DOI: 10.37863/umzh.v74i1.6133

УДК 517.518:519.652

М. М. Пагіря (Ужгород. нац. ун-т, Мукачів. держ. ун-т)

ПРО НУЛІ МНОГОЧЛЕНІВ ЧИСЕЛЬНИКА І ЗНАМЕННИКА ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ ТІЛЕ

We prove that the polynomials of canonical numerators and denominators of the interpolation and approximation convergents of Thiele's continued fractions have no common zeros. It is established that the convergents of Thiele's continued fraction form a staircase sequence of normal Padé approximants. The region of zeros of the denominator polynomial of the convergent of Thiele's continued fraction is also determined.

Доведено, що многочлени канонічних чисельників і знаменників підхідних дробів інтерполяційного та апроксимаційного ланцюгових дробів Тіле не мають спільних нулів. Обґрунтовано, що підхідні дроби ланцюгового дробу Тіле утворюють східчасту послідовність нормальних апроксимант Паде. Знайдено область, якій належать нулі многочлена знаменника підхідного дробу ланцюгового дробу Тіле.

1. Вступ. Функція однієї дійсної або комплексної змінної може бути наближена многочленом, сплайном, апроксимантою Паде, ланцюговим дробом тощо.

Відомо, що перші роботи з інтерполяції функцій многочленами були написані Ґреґорі та Ньютоном ще наприкінці 17-го століття. Подальший розвиток теорії інтерполяції функцій многочленами пов'язаний з роботами Уорінга, Лагранжа, Ойлера, Чебишова, Маркова, Бореля, Рунге, Бернштейна, Фабера, Марцинкевича та багатьох інших математиків.

Уперше задачу інтерполяції функцій ланцюговими дробами в 1811 та 1815 – 1817 роках досліджував Вронський [1, 2]. Ці роботи залишилися непоміченими, оскільки в монографіях Тіле [3] та Ньорлунда [4], де задачу інтерполяції досліджено ґрунтовно, немає посилання на ці дослідження. Єдина згадка про роботи Вронського міститься в книзі [5], яка присвячена історії ланцюгових дробів та апроксимацій Паде.

Не дивлячись на те, що інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле можна знайти в підручниках [6 – 8] і монографіях [9 – 12], кількість робіт з інтерполяції ланцюговими дробами та методів розвинення функцій у ланцюгові дроби значно менша за кількість робіт з теорії наближення функцій многочленами, сплайнами чи апроксимантами Паде. Залишається значна кількість невивчених задач в теорії наближень ланцюговими дробами, частина з яких стосується лише ланцюгових дробів.

У даній роботі розглянуто задачу про нулі канонічних чисельника і знаменника інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле та ланцюгового дробу Тіле. Зокрема, доведено, що многочлени чисельника і знаменника не мають спільних нулів. Обґрунтовано, що підхідні дроби ланцюгового дробу Тіле, в який розвинуто функцію за допомогою формули Тіле, утворюють східчасту послідовність нормальних апроксимант Паде. Встановлено область нулів многочлена знаменника підхідного дробу ланцюгового дробу Тіле.

2. Ланцюгові дроби. Наведемо необхідні відомості з теорії ланцюгових дробів.

Означення 1 [13]. *Нескінченний ланцюговий дріб — це трійка* $\left[\{a_k\}_1^\infty, \{b_k\}_0^\infty, \{D_k\}_0^\infty\right]$ *послідовностей, де елементи* $b_0,\ a_k,\ b_k,\ a_k \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$, *— комплексні числа, а* $D_0,\ D_k,\ k \in \mathbb{N}$, *— елементи з розширеної комплексної площини* $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *які визначено таким чином: якщо* *задано послідовність перетворень Мебіуса* $s_0(w) := b_0 + w,\ s_k(w) := a_k/(b_k + w),\ k \in \mathbb{N}$, *то* $D_k := s_0 \circ s_1 \circ \ldots \circ s_k(0)$.

Із означення випливає, що скінченний ланцюговий дріб D_n — це вираз вигляду

$$D_n = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}},$$

який коротко записують так:

$$D_n = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots + \frac{a_n}{b_n}. \tag{1}$$

Аналогічно, для нескінченного ланцюгового дробу використовують скорочений запис

$$D = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots + \frac{a_k}{b_k +} \cdots. \tag{2}$$

Скінченний ланцюговий дріб (1) називається n-м підхідним дробом, n-м наближенням ланцюгового дробу (2). Послідовності підхідних дробів $\{D_n\}$ ставлять у відповідність послідовності комплексних чисел $\{P_n\}$ і $\{Q_n\}$, які визначаються системою лінійних різницевих рівнянь другого порядку [9]

$$Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = P_{-1} = 1, \quad P_0 = b_0, \quad P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2},$$
$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Числа P_n і Q_n називаються, відповідно, n-м канонічним чисельником і n-м канонічним знаменником підхідного дробу (1), $D_n = P_n/Q_n$. Канонічні чисельники і знаменники підхідних дробів D_n і D_{n-1} задовольняють детермінантну формулу [9]

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} a_i. \tag{3}$$

Ланцюговий дріб (1) також можна подати у вигляді відношення двох континуант.

Означення 2 [14]. *Визначник вигляду*

$$\mathcal{H}_n^{\langle i \rangle} = \begin{vmatrix} b_i & a_{i+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & b_{i+1} & a_{i+2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_{i+2} & a_{i+3} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{i+3} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & b_n \end{vmatrix}, \quad i = \overline{0, n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

називається континуантою і скорочено записується таким чином:

$$\mathcal{H}_n^{\langle i\rangle} = \mathcal{K}\begin{pmatrix} & a_{i+1}, & a_{i+2}, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n \\ b_i, & b_{i+1}, & b_{i+2}, & \ldots, & b_{n-1}, & b_n \end{pmatrix}.$$

Відомо [15], що виконується співвідношення

$$D_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\mathcal{H}_n^{\langle 0\rangle}}{\mathcal{H}_n^{\langle 1\rangle}}. \tag{4}$$

Континуанта має таку властивість.

Теорема 1 [16]. *Якщо елемент a_k континуанти $\mathcal{H}_n^{\langle i\rangle}$, де $i < k \le n$, дорівнює нулю, а всі решта елементів $\mathcal{H}_n^{\langle i\rangle}$ відмінні від нуля, то $\mathcal{H}_n^{\langle i\rangle} = \mathcal{H}_n^{\langle k\rangle}\cdot\mathcal{H}_{k-1}^{\langle i\rangle}$.*

3. Нулі многочленів чисельника і знаменника інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле. Нехай функцію f визначено на компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$. На множині інтерполяційних вузлів $Z = \{z_i : z_i\in\mathcal{Z},\ z_i\ne z_j,\ i\ne j,\ i,j=\overline{0,n}\}$ функція набуває значення $w_i = f(z_i)$, $i=\overline{0,n}$.

Функція f на $\mathcal{Z}$ наближається інтерполяційним ланцюговим дробом Тіле (Т – ІЛД) [3, 4] вигляду

$$D_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n}\frac{z-z_{i-1}}{b_i},\quad b_i\in\mathbb{C},\quad i=\overline{0,n}. \tag{5}$$

Коефіцієнти b_i, $i=\overline{0,n}$, Т – ІЛД знаходять із інтерполяційної умови $D_n(z_i)=w_i$, де $i=\overline{0,n}$, або через обернені поділені різниці, або через обернені різниці, або за рекурентним співвідношенням у вигляді ланцюгового дробу [4, 17].

Відомо, що чисельник $P_n(z)$ і знаменник $Q_n(z)$ Т – ІЛД — многочлени, степені яких задовольняють нерівності $\deg P_n(z)\le[(n+1)/2]$, $\deg Q_n(z)\le[n/2]$. Многочлени $P_n(z)$ і $Q_n(z)$ визначаються через елементи Т – ІЛД b_0, b_i, $z-z_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$, за допомогою формули Ойлера – Міндінґа [17, 18]

$$\begin{aligned} P_n(z) = B_0^{[n]}\Bigg(1 &+ \sum_{i=0}^{n-1}X_i(z) + \sum_{i_1=0}^{n-3}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}X_{i_2}(z) + \sum_{i_1=0}^{n-5}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n-3}X_{i_2}(z)\times \\ &\times\sum_{i_3=i_2+2}^{n-1}X_{i_3}(z) + \ldots + \sum_{i_1=0}^{n+1-2l}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2l}X_{i_2}(z)\ldots\sum_{i_l=i_{l-1}+2}^{n-1}X_{i_l}(z)\Bigg), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} Q_n(z) = B_1^{[n]}\Bigg(1 &+ \sum_{i=1}^{n-1}X_i(z) + \sum_{i_1=1}^{n-3}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}X_{i_2}(z) + \sum_{i_1=1}^{n-5}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n-3}X_{i_2}(z)\times \\ &\times\sum_{i_3=i_2+2}^{n-1}X_{i_3}(z) + \ldots + \sum_{i_1=1}^{n+1-2m}X_{i_1}(z)\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m}X_{i_2}(z)\ldots\sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-1}X_{i_m}(z)\Bigg), \end{aligned} \tag{7}$$

де

$$l = \left[\frac{n+1}{2}\right],\quad m=\left[\frac{n}{2}\right],\quad X_i = \frac{z-z_i}{b_i\,b_{i+1}},\quad i=\overline{0,n-1},\quad B_k^{[n]} = \prod_{i=k}^{n} b_i,\quad k=0,1.$$

Введемо у розгляд континуанту

$$\mathbf{T}_j^{\langle i\rangle}(z) = \mathcal{K}\begin{pmatrix} & z-z_i, & z-z_{i+1}, & \ldots, & z-z_{j-1} \\ b_i, & b_{i+1}, & b_{i+2}, & \ldots, & b_j \end{pmatrix}, \quad i<j. \tag{8}$$

Тоді Т – ІЛД (5) запишеться у вигляді (4) через відношення континуант (8) таким чином: $D_n(z) = \mathbf{T}_n^{\langle 0\rangle}(z)/\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(z)$.

Теорема 2. *Якщо для деякого значення $n \in \mathbb{N}$ коефіцієнти Т – ІЛД (5) скінченні і не дорівнюють нулю, а функція f набуває у вузлах відмінних від нуля значень, тобто $f(z_i) \neq 0$, $i = \overline{0,n}$, то многочлени чисельника $P_n(z)$ і знаменника $Q_n(z)$ не мають спільних нулів, тобто $P_n(z)$ і $Q_n(z)$ — взаємно прості многочлени над полем комплексних чисел і $P_n(z)/Q_n(z)$ — нескоротна раціональна функція.*

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції. При $n=1$ многочлени чисельника $P_1(z) = b_0b_1 + z - z_0$ і знаменника $Q_1(z) = b_1$ спільних нулів не мають. Якщо $n=2$, то $P_2(z) = b_0b_1b_2 + b_2(z-z_0) + b_0(z-z_1)$, $Q_2(z) = b_1b_2 + z - z_1$. Із детермінантної формули (3) маємо $P_2(z)Q_1(z) - P_1(z)Q_2(z) = -(z-z_0)(z-z_1)$. Оскільки $P_1(z)$ і $Q_1(z)$ не мають спільних нулів, то спільними нулями многочленів $P_2(z)$ і $Q_2(z)$ можуть бути вузли z_0 або z_1. Легко переконатися, що z_0 і z_1 не є спільними нулями $P_2(z)$ і $Q_2(z)$.

Припустимо, що при $n = \overline{0,k-1}$ многочлени $P_n(z)$ і $Q_n(z)$ не мають спільних нулів. Тоді при $n=k$ з детермінантної формули випливає, що $P_k(z)Q_{k-1}(z) - P_{k-1}(z)Q_k(z) = (-1)^{k-1}(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{k-1})$. За припущенням індукції многочлени $P_{k-1}(z)$ і $Q_{k-1}(z)$ спільних нулів не мають. Тоді спільним нулем многочленів $P_k(z)$ і $Q_k(z)$ може бути лише один із інтерполяційних вузлів $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$. Нехай z_s, $0 \le s \le k-1$, — один із вузлів. Тоді континуанти $\mathbf{T}_k^{\langle 0\rangle}(z_s)$ і $\mathbf{T}_k^{\langle 1\rangle}(z_s)$ будуть рівні:

$$\mathbf{T}_k^{\langle 0\rangle}(z_s) = \mathcal{K}\begin{pmatrix} & z_s-z_0, & \ldots, & z_s-z_{s-1}, & 0, & z_s-z_{s+1}, & \ldots, & z_s-z_{k-1} \\ b_0, & b_1, & \ldots, & b_s, & b_{s+1}, & b_{s+2}, & \ldots, & b_k \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_k^{\langle 1\rangle}(z_s) = \mathcal{K}\begin{pmatrix} & z_s-z_1, & \ldots, & z_s-z_{s-1}, & 0, & z_s-z_{s+1}, & \ldots, & z_s-z_{k-1} \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_s, & b_{s+1}, & b_{s+2}, & \ldots, & b_k \end{pmatrix}.$$

За теоремою 1 маємо $\mathbf{T}_k^{\langle 0\rangle}(z_s) = \mathbf{T}_k^{\langle s\rangle}(z_s)\mathbf{T}_{s-1}^{\langle 0\rangle}(z_s)$, $\mathbf{T}_k^{\langle 1\rangle}(z_s) = \mathbf{T}_k^{\langle s\rangle}(z_s)\mathbf{T}_{s-1}^{\langle 1\rangle}(z_s)$. Звідси випливає, що

$$\frac{P_k(z_s)}{Q_k(z_s)} = \frac{P_{s-1}(z_s)}{Q_{s-1}(z_s)}.$$

За припущенням індукції многочлени $P_t(z)$ і $Q_t(z)$, $t = \overline{0,k-1}$, спільних нулів не мають. Отже, вузол z_s не буде спільним нулем $P_k(z)$ і $Q_k(z)$. Внаслідок довільності z_s приходимо до висновку, що вказані многочлени не мають спільних нулів. Отже, теорема справедлива і при $n=k$.

4. Нулі ланцюгового дробу Тіле. Відомо [3, 4], що в граничному випадку із Т – ІЛД (5) можна отримати формулу Тіле — аналог формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів. Якщо інтерполяційні вузли $z_0, z_1, \ldots, z_k \to z_*$, де $z_* \in \mathcal{Z}$, то граничне значення оберненої різниці k-го порядку $\rho_k[z_0, z_1, \ldots, z_k; f]$ називається оберненою похідною Тіле k-го порядку функції f у точці z_* на компакті $\mathcal{Z}$ і позначається ${}^{(k)}f(z_*)$, тобто

$$^{(k)}f(z_*) = \lim_{z_0, z_1, \ldots, z_k \to z_*} \rho_k[z_0, z_1, \ldots, z_k; f], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Обернені похідні Тіле обчислюють за допомогою рекурентної формули [3]

$$^{(k)}f(z_*) = k \cdot {}^{(1)}\left({}^{(k-1)}f(z_*)\right) + {}^{(k-2)}f(z_*), \quad k \in \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}\backslash\{1\},$$
$$^{(0)}f(z_*) = f(z_*), \quad {}^{(1)}f(z_*) = 1/f'(z_*).$$

Якщо функція f в деякому околі точки z_* має обернені похідні Тіле до n-го порядку включно, то її можна записати формулою Тіле

$$f(z) = b_0(z_*; f) + \frac{z - z_*}{b_1(z_*; f)} + \frac{z - z_*}{b_2(z_*; f)} + \ldots + \frac{z - z_*}{b_n(z_*; f)} + \frac{z - z_*}{R_n(z; f)},$$

де $R_n(z; f)$ — залишок ланцюгового дробу. Коефіцієнти $b_i(z_*; f)$ визначаються через обернені похідні Тіле таким чином:

$$b_0(z_*; f) = f(z_*), \quad b_1(z_*; f) = {}^{(1)}f(z_*), \quad b_n(z_*; f) = {}^{(n)}f(z_*) - {}^{(n-2)}f(z_*), \quad n \in \mathbb{N}_2.$$

Якщо в деякому околі точки $z = z_*$ функція f має нескінченну кількість відмінних від нуля обернених похідних Тіле, то отримаємо розвинення функції у формальний ланцюговий дріб Тіле (Т – ЛД)

$$f(z) = b_0(z_*; f) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_*}{b_k(z_*; f)}. \tag{9}$$

Властивості обернених похідних Тіле, приклади розвинення функцій за допомогою формули Тіле в ланцюгові дроби, обґрунтування областей збіжності та рівномірної збіжності отриманих розвинень можна знайти у працях [3, 4, 10, 17, 19].

Підхідний дріб $D_n(z; z_*, f)$ Т – ЛД (9) запишемо таким чином:

$$D_n(z; z_*, f) = \frac{P_n(z; z_*, f)}{Q_n(z; z_*, f)} = b_0(z_*; f) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{z - z_*}{b_k(z_*; f)}, \tag{10}$$

де многочлени чисельника $P_n(z; z_*, f)$ і знаменника $Q_n(z; z_*, f)$ визначаються через елементи $b_i(z_*; f)$, $i = \overline{0, n}$, $z - z_*$ Т–ЛД (10) за допомогою формули Ойлера – Міндінґа (6), (7):

$$P_n(z; z_*, f) = B_0^{[n]}\left(1 + (z - z_*)\sum_{i=0}^{n-1} A_i + (z - z_*)^2 \sum_{i_1=0}^{n-3} A_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} A_{i_2} + (z - z_*)^3 \sum_{i_1=0}^{n-5} A_{i_1} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{i_2=i_1+2}^{n-3} A_{i_2} \sum_{i_3=i_2+2}^{n-1} A_{i_3} + \ldots + (z - z_*)^l \sum_{i_1=0}^{n+1-2l} A_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2l} A_{i_2} \ldots \sum_{i_l=i_{l-1}+2}^{n-1} A_{i_l}\right), \tag{11}$$

$$Q_n(z; z_*, f) = B_1^{[n]}\left(1 + (z - z_*)\sum_{i=1}^{n-1} A_i + (z - z_*)^2 \sum_{i_1=1}^{n-3} A_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} A_{i_2} + (z - z_*)^3 \sum_{i_1=1}^{n-5} A_{i_1} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{i_2=i_1+2}^{n-3} A_{i_2} \sum_{i_3=i_2+2}^{n-1} A_{i_3} + \ldots + (z - z_*)^m \sum_{i_1=1}^{n+1-2m} A_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m} A_{i_2} \ldots \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-1} A_{i_m}\right), \tag{12}$$

де

$$A_i = \frac{1}{b_i(z_*;f)\, b_{i+1}(z_*;f)}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad B_l^{[n]} = \prod_{i=l}^{n} b_i(z_*;f), \quad l = \left[\frac{n+1}{2}\right], \quad m = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Теорема 3. *Якщо коефіцієнти* $b_k = b_k(z_*;f)$, $k = \overline{1,n}$, *підхідного дробу* (10) *скінченні й відмінні від нуля і* $f(z_*) \neq 0$, *то канонічний чисельник* $P_n(z;z_*,f)$ *і канонічний знаменник* $Q_n(z;z_*,f)$ *не мають спільних нулів, тобто* $P_n(z;z_*,f)$ *і* $Q_n(z;z_*,f)$ — *взаємно прості многочлени над полем комплексних чисел,* $P_n(z;z_*,f)/Q_n(z;z_*,f)$ — *нескоротна раціональна функція.*

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції. При $n = 1$ легко бачити, що многочлени $P_1(z;z_*,f) = b_0 b_1 + z - z_*$ і $Q_1(z;z_*,f) = b_1$ спільних нулів не мають. Далі, якщо $n = 2$, то $P_2(z;z_*,f) = b_0 b_1 b_2 + (b_0 + b_2)(z - z_*)$, $Q_2(z;z_*,f) = b_1 b_2 + z - z_*$. Згідно з детермінантною формулою (3) $P_2(z;z_*,f)Q_1(z;z_*,f) - P_1(z;z_*,f)Q_2(z;z_*,f) = -(z-z_*)^2$. Оскільки многочлени $P_1(z;z_*,f)$ і $Q_1(z;z_*,f)$ спільних нулів не мають, то спільним нулем $P_2(z;z_*,f)$ і $Q_2(z;z_*,f)$ може бути лише z_*. Але z_* не є нулем ані $P_2(z;z_*,f)$, ані $Q_2(z;z_*,f)$. Отже, при $n = 1, 2$ теорема є правильною. Припустимо, що теорема справджується при $n = k - 1$. При $n = k$ детермінантна формула має вигляд

$$P_k(z;z_*,f)Q_{k-1}(z;z_*,f) - P_{k-1}(z;z_*,f)Q_k(z;z_*,f) = (-1)^{k-1}(z-z_*)^k.$$

За припущенням індукції $P_{k-1}(z;z_*,f)$ і $Q_{k-1}(z;z_*,f)$ спільних нулів не мають. Спільним нулем $P_k(z;z_*,f)$ і $Q_k(z;z_*,f)$ може бути лише z_*.

Із формул (11), (12) випливає, що $P_k(z_*;z_*,f) = B_0^{[k]}$, $Q_k(z_*;z_*,f) = B_1^{[k]}$. Отже, z_* не є нулем многочленів чисельника $P_k(z;z_*,f)$ і знаменника $Q_k(z;z_*,f)$. Таким чином, теорема правильна і при $n = k$.

***Зауваження* 1.** В монографії [20] аналогічне твердження доведено для випадку ланцюгових RIT-дробів.

5. Послідовності апроксимант Паде ланцюгового дробу Тіле. Відомо [21], що якщо функція f визначена формальним степеневим рядом (ФСР)

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \tag{13}$$

то апроксимантою Паде $[L/M]_f$ функції f називається нескоротна раціональна функція $R^{[L/M]}(z) = P^{[L/M]}(z)/Q^{[L/M]}(z)$, де $Q^{[L/M]}(0) = 1$, яка задовольняє співвідношення

$$R^{[L/M]}(z) = f(z) + O\left(z^{L+M+1}\right).$$

Двовимірний масив раціональних функцій $\left\{R^{[M/L]}(z),\ L, M \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$ називають таблицею Паде для ФСР (13). Апроксиманта Паде $[L,M]_f$ називається нормальною, якщо $\deg P^{[L/M]}(z) = L$, $\deg Q^{[L/M]}(z) = M$.

Запишемо (11) і (12) у вигляді

$$P_n(z;z_*,f)(z) = p_l(w) = w^l + \mathbf{a}_1 w^{l-1} + \ldots + \mathbf{a}_{l-s} w^s + \ldots + \mathbf{a}_{l-1} w + \mathbf{a}_l, \tag{14}$$

$$Q_n(z;z_*,f)(z) = q_m(w) = w^m + \mathbf{b}_1 w^{m-1} + \ldots + \mathbf{b}_{m-k} w^k + \ldots + \mathbf{b}_{m-1} w + \mathbf{b}_m, \tag{15}$$

де

$$\mathbf{a}_l = B_0^{[n]}, \mathbf{a}_{l-s} = B_0^{[n]} \sum_{i_1=0}^{n+1-2s} A_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2s} A_{i_2} \ldots \sum_{i_s=i_{s-1}+2}^{n-1} A_{i_s}, s = \overline{1, l-1}, l = \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

$$\mathbf{b}_m = B_1^{[n]}, \mathbf{b}_{m-k} = B_1^{[n]} \sum_{i_1=1}^{n+1-2k} A_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k} A_{i_2} \ldots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1} A_{i_k}, k = \overline{1, m-1}, m = \left[\frac{n}{2}\right], \quad (16)$$

$$w = z - z_*, \quad A_i = 1/b_i b_{i+1}.$$

Теорема 4. *Якщо для кожного значення* $n \in \mathbb{N}$ *коефіцієнти* b_k, $k = \overline{1, n}$, *ланцюгового дробу* (10) *набувають скінченних відмінних від нуля значень,* $b_0 = f(z_*) \neq 0$, *то послідовність підхідних дробів* $\{D_n(z; z_*, f)\}$ *утворює східчасту послідовність нормальних апроксимант Паде* $\left\{R^{[0/0]}(w), R^{[1/0]}(w), R^{[1/1]}(w), R^{[2/1]}(w), R^{[2/2]}(w), \ldots\right\}$ *функції* f.

Доведення. Із (14), (15) випливає, що $D_n(z; z_*, f) = R^{[l/m]}(w)$. Згідно з теоремою 3 многочлени $p_l(w)$ і $q_m(w)$ не мають спільних нулів, а отже $R^{[l/m]}(w) = p_l(w)/q_m(w)$ буде нескоротною функцією. Легко бачити, що $q_m(0) = B_1^{[n]} \neq 0$. Поділимо многочлени $p_l(w)$ і $q_m(w)$ на $B_1^{[n]}$. Тоді $R^{[l/m]}(w) = \bar{p}_l(w)/\bar{q}_m(w)$ — нескоротна функція і $\bar{q}_m(0) = 1$. Із (14), (15) випливає, що $\deg p_l(w) = l$, $\deg q_m(w) = m$. У статті [22] доведено, що ланцюговий дріб Тіле (9) також відповідає ФСР (13), а тоді $R^{[l/m]}(z - z_*) = f(z) + O(z^{l+m+1})$. Отже, послідовність $\left\{R^{[l/m]}(w) = D_n(z; z_*, f)\right\}$ є послідовністю нормальних апроксимант Паде функції f.

6. Область нулів знаменника ланцюгового дробу Тіле. Знайдемо область на комплексній площині, якій належать всі нулі канонічного знаменника $Q_n(z; z_*, f)$ ланцюгового дробу Тіле (10). Будемо використовувати таке твердження.

Твердження 1 [23]. *Нехай* $p_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n$ *— многочлен із ненульовими коефіцієнтами і* $\bar{z}_i$, $i = \overline{1, n}$, *— нулі цього многочлена. Тоді*

$$\max_{1 \le i \le n} |\bar{z}_i| = r_0 \le \max\left\{2|c_1|, 2\left|\frac{c_2}{c_1}\right|, 2\left|\frac{c_3}{c_2}\right|, \ldots, 2\left|\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\right|, \left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right|\right\}. \quad (17)$$

Теорема 5. *Якщо коефіцієнти* $b_i = b_i(z_*; f)$, $i = \overline{1, n}$, *T–ЛД* (10) *відмінні від нуля, то нулі канонічного знаменника* $Q_n(z; z_*, f)(z)$ *T–ЛД при* $n > 4$ *знаходяться у крузі радіуса* r_1 *з центром у точці* z_*, *де*

$$\max_{1 \le i \le m} |\bar{z}_i - z_*| = r_1 \le \max\left\{2(n-1)(b^*)^{n-2}, \frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)\, b_*^2}\rho\right\},$$

$$b^* = \max_{1 \le i \le n} |b_i|, \quad b_* = \min_{1 \le i \le n} |b_i|, \quad \rho = \begin{cases} (b^*/b_*)^{n-4}, & \text{якщо} \quad b^*/b_* \ge 1, \\ (b^*/b_*)^{n-2m}, & \text{якщо} \quad b^*/b_* < 1. \end{cases}$$

Доведення. Згідно з (15) канонічний знаменник $Q_n(z; z_*, f)(z) = q_m(w)$ є многочленом m-го степеня із старшим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці. Коефіцієнти $\mathbf{b}_i$, $i = \overline{1, m}$, многочлена $q_m(w)$ відмінні від нуля. Згідно із твердженням 1 нулі цього многочлена w_i, $i = \overline{1, m}$, задовольняють нерівність (17). Із (16) випливає (див. [24, 25]), що коефіцієнт $\mathbf{b}_{m-k}$ є сумою $\binom{n-k}{k}$ добутків із $n - 2k$ співмножників $A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_{n-2k}}$.

Маємо

$$|c_1| \le (n-1)(b^*)^{n-2}, \quad \left|\frac{c_k}{c_{k-1}}\right| \le \frac{(n+2-2k)(n+1-2k)}{k(n+1-k)\,b_*^2}\left(\frac{b^*}{b_*}\right)^{n-2k}, \quad k=\overline{2,m}.$$

Із (17) отримуємо

$$r_1 \le \max\left\{2|c_1|, 2\left|\frac{c_2}{c_1}\right|, 2\left|\frac{c_3}{c_2}\right|, \ldots, 2\left|\frac{c_{m-1}}{c_{m-2}}\right|, \left|\frac{c_m}{c_{m-1}}\right|\right\} \le$$

$$\le \max\left\{2(n-1)(b^*)^{n-2}, \frac{2(n-2)(n-3)}{2(n-1)\,b_*^2}\left(\frac{b^*}{b_*}\right)^{n-4}, \frac{2(n-4)(n-5)}{3(n-2)\,b_*^2}\left(\frac{b^*}{b_*}\right)^{n-6}, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \frac{2(n+4-2m)(n+3-2m)}{(m-1)(n+2-m)\,b_*^2}\left(\frac{b^*}{b_*}\right)^{n+2-2m}, \frac{(n+2-2m)(n+1-2m)}{m(n+1-m)\,b_*^2}\left(\frac{b^*}{b_*}\right)^{n-2m}\right\}.$$

Нехай n є фіксованим. Дослідимо допоміжну функцію

$$g(x) = \frac{(n+1-2x)(n+2-2x)}{x(n+1-x)}, \quad x \in \mathcal{R} = [2; m].$$

Похідна функції g

$$g'(x) = -\frac{2x^2-(2n^2+6n+4)x+n^3+4n^2+5n+2}{x^2(n+1-x)^2}.$$

На відрізку $\mathcal{R}$ знаменник набуває лише додатних значень. Чисельник дорівнює нулю, якщо

$$x_1 = \frac{(n+1)(n+2-\sqrt{n^2+2n})}{2}, \quad x_2 = \frac{(n+1)(n+2+\sqrt{n^2+2n})}{2}.$$

Оскільки $\left(n^2+2n\right) > n^2$, то $x_1 < n+1$. Отже, $g'(x) < 0$ для $x \in \mathcal{R}$, функція $g(x)$ монотонно спадає на $\mathcal{R}$ і набуває найбільшого значення при $x = 2$.

Із (17) маємо

$$r_1 \le \max\left\{2|c_1|, 2\left|\frac{c_2}{c_1}\right|, \ldots, 2\left|\frac{c_{m-1}}{c_{m-2}}\right|, \left|\frac{c_m}{c_{m-1}}\right|\right\} \le$$

$$\le \max\left\{2(n-1)\,(b^*)^{n-2}, \frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)\,b_*^2}\,\rho\right\}.$$

***Зауваження* 2.** Нулі канонічного знаменника $Q_n(z; z_*, f)$ при $n = 2, 3, 4$ можна знайти безпосередньо.

Література

1. J. M. Hoene-Wroński, *Introduction à la Philosophie des Mathématiques et Technie de l'Algorithmique*, Courcier, Paris (1811).
2. J. M. Hoene-Wroński, *Philosophie de la Technie Algorithmique: Loi Suprême et universelle des Mathématiques*, de L'imprimerie de P. Didot L'Aine, Paris (1815 – 1817).
3. T. N. Thiele, *Interpolationsprechnung*, Commisission von B. G. Teubner, Leipzig (1909).
4. N. E. Nörlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Springer, Berlin (1924).

5. C. Brezinski, *History of continued fractions and pade approximations, vol. 12*, Springer Sci. & Business Media (2012).
6. Н. С. Бахвалов, Н. П. Житков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, Наука, Москва (1987).
7. F. B. Hildebrand, *Introduction to numerical analysis, 2nd ed.*, Dover Publ., Inc., New York (1987).
8. Ш. Е. Микеладзе, *Численные методы математического анализа*, Гостехтеориздат, Москва (1953).
9. У. Джоунс, В. Трон, *Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения*, Мир, Москва (1985).
10. A. Cuyt, V. Brevik Petersen, B. Verdonk, H. Waadeland, W. B. Jones, *Handbooks of continued fractions for special functions*, Springer, Berlin etc. (2008).
11. В. Я. Скоробогатько, *Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике*, Наука, Москва (1983).
12. J. Tan, *Theory of continued fractions and its applications*, Sci. Publ., Beijing (2007).
13. P. Henrici, P. Pfluger, *Truncation error estimates for Stieltjes fractions*, Numer. Math., **9**, 120 – 138 (1966).
14. G. Chrystal, *Algebra: an elementary text-book for the higher classes of secondary school and for colleges*, vol. 2, A. & C. Black (1889).
15. R. Vein, P. Dale, *Determinants and their application in mathematical physics*, Springer Sci. & Business Media (2006).
16. М. М. Пагіря, *Використання континуанти для оцінки залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле*, Укр. мат. вісн., **16**, № 4, 588 – 603 (2019).
17. М. М. Пагіря, *Наближення функцій ланцюговими дробами*, Ґражда, Ужгород (2016).
18. O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen, Bd 1*, Teubner, Stuttgart (1954).
19. A. N. Khovanskii, *The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory*, P. Noordhoff, Groningen (1963).
20. P. Henrici, *Applied and computational complex analysis, vol.* 2, *Special functions, integral transforms, asymptotics, continued fractions*, John Wiley & Sons, New York, London (1977).
21. Дж. Бейкер (мл.), П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, Мир, Москва (1986).
22. M. M. Pahirya, R. A. Katsala, *Equivalence of two methods for construction of regular continued C-fractions*, Ukr. Math. J., **61**, № 7, 1192 – 1198 (2009).
23. D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer, Berlin etc. (1970).
24. M. M. Pahirya, *Evaluation of the remainder term for the Thiele interpolation continued fraction*, Ukr. Math. J., **60**, № 11, 1813 – 1822 (2008).
25. M. M. Pahirya, *Estimation of the remainder for the interpolation continued C-fraction*, Ukr. Math. J., **66**, № 6, 905 – 915 (2014).

Одержано 24.05.20