виконання співвідношення

$$\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t) \underset{t\to+0}{\to} \hat{\mathcal{H}}_\gamma(\cdot). \tag{13}$$

Таким чином, розподіл $\mathcal{H}_\gamma(x;t)$ — класичний розв'язок задачі Коші (11), (13).

Нехай тепер $a_\beta(0) = 0$, тоді безпосередньо з (10) випливає рівність

$$\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t) = G_\nu(\cdot;t), \quad t \in (0;T]. \tag{14}$$

Зазначимо, що співвідношення (12) характеризує властивість „δ-подібності" функції $G_\nu(\cdot;t)$ у просторі S' розподілів Шварца [15]:

$$G_\nu(\cdot;t) \underset{t\to+0}{\to} \delta(\cdot) \tag{15}$$

(тут $\delta(\cdot)$ — дельта-функція Дірака). Тому при $a_\beta(0) = 0$ розподіл Хольцмарка $\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t)$ — розв'язок задачі Коші (11), (15), який у звичайному розумінні задовольняє рівняння (11), а початкову умову (15) — у сенсі слабкої збіжності у просторі S'. Такий розв'язок G_ν називають функцією Гріна задачі Коші для рівняння (11).

Підсумуємо вищезазначене у вигляді такого твердження.

Теорема 2. *Нехай $\beta > 3/2$ і $a_\beta(\cdot)$ — додатна, неперервно диференційовна функція на проміжку $(0;T]$. Тоді при $a_\beta(0) \neq 0$ відповідний розподіл Хольцмарка $\mathcal{H}_{2/\beta}(\cdot;t)$ на множині $\mathbb{R}^3 \times (0;T]$ є класичним розв'язком задачі Коші* (11), (13). *У випадку $a_\beta(0) = 0$ $\mathcal{H}_{2/\beta}(\cdot;t)$ — функція Гріна цієї задачі.*

Зауваження . Рівність (14) розкриває зміст функції Гріна задачі Коші для рівняння (11): G_ν — первинний розподіл Хольцмарка локального впливу на розглядуваний об'єкт з боку його рухомого оточення, який характеризує цей процес із самого початку його зародження, тобто з тієї миті, коли в оточенні об'єкта вперше з'явилися елементи локального впливу.

Дослідження функції Гріна задачі Коші для ПДР вигляду (11) були започатковані С. Д. Ейдельманом і Я. М. Дрінем на початку 80-х років минулого століття [16, 17]. Вони запропонували метод побудови й дослідження функції G_ν, який ґрунтується на перетворенні Фур'є, та одержали такі оцінки:

$$|\partial_x^k G_\nu(x;t)| \le c_1 t(t^{1/\nu} + |x|)^{-(n+|k|+[\nu])}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad t \in (0;T], \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{16}$$

(тут $[\cdot]$ — ціла частина числа). Проте цей метод накладає обмеження на порядок ν ПДР: $\nu > 1$.

Точну асимптотичну поведінку функції Гріна $G_\nu(\cdot;t)$ в околі нескінченно віддалених точок встановив М. В. Федорюк у [18]:

$$G_\nu(\cdot;t) \sim |\cdot|^{-n-\nu}, \quad t > 0. \tag{17}$$

Згодом W. R. Schneider [19], ефективно використавши перетворення Мелліна, виразив функцію $G_\nu(\cdot;t)$ через спеціальні H-функції Фокса і, як наслідок, одержав асимптотику (17). Зазначимо, що задовго до появи статті [18] асимптотику (17) для ПДР (11) при $a_\beta(t) = t$ і $\nu \in (0;1]$ описали R. M. Blumenthal і R. K. Getoor у роботі [20].

Новий підхід до дослідження властивостей функції $G_\nu(\cdot;t)$, який базується на використанні елементів теорії узагальнених функцій і гармонічного аналізу, застосував А. Н. Кочубей [21]. Він уперше одержав оцінки (16), в яких $[\nu]$ замінено на ν, у випадку, коли розмірність просторової змінної більша за одиницю і $\nu \ge 1$.

У працях [12, 13] автор, розвиваючи ідею з [21], поширив оцінки (16) на випадок $\nu > 0$.

Література

1. S. Chandrasekhar, *Stohastic problems in physics and astronomy*, Rev. Modern Phys., **15**, № 1, 1 – 89 (1943).
2. J. Holtsmark, *Über die Verbreiterung von Spektrallinier*, Ann. Phys., **58**, 577 – 630 (1919).
3. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, Москва (1983).
4. P. Levy, *Calcul des probabilities*, Gauthier-Villars, Paris (1925).
5. B. Mandelbrot, *The Pareto – Levy law and the distribution of income*, Int. Econ. Rev., **1**, 79 – 106 (1960).
6. И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров*, Физматгиз, Москва (1963).
7. М. Кац, *Вероятность и смежные вопросы в физике*, Мир, Москва (1965).
8. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*: в 2 т. Т. 2, Мир, Москва (1984).

9. А. Ф. Никифоров, В. Г. Новиков, В. Б. Уваров, *Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния*, Физматлит, Москва (2000).
10. Т. А. Агекян, *Теория вероятностей для астрономов и физиков*, Наука, Москва (1974).
11. M. Riesz, *Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green*, C. R. Congr. Intern. Math. Oslo, **2**, 62 – 63 (1936).
12. В. А. Літовченко, *Задача Коші з оператором Рісса дробового диференціювання*, Укр. мат. журн., **57**, № 12, 1653 – 1667 (2005).
13. В. А. Литовченко, *Задача Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных систем с негладкими символами*, Сиб. мат. журн., **49**, № 2, 375 – 394 (2008).
14. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).
15. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, Москва (1958).
16. С. Д. Эйдельман, Я. М. Дринь, *Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений*, Приближенные методы математического анализа, 60 – 69 (1974).
17. Я. М. Дрінь, *Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій*, Доп. АН УРСР, сер. А, № 1, 19 – 21 (1974).
18. М. В. Федорюк, *Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения*, Дифференц. уравнения, **14**, № 7, 1296 – 1301 (1978).
19. W. R. Schneider, *Stable distributions: Fox function representation and generalization*, Lect. Notes Phys., **262**, 497 – 511 (1986).
20. R. M. Blumenthal, R. K. Getoor, *Some theorems on stable processes*, Trans. Amer. Math. Soc., **95**, 263 – 273 (1960).
21. А. Н. Кочубей, *Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы*, Изв. АН СССР, сер. мат., **52**, № 5, 909 – 934 (1988).

Одержано 10.05.20,
після доопрацювання — 07.09.20