DOI: 10.37863/umzh.v72i8.6158

УДК 517.927

О. М. Атласюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ПАРАМЕТРОМ У ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

We consider the most general class of multipoint boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations of an arbitrary order whose solutions belong to the given Sobolev space W_p^{n+r}, with $n \geq 0,\ r \geq 1$, and $1 \leq p \leq \infty$. We establish constructive sufficient conditions under which the solutions of these problems are continuous with respect to the parameter ε at $\varepsilon = 0$ in the space W_p^{n+r}.

Розглянуто найбільш загальний клас багатоточкових крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку, розв'язки яких належать заданому простору Соболєва W_p^{n+r}, де $n \geq 0,\ r \geq 1$ і $1 \leq p \leq \infty$. Встановлено конструктивні достатні умови, за яких розв'язки цих задач неперервні за параметром ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{n+r}.

1. Вступ. Класичним об'єктом вивчення в теорії звичайних диференціальних рівнянь є багатоточкові крайові задачі. Однією з їхніх особливостей є те, що проміжні точки, які входять у крайові умови, породжують різноманітні проблеми. Питанням існування, єдиності і побудови наближених методів знаходження розв'язків багатоточкових крайових задач присвячено роботи А. М. Самойленка [1, 2], І. Т. Кігурадзе [3] і В. Д. Пономарьова [4]. Теореми про існування, єдиність і неперервність за параметром розв'язків загальних і найбільш загальних крайових задач у різних функціональних банахових просторах та методика їхніх доведень були застосовані до дослідження багатоточкових крайових задач В. А. Михайлецем та його учнями [5 – 9]. Метою даної роботи є дослідження найбільш загального класу багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку, розв'язки яких належать простору Соболєва W_p^{n+r}, де $n \geq 0,\ r \geq 1$ і $1 \leq p \leq \infty$. Ми розглянемо випадок, коли точки замкненого інтервалу $[a, b]$, які фігурують у крайових умовах, не є фіксованими і залежать від числового параметра, а також кількість точок може змінюватися. Випадок $p = \infty$ є особливим і раніше не вивчався.

2. Постановка задачі. Нехай задано скінченний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ і параметри

$$\{m, r, N\} \subset \mathbb{N}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Виберемо довільним чином N різних точок $\{t_1, \ldots, t_N\} \subset [a, b]$.

Позначимо через $W_p^n := W_p^n\big([a, b]; \mathbb{C}\big)$ комплексний простір Соболєва і покладемо $W_p^0 := L_p$. Також позначимо через $(W_p^n)^m := W_p^n([a, b]; \mathbb{C}^m)$ і $(W_p^n)^{m \times m} := W_p^n([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m})$ простори Соболєва відповідно вектор-функцій і матриць-функцій, елементи яких належать функціональному простору W_p^n. Норми у цих просторах позначимо через $\| \cdot \|_{n,p}$, вони є сумами відповідних норм у W_p^n всіх елементів векторно- або матричнозначної функції. З контексту завжди зрозуміло, про норму в якому саме просторі (скалярних, вектор- чи матриць-функцій) йде мова. Якщо $m = 1$, то всі ці простори збігаються. Як відомо, простори W_p^n є банаховими; вони сепарабельні тоді і лише тоді, коли $p < \infty$.

Розглянемо багатоточкову крайову задачу

$$Ly(t) \equiv y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$By \equiv \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{j=1}^{N} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) = q. \tag{2}$$

Тут невідомою є вектор-функція $y \in (W_p^{n+r})^m$ і довільно задано матриці-функції $A_{r-j} \in \in (W_p^n)^{m\times m}$, вектор-функцію $f \in (W_p^n)^m$, матриці $\beta_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{rm\times m}$ і вектор $q \in \mathbb{C}^{rm}$.

З огляду на неперервне вкладення

$$(W_p^{n+r})^m \hookrightarrow (C^{n+r-1})^m \tag{3}$$

ліва частина крайової умови (2) має сенс, і відображення $y \hookrightarrow By$, де $y \in (W_p^{n+r})^m$, є неперервним оператором із простору $B\colon (W_p^{n+r})^m$ у простір $\mathbb{C}^{rm}$. Зазначимо, що крайова умова (2) не є класичною, тому що містить похідні $y^{(l)}$ цілого порядку l, де $0 < l \leq n+r-1$.

Розглянемо (1), (2) як граничну крайову задачу при $\varepsilon \to 0+$ для такої багатоточкової крайової задачі, залежної від параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon) y(t,\varepsilon) := y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon) y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{4}$$

$$B(\varepsilon) y(\cdot,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n+r-1} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}\big(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon\big) = q(\varepsilon). \tag{5}$$

Тут при кожному фіксованому значенні параметра ε невідомою є вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in \in (W_p^{n+r})^m$ і задано матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^m$, вектори $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ та матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$. У граничному випадку при $\varepsilon = 0$ на відрізку $[a,b]$ вибрано N точок t_j. У випадку, коли $\varepsilon > 0$, на відрізку вибрано не менше ніж N точок $t_{j,k}(\varepsilon)$, які поєднані у $N+1$ серію таким чином: для кожного фіксованого $j \in \{1,\ldots,N\}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ повинні мати спільну межу t_j при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься. Зауважимо, що нульової серії може і не бути.

Вектори і вектор-функції вважаємо записаними у вигляді стовпців. Під розв'язком крайової задачі (4), (5) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$, яка задовольняє рівняння (4) (при $n \geq 1$ скрізь, а при $n = 0$ майже скрізь) на (a,b) та рівність (5), яка задає rm скалярних крайових умов. Використання у крайовій умові (5) повторної суми за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ залежно від значень параметра j.

У граничному випадку при $\varepsilon = 0$ розглядаємо крайову задачу

$$L(0) y(t,0) = f(t,0), \quad t \in (a,b), \tag{6}$$

$$B(0) y(\cdot,0) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=0}^{n+r-1} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j,0) = q(0), \tag{7}$$

де матриці $\beta_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_j \in [a,b]$ та вектор $q(0) \in \mathbb{C}^{rm}$ задано довільно.

Для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ $B(\varepsilon)$ є лінійним неперервним оператором:

$$B(\varepsilon)\colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^{rm}. \tag{8}$$

Крайовій задачі (4), (5) для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ відповідає лінійний оператор

$$\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)\colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{9}$$

Згідно з [10], (9) є обмеженим фредгольмовим оператором з індексом нуль.

Основний результат даної статті полягає у встановленні явних достатніх умов, за яких розв'язок $y = y(\cdot,\varepsilon)$ багатоточкової крайової задачі (4), (5) є неперервним за параметром ε у просторі Соболєва W_p^{n+r}, $1 \le p \le \infty$, тобто розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ існує, єдиний і задовольняє граничне співвідношення

$$\big\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\big\|_{n+r,p} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{10}$$

Для того щоб досліджувана задача мала сенс, далі будемо вважати, що виконується **умова (0):** *однорідна гранична крайова задача вигляду* (6), (7) *має лише тривіальний розв'язок, тобто є невиродженою.*

Звідси випливає, що при $\varepsilon = 0$ фредгольмовий оператор (9) є ізоморфізмом, тобто

$$\big(L(0), B(0)\big)\colon (W_p^{n+r})^m \leftrightarrow (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}.$$

Тому крайова задача (6), (7) має єдиний розв'язок $y(t,0) \in (W_p^{n+r})^m$ і визначена однозначно для довільно вибраних правих частин $f(t,0) \in (W_p^n)^m$ і $q(0) \in \mathbb{C}^{rm}$.

3. Основні результати. Сформулюємо основні результати статті у вигляді теорем 1 і 2. Доведення цих теорем наведено в пп. 4, 5. Розглянемо:

граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot,0)$ у $(W_p^n)^{m\times m}$ для кожного $j \in \{1,\dots,r\}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ у $\mathbb{C}^{rm}$ для кожного $y \in (W_p^{n+r})^m$,

припущення при $\varepsilon \to 0+$:

(α) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для всіх $j \in \{1,\dots,N\}$ і $k \in \big\{1,\dots,\omega_j(\varepsilon)\big\}$;

(β) $\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ для всіх $j \in \{1,\dots,N\}$ і $l \in \{0,\dots,n+r-1\}$;

(γ) $\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \Big\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\Big\| \big|t_{j,k}(\varepsilon) - t_j\big| \to 0$ для всіх $j \in \{1,\dots,N\}$, $k \in \{1,\dots,\omega_j(\varepsilon)\}$ і $l \in$ $\in \{0,\dots,n+r-1\}$;

(δ) $\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \Big\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\Big\| \to 0$ для всіх $k \in \{1,\dots,\omega_0(\varepsilon)\}$ і $l \in \{0,\dots,n+r-1\}$.

Зауважимо, що для крайової задачі (4), (5) не припускається, що коефіцієнти $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon)$, $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ чи точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають певну регулярність за параметром ε при $\varepsilon > 0$. Будемо вимагати, щоб для кожного фіксованого $j \in \{1,\dots,N\}$ всі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, проте для точок нульової серії $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

В умовах (γ) та (δ) вираз $\|\cdot\|$ є нормою комплексної числової матриці; ця норма дорівнює сумі модулів усіх елементів матриці. Припущення (β) і (γ) допускають, що норми коефіцієнтів $\big\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\big\|$ можуть необмежено зростати при $\varepsilon \to 0+$, але не надто швидко. З умови (δ) випливає, що не потрібно вимагати збіжності точок $t_{0,j}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ на відміну від умови (α).

Сформулюємо граничну теорему для розв'язків багатоточкової крайової задачі (4), (5) у випадку $p = \infty$.

Теорема 1. *Нехай крайова задача* (4), (5) *при* $p = \infty$ *задовольняє припущення* (α), (β), (γ), (δ). *Тоді вона задовольняє граничну умову* (II).

Якщо, *крім того, виконано умови* (0) *і* (I), *то для достатньо малих* ε *її розв'язок існує*, *є єдиним і задовольняє граничне співвідношення* (10).

Перейдемо тепер до випадку $1 \leq p < \infty$. Для цього розглянемо ще такі **припущення** при $\varepsilon \to 0+$:

(γ_p) $\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(n+r-1)}(\varepsilon) \right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^{1/p'} = O(1)$ для всіх $j \in \{1, \ldots, N\}$ і $k \in \big\{1, \ldots \ldots, \omega_j(\varepsilon)\big\}$, де $1/p + 1/p' = 1$;

(γ') $\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0$ для всіх $j \in \{1, \ldots, N\}$, $k \in \big\{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\big\}$ і $l \in \{0, \ldots, n+r-2\}$.

Зазначимо, що системи умов (α), (β), (γ), (δ) та (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ) не гарантують рівномірної збіжності неперервних операторів $B(\varepsilon)$ із $(W_p^{n+r})^m$ до $B(0)$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Тому теорема 1 не випливає із загальних фактів теорії лінійних операторів.

Сформулюємо граничну теорему для розв'язків багатоточкової крайової задачі (4), (5) у випадку $1 \leq p < \infty$.

Теорема 2. *Нехай крайова задача* (4), (5) *при* $1 \leq p < \infty$ *задовольняє припущення* (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ). *Тоді вона задовольняє граничну умову* (II).

Якщо, *крім того*, *виконано умови* (0) *і* (I), *то для достатньо малих* ε *її розв'язок існує*, *є єдиним і задовольняє граничне співвідношення* (10).

Зазначимо, що для диференціальних рівнянь першого порядку (випадок $r = 1$) теореми 1 і 2 доведено у роботі [11]. У загальному ж випадку для диференціальних рівнянь довільного порядку доведення теорем 1 і 2 ґрунтуються на критерію неперервності найбільш загальних крайових задач, сформульованому у роботі [12].

Зауважимо, що в роботах Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [5, 6] досліджено багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в просторах Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, але в цих роботах точки відрізка $[a, b]$, які фігурують у крайовій умові, є фіксованими і не залежать від параметра. У роботі Є. В. Гнип і Т. І. Кодлюк [7] досліджено некласичні багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку в просторах Соболєва W_p^{n+r}, де $1 \leq p < \infty$, проте в цій роботі кількість точок у кожній серії не залежить від параметра ε.

4. Доведення теореми 1. Запишемо оператор (8) у вигляді скінченної суми $N+1$ доданків, розділених за серіями:

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) = B_0(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) + B_1(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) + \ldots + B_N(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon), \tag{11}$$

де

$$\begin{gathered}
B_0(\varepsilon)y(t_{0,k}(\varepsilon), \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n+r-1} \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}\big(t_{0,k}(\varepsilon)\big), \\
B_1(\varepsilon)y(t_{1,k}(\varepsilon), \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\omega_1(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n+r-1} \beta_{1,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}\big(t_{1,k}(\varepsilon)\big), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{12}$$

$$B_N(\varepsilon)y(t_{N,k}(\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=N}^{\omega_N(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n+r-1} \beta_{N,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}\big(t_{N,k}(\varepsilon)\big).$$

Тоді співвідношення

$$B_0(\varepsilon) \xrightarrow{s} 0, \tag{13}$$

$$B_j(\varepsilon) \xrightarrow{s} B_j(0), \quad j \in \{1,\ldots,N\}, \tag{14}$$

гарантують виконання граничної умови (II).

Покажемо спочатку сильну збіжність операторів $B_0(\varepsilon)$ до нуля, тобто виконання співвідношення (13). Враховуючи умову (δ), отримуємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \|y^{(l)}\big(t_{0,k}(\varepsilon)\big)\| \leq \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \|y\|_{n+r,\infty} \to 0$$

для всіх допустимих значень індексів k і l. Ці та всі інші границі у доведенні розглядаємо за умови, що $\varepsilon \to 0+$.

Для довільної вектор-функції $y \in (W_\infty^{n+r})^m$ і достатньо малого значення параметра $\varepsilon > 0$ маємо

$$\left\|B_j(\varepsilon)y - B_j(0)y\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n+r-1} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{n+r-1} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j)\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n+r-1} \left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}\big(t_{0,k}(\varepsilon)\big)\right\| +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n+r-1} \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j)\right\|. \tag{15}$$

Дослідимо другий доданок у правій частині формули (15). Для довільних $j \in \{1,\ldots,N\}$ та $l \in \{0,\ldots,n+r-1\}$ маємо

$$\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j)\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) + \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j)\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \Big(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\Big)\right\| + \left\|\left(\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}\right) y^{(l)}(t_j)\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}\right\| \|y\|_{n+r,\infty}. \tag{16}$$

Тоді на підставі умови (β) справджується збіжність

$$\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}\right\| \|y\|_{n+r,\infty} \to 0. \tag{17}$$

Зауважимо, що у просторі W_∞^{n+r} для довільних точок $\{\tau_1, \tau_2\} \subset [a,b]$ та $y \in (W_\infty^{n+r})^m$ виконується нерівність

$$\left|y^{(n+r-2)}(\tau_1) - y^{(n+r-2)}(\tau_2)\right| = \left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} y^{(n+r-1)}(s)ds\right| \leq$$

$$\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|y^{(n+r-1)}(s)\right|ds = |\tau_2 - \tau_1| \operatorname*{ess\,sup}_{a\leq\tau_1<\tau_2\leq b} \left|y^{(n+r-1)}\right|. \tag{18}$$

Крім того, похідні функцій до порядку $n+r-3$ існують та є ліпшицевими, а похідна порядку $n+r-1$ існує майже скрізь та є істотно обмеженою. З наведених міркувань та з умови (18) випливає, що похідна $(n+r-2)$-го порядку також є ліпшицевою. Тому має місце співвідношення

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| \to 0. \tag{19}$$

Справді, якщо $0 \leq l \leq n+r-1$, то це є безпосереднім наслідком умови (γ) і того факту, що вектор-функція y належить простору $(W_\infty^{n+r})^m$ з відповідно визначеною нормою

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| = \left\|y^{(n+r-1)}\right\|_\infty \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left|t_{j,k}(\varepsilon) - t_j\right| \leq$$

$$\leq \|y\|_{n+r,\infty} \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left|t_{j,k}(\varepsilon) - t_j\right| \to 0.$$

Із формул (16), (17), (19) безпосередньо випливає збіжність

$$\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j)\right\| \to 0. \tag{20}$$

Збіжність (20) обумовлює виконання умов (14). Тому, враховуючи формули (13) і (14), робимо висновок, що $\|B(\varepsilon)y - B(0)y\| \to 0$. Нагадаємо, що вектор-функція $y \in (W_\infty^{n+r})^m$ є довільною. Отже, гранична умова (II) справджується.

Перше твердження теореми 1 доведено. Друге твердження випливає з доведеного вище і теореми 1 [12].

5. Доведення теореми 2. Як і раніше, будемо вважати, що оператор (8) записано у вигляді (11), де скінченна сума $N+1$ доданків розділена за серіями (12).

Згідно з теоремою Банаха – Штейнгауза достатньо показати, що норма оператора $B(\varepsilon)$: $(W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^{rm}$ є обмеженою при $0 < \varepsilon \ll 1$ і $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ при $\varepsilon \to 0+$ для кожної вектор-функції y, яка належить щільній множині $(C^\infty)^m := C^\infty\big([a,b],\mathbb{C}^{rm}\big)$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$.

Доведемо спочатку рівномірну по ε обмеженість норми оператора

$$B(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}B_j(\varepsilon).$$

Виберемо довільну вектор-функцію $y\in(W_p^{n+r})^m$ і достатньо малий параметр $\varepsilon>0$. Згідно з крайовою умовою (5) виконується нерівність

$$\Big\|B_j(\varepsilon)y-B_j(0)y\Big\|=\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\sum_{l=0}^{n+r-1}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon))-\sum_{l=0}^{n+r-1}\beta_j^{(l)}y^{(l)}(t_j)\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)}\sum_{l=0}^{n+r-1}\Big\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\Big\|\big\|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\big\|+\sum_{l=0}^{n+r-1}\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon))-\beta_j^{(l)}y^{(l)}(t_j)\right\|. \qquad (21)$$

Покажемо обмеженість норми оператора, що відповідає нульовій серії. Використовуючи неперервність вкладення (3), одержуємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)}\Big\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\Big\|\big\|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\big\|\le c_0\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)}\Big\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\Big\|\|y\|_{n+r,p} \qquad (22)$$

для всіх допустимих значень індексів $l\in\{0,\ldots,n+r-1\}$ і $k\in\big\{1,\ldots,\omega_0(\varepsilon)\big\}$, де c_0 — норма оператора вкладення (3). Ці та всі інші границі у доведенні розглядаємо за умови, що $\varepsilon\to0+$.

Крім того, для будь-яких $l\in\{0,\ldots,n+r-1\}$ і $j\in\{1,\ldots,N\}$ маємо

$$\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon))-\beta_j^{(l)}y^{(l)}(t_j)\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon))-\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_j)+\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_j)-\beta_j^{(l)}y^{(l)}(t_j)\right\|\le$$

$$\le\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\Big(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon))-y^{(l)}(t_j)\Big)\right\|+\left\|\left(\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)-\beta_j^{(l)}\right)y^{(l)}(t_j)\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\Big\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\Big\|\Big\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon))-y^{(l)}(t_j)\Big\|+\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)-\beta_j^{(l)}\right\|\|y\|_{n+r,p}. \qquad (23)$$

Тут для $l=n+r-1$ і кожного $k\in\big\{1,\ldots,\omega_j(\varepsilon)\big\}$ виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\Big\|\beta_{j,k}^{(n+r-1)}(\varepsilon)\Big\|\Big\|y^{(n+r-1)}(t_{j,k}(\varepsilon))-y^{(n+r-1)}(t_j)\Big\|\le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(n+r-1)}(\varepsilon) \right\| c_1 \, \|y\|_{n+r,p} \, |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^{1/p'}, \tag{24}$$

де c_1 — норма неперервного оператора вкладення простору Соболєва W_p^{n+r} у комплексний простір Гельдера $C^{n+r-1,1/p'}\big([a,b]\big)$ (див., наприклад, [13], теорема 4.6.1(e)). Якщо $1/p' = 0$, то останній простір є C^{n+r-1} і нерівність (24) виконується при $c_1 := 2c_0$.

Крім того, для кожного $l \in \mathbb{Z}$, де $0 \leq l \leq n + r - 2$, за теоремою Лагранжа маємо

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \max_{a \leq t \leq b} \left\| y^{(l+1)}(t) \right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| c_0 \|y\|_{n+r,p} \, |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \, . \tag{25}$$

Із нерівностей (21) – (25) та умов (β), (γ_p), (γ'), (δ) випливає, що

$$\big\| B(\varepsilon)y - B(0)y \big\| \leq c \, \|y\|_{n+r,p},$$

де число $c > 0$ не залежить від $y \in (W_p^{n+r})^m$ і достатньо малого $\varepsilon > 0$. Отже, норма оператора $B(\varepsilon)$ обмежена при $0 < \varepsilon \ll 1$.

Обґрунтуємо сильну збіжність оператора $B(\varepsilon)$ до $B(0)$. Враховуючи умову (δ) і нерівність (22), отримуємо

$$\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon)) \right\| \to 0. \tag{26}$$

Крім того, за умовою (β)

$$c_0 \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right\| \|y\|_{n+r,p} \to 0. \tag{27}$$

Якщо y належить $(C^\infty)^m$, то

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \max_{a \leq t \leq b} \left\| y^{(l+1)}(t) \right\| \left| t_{j,k}(\varepsilon) - t_j \right| \to 0 \tag{28}$$

для всіх $l \in \{0, \ldots, n + r - 1\}$ з урахуванням умов (α) і (β). Отже, з формул (21), (26) – (28) маємо збіжність $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$ для кожного $y \in (C^\infty)^m$.

Перше твердження теореми 2 доведено. Друге твердження випливає з доведеного вище і теореми 4.2 [14].

Література

1. А. М. Самойленко, *Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра*, Укр. мат. журн., **14**, № 3, 289 – 298 (1962).
2. А. М. Самойленко, Н. И. Ронто, *Численно-аналитические методы исследования периодических решений*, Вища шк., Киев (1976).
3. И. Т. Кигурадзе, *О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями*, Дифференц. уравнения, **39**, № 2, 198 – 209 (2003).
4. В. Д. Пономарев, *Необходимые и достаточные условия разрешимости многоточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*, Дифференц. уравнения, **14**, № 5, 929 – 932 (1978).
5. Т. И. Кодлюк, *Предельный переход в классе многоточечных краевых задач*, Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **9**, № 2, 203 – 216 (2012).
6. Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец, *Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева*, Доп. НАН України, № 11, 15 – 19 (2012).
7. Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк, *Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Соболєва*, Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **12**, № 2, 101 – 112 (2015).
8. Г. О. Маслюк, *Багатоточкові крайові задачі з параметром для диференціальних рівнянь високого порядку на просторах Гельдера*, Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **13**, № 2, 193 – 203 (2016).
9. Г. О. Маслюк, В. О. Солдатов, *Апроксимативні властивості багатоточкових крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n)}$*, Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14**, № 2, 185 – 197 (2017).
10. O. M. Atlasiuk, V. A. Mikhailets, *On the solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev spaces* (*in Ukrainian*), Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, № 11, 3 – 7 (2019).
11. O. M. Atlasiuk, *Limit theorems for solutions of multipoint boundary-value problems in Sobolev spaces*, J. Math. Sci., **247**, № 2, 238 – 247 (2020).
12. O. M. Atlasiuk, V. A. Mikhailets, *On Fredholm parameter-dependent boundary-value problems in Sobolev spaces*, Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, № 6, 3 – 6 (2020).
13. Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, Москва (1980).
14. Y. V. Hnyp, V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces*, Electron. J. Different. Equat., № 81, 1 – 13 (2017).

Одержано 07.06.20