DOI: 10.37863/umzh.v72i11.6168

УДК 517.537.72

**О. М. Мулява** (Київ нац. ун-т харч. технологій),

**М. М. Шеремета** (Львів нац. ун-т ім. І. Франка)

# ВІДНОСНЕ ЗРОСТАННЯ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З РІЗНИМИ АБСЦИСАМИ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ

We study the growth of a Dirichlet series $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\exp\{s\lambda_n\}$ with zero abscissa of absolute convergence with respect to the entire Dirichlet series $G(s)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n\exp\{s\lambda_n\}$ by using the generalized quantities of order $\varrho^0_{\beta,\beta}[F]_G = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\dfrac{\beta(M_G^{-1}(M_F(\sigma)))}{\beta(1/|\sigma|)}$ and lower order $\lambda^0_{\beta,\beta}[F]_G=\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\dfrac{\beta(M_G^{-1}(M_F(\sigma)))}{\beta(1/|\sigma|)}$, where $M_F(\sigma)=\sup\{|F(\sigma+it)|: t\in\mathbb{R}\}$, $M_G^{-1}(x)$ is the function inverse to $M_G(\sigma)$, and $\beta$ is a positive increasing function growing to $+\infty$.

Вивчається зростання ряду Діріхле $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\exp\{s\lambda_n\}$ з нульовою абсцисою абсолютної збіжності відносно цілого ряду Діріхле $G(s)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n\exp\{s\lambda_n\}$ за допомогою узагальнених порядку $\varrho^0_{\beta,\beta}[F]_G = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\dfrac{\beta(M_G^{-1}(M_F(\sigma)))}{\beta(1/|\sigma|)}$ і нижнього порядку $\lambda^0_{\beta,\beta}[F]_G=\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\dfrac{\beta(M_G^{-1}(M_F(\sigma)))}{\beta(1/|\sigma|)}$, де $M_F(\sigma)=\sup\{|F(\sigma+it)|: t\in\mathbb{R}\}$, $M_G^{-1}(x)$ — функція, обернена до $M_G(\sigma)$, і $\beta$ — додатна зростаюча до $+\infty$ функція.

**1. Вступ.** Нехай $f$ і $g$ — цілі трансцендентні функції і $M_f(r)=\max\{|f(z)|: |z|=r\}$. Для вивчення відносного зростання функцій $f$ і $g$ Х. Рой [1] використав порядок $\varrho_g[f] = \varlimsup_{r\to+\infty}\dfrac{\ln M_g^{-1}(M_f(r))}{\ln r}$ і нижній порядок $\lambda_g[f]=\varliminf_{r\to+\infty}\dfrac{\ln M_g^{-1}(M_f(r))}{\ln r}$ функції $f$ відносно функції $g$. Дослідження відносного зростання цілих функцій продовжили інші математики (див., наприклад, [2–5]) в термінах максимальних членів, неванліннових характеристик, $k$-логарифмічних порядків. У статті [6] вивчається відносне зростання цілих функцій двох комплексних змінних, а в [7] — відносне зростання цілих рядів Діріхле в термінах $R$-порядків.

Припустимо, що $\Lambda=(\lambda_n)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, і через $S(\Lambda, A)$ позначимо клас рядів Діріхле

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\exp\{s\lambda_n\},\quad s=\sigma+it, \tag{1}$$

з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a=A\in(-\infty,\infty]$. Для $\sigma<A$ приймемо $M_F(\sigma)=\sup\{|F(\sigma+it)|: t\in\mathbb{R}\}$.

Нехай $L$ — клас неперервних невід'ємних на $(-\infty,+\infty)$ функцій $\alpha$ таких, що $\alpha(x)=\alpha(x_0)\ge 0$ для $x\le x_0$ і $\alpha(x)\uparrow+\infty$ при $x_0\le x\to+\infty$. Будемо говорити, що $\alpha\in L^0$, якщо $\alpha\in L$ і $\alpha((1+o(1))x)=(1+o(1))\alpha(x)$ при $x\to+\infty$. Нарешті, $\alpha\in L_{si}$, якщо $\alpha\in L$ і $\alpha(cx)=(1+o(1))\alpha(x)$ при $x\to+\infty$ для кожного $c\in(0,+\infty)$, тобто $\alpha$ — повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{si}\subset L^0$.

Якщо $\alpha\in L$, $\beta\in L$ і $F\in S(\Lambda,+\infty)$, то величини

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F]=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha(\ln M_F(\sigma))}{\beta(\sigma)},\qquad \lambda_{\alpha,\beta}[F]=\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha(\ln M_F(\sigma))}{\beta(\sigma)} \tag{2}$$

називаються [8] узагальненим $(\alpha,\beta)$-порядком і узагальненим нижнім $(\alpha,\beta)$-порядком функції $F$ відповідно. Будемо говорити, що $F$ має узагальнене регулярне $(\alpha,\beta)$-зростання, якщо $0<\lambda_{\alpha,\beta}[F]=\varrho_{\alpha,\beta}[F]<+\infty$.

Як і в [9], означимо узагальнений $(\beta,\beta)$-порядок $\varrho_{\beta,\beta}[F]_G$ і узагальнений нижній $(\beta,\beta)$-порядок $\lambda_{\beta,\beta}[F]_G$ функції $F \in S(\Lambda, +\infty)$ відносно функції $G \in S(\Lambda, +\infty)$, заданої рядом Діріхле

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \exp\{s\lambda_n\}, \tag{3}$$

таким чином:

$$\varrho_{\beta,\beta}[F]_G = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\beta(M_G^{-1}(M_F(\sigma)))}{\beta(\sigma)}, \qquad \lambda_{\beta,\beta}[F]_G = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\beta(M_G^{-1}(M_F(\sigma)))}{\beta(\sigma)}. \tag{4}$$

Справедливими є дві такі теореми.

**Теорема А** [9]. *Нехай $\alpha \in L$ і $\beta \in L$. За винятком випадків, коли $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha,\beta}[G] = 0$ або $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha,\beta}[G] = +\infty$, виконується нерівність $\varrho_{\beta,\beta}[F]_G \geq \varrho_{\alpha,\beta}[F]/\varrho_{\alpha,\beta}[G]$, і за умови узагальненого регулярного $(\alpha,\beta)$-зростання функції $G$ ця нерівність перетворюється в рівність.*

*За винятком випадків, коли $\lambda_{\alpha,\beta}[F] = \lambda_{\alpha,\beta}[G] = 0$ або $\lambda_{\alpha,\beta}[F] = \lambda_{\alpha,\beta}[G] = +\infty$, виконується нерівність $\lambda_{\beta,\beta}[F]_G \leq \lambda_{\alpha,\beta}[F]/\lambda_{\alpha,\beta}[G]$, і за умови узагальненого регулярного $(\alpha,\beta)$-зростання функції $G$ ця нерівність перетворюється в рівність.*

**Теорема Б** [9]. *Нехай $0 < p < +\infty$ і виконується одна з умов*:

a) $\alpha \in L^0$, $\beta(\ln x) \in L^0$, $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} \to \dfrac{1}{p}$ $(x \to +\infty)$ *для кожного* $c \in (0,+\infty)$ *і* $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$;

b) $\alpha \in L_{si}$, $\beta \in L^0$, $\varrho_{\alpha,\beta}[F] < +\infty$, $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ $(x \to +\infty)$ *і* $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ $(n \to \infty)$ *для кожного* $c \in (0,+\infty)$.

*Припустимо, що $\alpha(\lambda_{n+1}/p) = (1+o(1))\alpha(\lambda_n/p)$ при $n \to \infty$.*

*Якщо функція $G$ має узагальнене регулярне $(\alpha,\beta)$-зростання і*

$$\varkappa_n[G] := \frac{\ln|g_n| - \ln|g_{n+1}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} \nearrow +\infty, \quad n_0 \leq n \to \infty,$$

*то*

$$\varrho_{\beta,\beta}[F]_G = \varlimsup_{n\to\infty} \beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|g_n|}\right) \Big/ \beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|f_n|}\right),$$

*за винятком випадків, коли $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha,\beta}[G] = 0$ або $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha,\beta}[G] = +\infty$.*

*Якщо, крім цього, $\varkappa_n[F] \nearrow +\infty$ при $n_0 \leq n \to \infty$, то*

$$\lambda_{\beta,\beta}[F]_G = \varliminf_{n\to\infty} \beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|g_n|}\right) \Big/ \beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|f_n|}\right),$$

*за винятком випадків, коли $\lambda_{\alpha,\beta}[F] = \lambda_{\alpha,\beta}[G] = 0$ або $\lambda_{\alpha,\beta}[F] = \lambda_{\alpha,\beta}[G] = +\infty$.*

У термінах $R$-типів подібні результати отримано в [10].

У наведених результатах ряди Діріхле (1) і (3) мають одну і ту ж абсцису абсолютної збіжності. Тут ми вивчимо $(\beta,\beta)$-зростання функції $F \in S(\Lambda, 0)$ відносно функції $G \in S(\Lambda, +\infty)$.

**2. Аналоги теореми A.** Для $\alpha \in L,\ \beta \in L$ і $F \in S(\Lambda,\, 0)$ величини

$$\varrho^0_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{\alpha(\ln\, M_F(\sigma))}{\beta(1/|\sigma|)}, \qquad \lambda^0_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \frac{\alpha(\ln\, M_F(\sigma))}{\beta(1/|\sigma|)} \tag{5}$$

називаються [11] узагальненим порядком і узагальненим нижнім порядком функції $F$ відповідно.

Припустимо, що $F \in S(\Lambda,\, 0)$ і $G \in S(\Lambda,\, +\infty)$. Тоді функція $M_G(\sigma)$ є неперервною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty,\, +\infty)$ і, отже, існує обернена до $M_G(\sigma)$ функція $M_G^{-1}(x)$, зростаюча до $+\infty$ на $[x_0,\, +\infty)$. Функція $M_F(\sigma)$ може бути обмеженою на $(-\infty,\, 0)$, але якщо $\varlimsup_{n\to\infty} |f_n| = +\infty$, то $M_F(\sigma)$ є неперервною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty,\, 0)$ і, отже, існує обернена до $M_F(\sigma)$ функція $M_F^{-1}(x)$, зростаюча до $0$ на $[x_0,\, +\infty)$. Далі будемо вважати, що умова $\varlimsup_{n\to\infty} |f_n| = +\infty$ виконується. Подібно до (4) означимо узагальнений порядок і узагальнений нижній порядок функції $F$ відносно функції $G$ формулами

$$\varrho^0_{\beta,\beta}[F]_G = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{\beta(M_G^{-1}(M_F(\sigma)))}{\beta(1/|\sigma|)}, \qquad \lambda^0_{\beta,\beta}[F]_G = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \frac{\beta(M_G^{-1}(M_F(\sigma)))}{\beta(1/|\sigma|)}.$$

**Теорема 1.** *Якщо* $\alpha \in L,\ \beta \in L,\ F \in S(\Lambda,\, 0)$ *і* $G \in S(\Lambda,\, +\infty)$, *то*:

1) *нерівність* $\varrho^0_{\beta,\beta}[F]_G \geq \varrho^0_{\alpha,\beta}[F]/\varrho_{\alpha,\beta}[G]$ *є правильною за винятком випадків, коли* $\varrho^0_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha,\beta}[G] = 0$ *або* $\varrho^0_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha,\beta}[G] = +\infty$, *а за умови узагальненого регулярного* $(\alpha,\beta)$*-зростання функції* $G$ *ця нерівність перетворюється в рівність*;

2) *нерівність* $\lambda^0_{\beta,\beta}[F]_G \leq \lambda^0_{\alpha,\beta}[F]/\lambda_{\alpha,\beta}[G]$ *є правильною за винятком випадків, коли* $\lambda^0_{\alpha,\beta}[F] = \lambda_{\alpha,\beta}[G] = 0$ *або* $\lambda^0_{\alpha,\beta}[F] = \lambda_{\alpha,\beta}[G] = +\infty$, *а за умови узагальненого регулярного* $(\alpha,\beta)$*-зростання функції* $G$ *ця нерівність перетворюється в рівність.*

***Доведення.*** Справді,

$$\varrho^0_{\beta,\beta}[F]_G = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\beta(M_G^{-1}(x))}{\beta(1/|M_F^{-1}(x)|)} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\ln\, x)}{\beta(1/|M_F^{-1}(x)|)} \frac{\beta(M_G^{-1}(x))}{\alpha(\ln\, x)} \geq$$

$$\geq \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\ln\, x)}{\beta(1/|M_F^{-1}(x)|)} \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\beta(M_G^{-1}(x))}{\alpha(\ln\, x)} =$$

$$= \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{\alpha(\ln\, M_F(\sigma))}{\beta(1/|\sigma|)} \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\beta(\sigma)}{\alpha(\ln\, M_G(\sigma))} = \frac{\varrho^0_{\alpha,\beta}[F]}{\varrho_{\alpha,\beta}[G]}$$

і

$$\varrho^0_{\beta,\beta}[F]_G \leq \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\ln\, x)}{\beta(1/|M_F^{-1}(x)|)} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\beta(M_G^{-1}(x))}{\alpha(\ln\, x)} =$$

$$= \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{\alpha(\ln\, M_F(\sigma))}{\beta(1/|\sigma|)} \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\beta(\sigma)}{\alpha(\ln\, M_G(\sigma))} = \frac{\varrho^0_{\alpha,\beta}[F]}{\lambda_{\alpha,\beta}[G]}.$$

Звідси випливає перша частина теореми 1.

Доведення другої частини подібне. Справді,

$$\lambda^0_{\beta,\beta}[F]_G = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\ln\, x)}{\beta(1/|M_F^{-1}(x)|)} \frac{\beta(M_G^{-1}(x))}{\alpha(\ln\, x)} \leq$$

$$\leq \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\ln x)}{\beta(1/|M_F^{-1}(x)|)} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\beta(M_G^{-1}(x))}{\alpha(\ln x)} = \frac{\lambda^0_{\alpha,\beta}[F]}{\lambda_{\alpha,\beta}[G]}$$

і

$$\lambda^0_{\beta,\beta}[F]_G \geq \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\ln x)}{\beta(1/|M_F^{-1}(x)|)} \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\beta(M_G^{-1}(x))}{\alpha(\ln x)} = \frac{\lambda^0_{\alpha,\beta}[F]}{\varrho_{\alpha,\beta}[G]},$$

звідки випливає друга частина теореми 1.

Якщо виберемо $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = x$ для $x \geq 3$, то з (2) отримаємо означення $R$-порядку $\varrho_R[G]$ і нижнього $R$-порядку $\lambda_R[G]$, введених Ж. Ріттом [12] для функції $G \in S(\Lambda, +\infty)$, а з (5) — означення $R$-порядку $\varrho^0_R[F]$ і нижнього $R$-порядку $\lambda^0_R[F]$, введених А.М. Гайсіним [13] для функції $F \in S(\Lambda, 0)$. Величини $\varrho^0_R[F]_G = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| M_G^{-1}(M_F(\sigma))$ і $\lambda^0_R[F]_G = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| M_G^{-1}(M_F(\sigma))$ назвемо відповідно $R$-порядком і нижнім $R$-порядком функції $F \in S(\Lambda, 0)$ відносно функції $G \in S(\Lambda, +\infty)$.

З теореми 1 випливає такий наслідок.

***Наслідок 1.*** *Якщо $0 < \lambda_R[G] \leq \varrho_R[G] < +\infty$, то виконуються нерівності $\varrho^0_R[F]_G \geq \varrho^0_R[F]/\varrho_R[G]$ і $\lambda^0_R[F]_G \leq \lambda^0_R[F]/\lambda_R[G]$, а за умови регулярного зростання функції $G$ (а саме $0 < \lambda_R[G] = \varrho_R[G] < +\infty$) ці нерівності перетворюються в рівності.*

Якщо виберемо $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$ для $x \geq 3$, то з (2) отримаємо означення логарифмічних порядку $\varrho_l[G]$ і нижнього порядку $\lambda_l[G]$ для функції $G \in S(\Lambda, +\infty)$, а з (5) — означення логарифмічних порядку $\varrho^0_l[F]$ і нижнього порядку $\lambda^0_l[F]$ для функції $F \in S(\Lambda, 0)$. Величини $\varrho^0_l[F]_G = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \dfrac{\ln M_G^{-1}(M_F(\sigma))}{\ln(1/|\sigma|)}$ і $\lambda^0_l[F]_G = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \dfrac{\ln M_G^{-1}(M_F(\sigma))}{\ln(1/|\sigma|)}$ назвемо логарифмічними порядком і нижнім порядком функції $F \in S(\Lambda, 0)$ відносно функції $G \in S(\Lambda, +\infty)$ відповідно. Зауважимо, що $\lambda_l[G] \geq 1$ для кожного $G \in S(\Lambda, +\infty)$. Тому з теореми 1 випливає також таке твердження.

***Наслідок 2.*** *Якщо $\varrho_l[G] < +\infty$, то $\varrho^0_l[F]_G \geq \varrho^0_l[F]/\varrho_l[G]$ і $\lambda^0_l[F]_G \leq \lambda^0_l[F]/\lambda_l[G]$, а за умови регулярного логарифмічного зростання функції $G$ (а саме $\lambda_l[G] = \varrho_l[G] < +\infty$) ці нерівності перетворюються в рівності.*

Для детальнішого опису зростання рядів Діріхле скінченного ненульового $R$-порядку використовують поняття $R$-типу. Для функції $G \in S(\Lambda, +\infty)$ $R$-порядку $\varrho_R[G] \in (0, +\infty)$ величини $T_R[G] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \exp\{-\sigma\varrho_R[G]\} \ln M_G(\sigma)$ і $t_R[G] = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \exp\{-\sigma\varrho_R[G]\} \ln M_G(\sigma)$ називаються $R$-типом і нижнім $R$-типом. Аналогічно $T^0_R[F] = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \exp\{-\varrho^0_R[F]/|\sigma|\} \ln M_F(\sigma)$ і $t^0_R[F] = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \exp\{-\varrho^0_R[F]/|\sigma|\} \ln M_F(\sigma)$ для функції $F \in S(\Lambda, 0)$ $R$-порядку $\varrho^0_R[F] \in (0, +\infty)$. Нарешті, нехай $T^0_R[F]_G = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \exp\{-\varrho^0_R[F]_G/|\sigma|\} \exp\{M_G^{-1}(M_F(\sigma))\}$ і $t^0_R[F]_G = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \exp\{-\varrho^0_R[F]_G/|\sigma|\} \exp\{M_G^{-1}(M_F(\sigma))\}$ — відповідно $R$-тип і нижній $R$-тип функції $F \in S(\Lambda, 0)$ відносно функції $G \in S(\Lambda, +\infty)$.

З означення $T_R[G]$ і $T^0_R[F]$ видно, що з теореми 1 не можна отримати відповідний наслідок для $T^0_R[F]_G$. Проте правильним є такий аналог теореми A.

**Твердження 1.** *Припустимо, що функція $G$ має регулярне зростання і $0 < t_R[G] \leq T_R[G] < \infty$. Тоді $T^0_R[F]_G \geq (T^0_R[F]/T_R[G])^{1/\varrho_R[G]}$ і $t^0_R[F]_G \leq (t^0_R[F]/t_R[G])^{1/\varrho_R[G]}$, а за умови сильно регулярного зростання функції $G$ (а саме $0 < t_R[G] = T_R[G] < \infty$) ці нерівності перетворюються в рівності.*

***Доведення.*** Оскільки $G$ має регулярне зростання, за наслідком 1 $\varrho^0_R[F]_G = \varrho^0_R[F]/\varrho_R[G]$. Тому

$$T_R^0[F]_G = \overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} \frac{\exp\{M_G^{-1}(M_F(\sigma))\}}{\exp\{\varrho_R^0[F]_G/|\sigma|\}} = \overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} \left(\frac{\exp\{\varrho_R[G]M_G^{-1}(M_F(\sigma))\}}{\exp\{\varrho_R^0[F]/|\sigma|\}}\right)^{1/\varrho_R[G]},$$

тобто

$$(T_R^0[F]_G)^{\varrho_R[G]} = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\exp\{\varrho_R[G]M_G^{-1}(x)\}}{\exp\{\varrho_R^0[F]/|M_F^{-1}(x)|\}} =$$

$$= \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\exp\{\varrho_R[G]M_G^{-1}(x)\}}{\ln x} \frac{\ln x}{\exp\{\varrho_R^0[F]_G/|M_F^{-1}(x)|\}} \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln x}{\exp\{\varrho_R^0[F]/|M_F^{-1}(x)|\}} \underline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{\exp\{\varrho_R[G]M_G^{-1}(x)\}}{\ln x} =$$

$$= \overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} \frac{\ln M_F(\sigma)}{\exp\{\varrho_R^0[F]/|\sigma|\}} \underline{\lim}_{\sigma\to+\infty} \frac{\exp\{\varrho_R[G]\sigma\}}{\ln M_G(\sigma)} = \frac{T_R^0[F]}{T_R[G]}$$

і

$$(T_R^0[F]_G)^{\varrho_R[G]} = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\exp\{\varrho_R[G]M_G^{-1}(x)\}}{\ln x} \frac{\ln x}{\exp\{\varrho_R^0[F]_G/|M_F^{-1}(x)|\}} \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln x}{\exp\{\varrho_R^0[F]/|M_F^{-1}(x)|\}} \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\exp\{\varrho_R[G]M_G^{-1}(x)\}}{\ln x} = \frac{T_R^0[F]}{t_R[G]},$$

звідки випливає перша частина твердження 1. Друга частина доводиться аналогічно.

Для функції $G \in S(\Lambda, +\infty)$ логарифмічного порядку $\varrho_l[G] \in (1, +\infty)$ величини $T_l[G] = \overline{\lim}_{\sigma\to+\infty} \sigma^{-\varrho_l[G]} \ln M_F(\sigma)$ і $t_l[G] = \underline{\lim}_{\sigma\to+\infty} \sigma^{-\varrho_l[G]} \ln M_F(\sigma)$ називаються відповідно логарифмічним типом і нижнім логарифмічним типом. Аналогічно $T_l^0[F] = \overline{\lim}_{\sigma\uparrow 0} |\sigma|^{\varrho_l^0[F]} \ln M_F(\sigma)$ і $t_l^0[F] = \underline{\lim}_{\sigma\uparrow 0} |\sigma|^{\varrho_l^0[F]} \ln M_F(\sigma)$ для функції $F \in S(\Lambda, 0)$ логарифмічного порядку $\varrho_l^0[F] \in (0, +\infty)$. Нехай також $T_l^0[F]_G = \overline{\lim}_{\sigma\uparrow 0} |\sigma|^{\varrho_l^0[F]_G} M^{-1}(M_F(\sigma))$ і $t_l^0[F]_G = \underline{\lim}_{\sigma\uparrow 0} |\sigma|^{\varrho_l^0[F]_G} M^{-1}(M_F(\sigma))$ — відповідно логарифмічний тип і нижній логарифмічний тип функції $F \in S(\Lambda, 0)$ відносно функції $G \in S(\Lambda, +\infty)$.

Доведення наступного твердження подібне до доведення твердження 1, і ми його не наводимо.

**Твердження 2.** *Припустимо, що функція $G$ має регулярне логарифмічне зростання і $0 < t_l[G] \leq T_l[G] < \infty$. Тоді $T_l^0[F]_G \geq (T_l^0[F]/T_l[G])^{1/\varrho_l[G]}$ і $t_l^0[F]_G \leq (t_l^0[F]/t_l[G])^{1/\varrho_l[G]}$, а за умови сильно регулярного логарифмічного зростання функції $G$ (а саме $0 < t_l[G] = T_l[G] < \infty$) ці нерівності перетворюються в рівності.*

**3. Аналоги теореми Б.** Нам потрібні такі леми.

**Лема 1** [9, 14]. *Нехай $\alpha \in L_{si}$, $\beta \in L_{si}$ і $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$. Якщо $G \in S(\Lambda, +\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ при $n \to \infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, то*

$$\varrho_{\alpha,\beta}[G] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha(\lambda_n)/\beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|g_n|}\right). \tag{6}$$

*Якщо, крім цього, $\alpha(\lambda_{n+1}) \sim \alpha(\lambda_n)$ і $\kappa_n[G] \nearrow +\infty$ при $n_0 \leq n \to \infty$, то*

$$\lambda_{\alpha,\beta}[G] = \underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha(\lambda_n)/\beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|g_n|}\right).$$

**Лема 2** [15]. *Нехай* $\alpha \in L_{si},\ \beta \in L_{si},\ x/\beta^{-1}(c\alpha(x)) \uparrow +\infty$ *і* $\alpha\left(x/\beta^{-1}(c\alpha(x))\right) = (1 + +o(1))\alpha(x)$ *при* $x \to +\infty$ *для кожного* $c \in (0, +\infty)$. *Якщо* $F \in S(\Lambda, 0)$ *і* $\alpha(\lambda_n) = o\left(\beta\left(\lambda_n / \ln n\right)\right)$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\varrho^0_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\lambda_n/\ln|f_n|\right)}. \tag{7}$$

*Якщо, крім цього,* $\alpha(\lambda_{n+1}) \sim \alpha(\lambda_n)$ *і* $\kappa_n[F] \nearrow 0$ *при* $n_0 \le n \to \infty$, *то*

$$\lambda^0_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\lambda_n/\ln|f_n|\right)}.$$

Основним результатом статті є така теорема.

**Теорема 2.** *Нехай* $\alpha(e^x) \in L^0,\ \beta \in L_{si}$ *і* $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ *при* $x \to +\infty$ *для кожного* $c \in (0, +\infty)$. *Припустимо, що* $\alpha(\lambda_n) = o(\beta(\lambda_n/\ln n))$ *при* $n \to \infty$. *Якщо функція* $G$ *має регулярне узагальнене* $(\alpha, \beta)$*-зростання і* $\kappa_n[G] \nearrow +\infty$ *при* $n_0 \le n \to \infty$, *то*

$$\varrho^0_{\beta,\beta}[F]_G = P_\beta := \varlimsup_{n\to\infty} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|g_n|}\right)\Big/\beta\left(\frac{\lambda_n}{\ln|f_n|}\right). \tag{8}$$

*Якщо, крім цього,* $\alpha(\lambda_{n+1}) \sim \alpha(\lambda_n)$ *і* $\kappa_n[F] \nearrow +0$ *при* $n_0 \le n \to \infty$, *то*

$$\lambda^0_{\beta,\beta}[F]_G = p_\beta := \varliminf_{n\to\infty} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|g_n|}\right)\Big/\beta\left(\frac{\lambda_n}{\ln|f_n|}\right). \tag{9}$$

***Доведення.*** З огляду на умову $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ при $x \to +\infty$ маємо

$$(\ln x - \ln\beta^{-1}(c\alpha(x)))' = \frac{1}{x} - \frac{1}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\frac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{dx} =$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\frac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x}\right) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{O(1)}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right) = \frac{1+o(1)}{x} > 0$$

при $x \to +\infty$, звідки випливає, що $x/\beta^{-1}(c\alpha(x)) \uparrow +\infty$ при $x \to +\infty$.

Оскільки $\ln\beta^{-1}(c\alpha(x))/\ln x \to 0$ при $x \to +\infty$ і $\alpha(e^x) \in L^0$, маємо

$$\alpha\left(x/\beta^{-1}(c\alpha(x))\right) = \alpha(\exp\{\ln x - \ln\beta^{-1}(c\alpha(x))\}) =$$

$$= \alpha(e^{(1+o(1))\ln x}) = (1+o(1))\alpha(e^{\ln x}) = (1+o(1))\alpha(x), \quad x \to +\infty.$$

Зауважимо також, що якщо $\alpha(e^x) \in L^0$, то $\alpha \in L_{si}$.

З умови $\alpha(\lambda_n) = o\left(\beta\left(\lambda_n/\ln n\right)\right)$ при $n \to \infty$ випливає, що $\alpha(\lambda_n) \le \beta\left(\lambda_n/\ln n\right)$ для $n \ge \ge n_0$, і тому $\ln n \le \lambda_n/\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)) = o(\lambda_n\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ при $n \to \infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$. Отже, функції $\alpha$, $\beta$ і послідовність $(\lambda_n)$ задовольняють умови лем 1 і 2.

Оскільки $G$ має регулярне $(\alpha, \beta)$-зростання, за теоремою 1 $\varrho^0_{\beta,\beta}[F]_G = \varrho^0_{\alpha,\beta}[F]/\varrho_{\alpha,\beta}[G]$ і $\lambda^0_{\beta,\beta}[F]_G = \lambda^0_{\alpha,\beta}[F]/\lambda_{\alpha,\beta}[G]$. Тому з (6) і (7) отримуємо

$$\varrho^0_{\beta,\beta}[F]_G = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\lambda_n/\ln|f_n|\right)} \varliminf_{n\to\infty} \frac{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|g_n|}\right)}{\alpha(\lambda_n)} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|g_n|}\right)}{\beta\left(\lambda_n/\ln|f_n|\right)} = P_\beta.$$

З іншого боку, якщо $P_\beta > 0$, то для кожного $\varepsilon \in (0, P_\beta)$ існує така зростаюча до $+\infty$ послідовність $(n_k)$ натуральних чисел, що $\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_{n_k}}\ln\dfrac{1}{|g_{n_k}|}\right) > (P_\beta-\varepsilon)\beta\left(\dfrac{\lambda_{n_k}}{\ln|f_{n_k}|}\right)$ і, отже,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln|f_n|}\right)} > (P_\beta-\varepsilon)\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|g_n|}\right)}.$$

Оскільки $\varrho_{\alpha,\beta}[G]=\lambda_{\alpha,\beta}[G]$, звідси з огляду на лему 1 отримуємо нерівність $\varrho^0_{\alpha,\beta}[F]\ge(P_\beta-\varepsilon)\varrho_{\alpha,\beta}[G]$, тобто внаслідок довільності $\varepsilon$ маємо $\varrho^0_{\beta,\beta}[F]_G=\varrho^0_{\alpha,\beta}[F]/\varrho_{\alpha,\beta}[G]\le P_\beta$. Для $P_\beta=0$ ця нерівність очевидна. Рівність (8) доведено.

Для доведення рівності (9) зауважимо, що оскільки $G$ має регулярне узагальнене $(\alpha,\beta)$-зростання, за теоремою 1 і лемами 1 та 2

$$\lambda^0_{\beta,\beta}[F]_G=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\lambda_n/\ln|f_n|\right)}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|g_n|}\right)}{\alpha(\lambda_n)}\ge\varliminf_{n\to\infty}\frac{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|g_n|}\right)}{\beta\left(\lambda_n/\ln|f_n|\right)}=p_\beta.$$

З іншого боку, якщо $p_\beta<+\infty$, то для кожного $\varepsilon>0$ існує така зростаюча до $+\infty$ послідовність $(n_k)$ натуральних чисел, що $\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_{n_k}}\ln\dfrac{1}{|g_{n_k}|}\right)<(p_\beta+\varepsilon)\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_{n_k}}\ln|f_{n_k}|\right)$, тобто

$$\lambda^0_{\alpha,\beta}[F]=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln|f_n|}\right)}\le(p_\beta+\varepsilon)\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|g_n|}\right)}=$$

$$=(p_\beta+\varepsilon)\varrho_{\alpha,\beta}[G]=(p_\beta+\varepsilon)\lambda_{\alpha,\beta}[G].$$

Звідси отримуємо нерівність $\lambda^0_{\beta,\beta}[F]_G=\lambda^0_{\alpha,\beta}[F]/\lambda_{\alpha,\beta}[G]\le p_\beta$. Для $p_\beta=+\infty$ ця нерівність є очевидною. Рівність (9), а отже, і теорему 2 доведено.

Для рядів скінченного $R$-порядку правильним є таке твердження.

**Твердження 3.** *Нехай* $\ln n=o(\lambda_n/\lambda_n)$ *при* $n\to\infty$. *Якщо функція* $G$ *має регулярне зростання і* $\kappa_n[G]\nearrow+\infty$ *при* $n_0\le n\to\infty$, *то* $\varrho^0_R[F]_G=\varlimsup_{n\to\infty}\lambda_n^{-2}\ln|f_n|\ln(1/|g_n|)$. *Якщо, крім цього,* $\ln\lambda_{n+1}\sim\ln\lambda_n$ *і* $\kappa_n[F]\nearrow+0$ *при* $n_0\le n\to\infty$, *то* $\lambda^0_R[F]_G=\varliminf_{n\to\infty}\lambda_n^{-2}\ln|f_n|\ln(1/|g_n|)$.

Формули для $\varrho^0_R[F]_G$ і $\lambda^0_R[F]_G$ випливають з формул (8) і (9), якщо вибрати $\alpha(x)=\ln x$ і $\beta(x)=x$ для $x\ge3$, але твердження 3 не випливає з теореми 2, тому що $\beta(x)=x\notin L_{si}$. Проте можна легко довести твердження 3, використавши наслідок 1 і такі леми.

**Лема 3** [12, 16, 17]**.** *Якщо* $\ln n=o(\lambda_n\ln\lambda_n)$ *при* $n\to\infty$ *і* $G\in S(\Lambda,+\infty)$, *то* $\varrho_R[G]=\varlimsup_{n\to\infty}\lambda_n\ln\lambda_n/\ln(1/|g_n|)$. *Якщо, крім цього,* $\ln\lambda_{n+1})\sim\ln\lambda_n$ *і* $\kappa_n[G]\nearrow+\infty$ *при* $n_0\le n\to\infty$, *то* $\lambda_R[G]=\varliminf_{n\to\infty}\lambda_n\ln\lambda_n/\ln(1/|g_n|)$.

**Лема 4** [13]**.** *Якщо* $\ln n=o(\lambda_n/\ln\lambda_n)$ *при* $n\to\infty$ *і* $F\in S(\Lambda,0)$, *то* $\varrho^0_R[F]=\varlimsup_{n\to\infty}(\ln\lambda_n\ln|f_n|)/\lambda_n$. *Якщо, крім цього,* $\alpha(\lambda_{n+1})\sim\alpha(\lambda_n)$ *і* $\kappa_n[F]\nearrow0$ *при* $n_0\le n\to\infty$, *то* $\lambda^0_R[F]=\varliminf_{n\to\infty}(\ln\lambda_n\ln|f_n|)/\lambda_n$.

Для логарифмічних порядків в [14] доведено, що якщо $\varlimsup_{n\to\infty}\ln\ln n/\ln\lambda_n\le1$ і $G\in S(\Lambda,+\infty)$, то $(\varrho_l[G]-1)/\varrho_l[G]=\varlimsup_{n\to\infty}\ln\lambda_n/\ln\ln(1/|g_n|)$, а якщо, крім цього, $\ln\lambda_{n+1})\sim\ln\lambda_n$ і $\kappa_n[G]\nearrow+\infty$ при $n_0\le n\to\infty$, то $(\lambda_l[G]-1)/\lambda_l[G]=\varliminf_{n\to\infty}\ln\lambda_n/\ln\ln(1/|g_n|)$.

З іншого боку [18], якщо $\overline{\lim}_{n\to\infty} \ln\ln n/\ln\lambda_n = 0$ і $F\in S(\Lambda,0)$, то $\varrho_l[F]/(\varrho_l[F]+1) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \ln\ln|f_n|/\ln\lambda_n$, а якщо, крім цього, $\ln\lambda_{n+1}\sim\ln\lambda_n$ і $\kappa_n[F]\nearrow 0$ при $n_0\le n\to\infty$, то $\lambda_l[F]/(\lambda_l[F]+1) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \ln\ln|f_n|/\ln\lambda_n$.

Використовуючи ці результати і наслідок 2, можна довести таке твердження.

**Твердження 4.** *Нехай* $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$ *при* $n\to\infty$. *Якщо функція* $G$ *має регулярне логарифмічне зростання і* $\kappa_n[G]\nearrow+\infty$ *при* $n_0\le n\to\infty$, *то*

$$\varrho_l^0[F]_G = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(\ln\ln(1/|g_n|)-\ln\lambda_n)\ln\ln|f_n|}{(\ln\lambda_n-\ln\ln|f_n|)\ln\ln(1/|g_n|)}.$$

*Якщо, крім цього,* $\ln\lambda_{n+1}\sim\ln\lambda_n$ *і* $\kappa_n[F]\nearrow 0$ *при* $n_0\le n\to\infty$, *то*

$$\lambda_l^0[F]_G = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(\ln\ln(1/|g_n|)-\ln\lambda_n)\ln\ln|f_n|}{(\ln\lambda_n-\ln\ln|f_n|)\ln\ln(1/|g_n|)}.$$

Перейдемо до логарифмічних типів. У [14] доведено, що якщо $G\in S(\Lambda,+\infty)$ і $\ln n = o\big(\lambda_n^{\varrho_l[G]/(\varrho_l[G]-1)}\big)$ при $n\to\infty$, то $T_l[G] = A(\varrho_l[G])\,\overline{\lim}_{n\to\infty}\lambda_n^{\varrho_l[G]}\ln^{1-\varrho_l[G]}(1/|g_n|)$, де $A(\varrho) = (\varrho-1)^{\varrho-1}\varrho^{\varrho}$, а якщо, крім цього, $\lambda_{n+1}\sim\lambda_n$ і $\kappa_n[G]\nearrow+\infty$ при $n_0\le n\to\infty$, то $t_l[G] = A(\varrho_l[G])\,\underline{\lim}_{n\to\infty}\lambda_n^{\varrho_l[G]}\ln^{1-\varrho_l[F]}(1/|g_n|)$.

З іншого боку [18], якщо $F\in S(\Lambda,0)$ і $\ln n = o\big(\lambda_n^{\varrho_l^0[G]/(\varrho_l^0[G]+1)}\big)$ при $n\to\infty$, то $T_l^0[F] = B(\varrho_l^0[F])\,\overline{\lim}_{n\to\infty}\lambda_n^{-\varrho_l^0[G]}\ln^{1+\varrho_l^0[G]}|f_n|$, де $B(\varrho) = (\varrho+1)^{\varrho+1}\varrho^{\varrho}$, а якщо, крім цього, $\lambda_{n+1}\sim\lambda_n$ і $\kappa_n[F]\nearrow 0$ при $n_0\le n\to\infty$, то $t_l^0[F] = B(\varrho_l^0[F])\,\underline{\lim}_{n\to\infty}\lambda_n^{-\varrho_l^0[G]}\ln^{1+\varrho_l^0[G]}|f_n|$. Зрозуміло, що якщо $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$ при $n\to\infty$, то $\ln n = o(\lambda_n^p)$ при $n\to\infty$ для кожного $p>0$. Тому на підставі цих результатів і твердження 2 звичним методом доводиться таке твердження.

**Твердження 5.** *Нехай* $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$ *при* $n\to\infty$. *Якщо функція* $G$ *має строго регулярне логарифмічне зростання і* $\kappa_n[G]\nearrow+\infty$ *при* $n_0\le n\to\infty$, *то*

$$(T_l^0[F]_G)^{\varrho_l[G]} = \frac{B(\varrho_l^0[F])}{A(\varrho_l[F])}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{(\ln(1/|g_n|)^{\varrho_l[G]-1}(\ln|f_n|)^{\varrho_l^0[F]+1}}{\lambda_n^{\varrho_l[G]+\varrho_l^0[F]}}.$$

*Якщо, крім цього,* $\lambda_{n+1}\sim\lambda_n$ *і* $\kappa_n[F]\nearrow 0$ *при* $n_0\le n\to\infty$, *то*

$$(t_l^0[F]_G)^{\varrho_l[G]} = \frac{B(\varrho_l^0[F])}{A(\varrho_l[F])}\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{(\ln(1/|g_n|)^{\varrho_l[G]-1}(\ln|f_n|)^{\varrho_l^0[F]+1}}{\lambda_n^{\varrho_l[G]+\varrho_l^0[F]}}.$$

Насамкінець розглянемо $R$-типи. В [12, 14] доведено, що якщо $G\in S(\Lambda,+\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n\to\infty$, то $T_R[G] = \overline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n}{e\varrho_R[G]}|g_n|^{\varrho_R[G]/\lambda_n}$, а якщо, крім цього, $\lambda_{n+1}\sim\lambda_n$ і $\kappa_n[G]\nearrow+\infty$ при $n_0\le n\to\infty$, то $t_R[G] = \underline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n}{e\varrho_R[G]}|g_n|^{\varrho_R[G]/\lambda_n}$.

З іншого боку [19], якщо $F\in S(\Lambda,0)$ і $\ln n = O(\ln\lambda_n)$ при $n\to\infty$, то

$$T_R^0[F] = \frac{\varrho_R^0[F]}{e}\overline{\lim_{n\to\infty}}\exp\left\{\left(\ln\frac{\lambda_n}{\ln^2\lambda_n}\frac{\ln|f_n|}{\varrho_R^0[F]\lambda_n}-1\right)\lambda_n\right\},$$

а якщо, крім цього, $\lambda_{n+1}\sim\lambda_n$ і $\kappa_n[F]\nearrow 0$ при $n_0\le n\to\infty$, то

$$t^0_R[F] = \frac{\varrho^0_R[F]}{e} \varliminf_{n\to\infty} \exp\left\{\left(\ln \frac{\lambda_n}{\ln^2 \lambda_n} \frac{\ln |f_n|}{\varrho^0_R[F]\lambda_n} - 1\right)\lambda_n\right\}.$$

Використовуючи ці результати і твердження 1, можемо довести таке твердження.

**Твердження 6.** *Нехай* $\ln n = O(\ln \lambda_n)$ *при* $n \to \infty$. *Якщо функція* $G$ *має строго регулярне зростання і* $\kappa_n[G] \nearrow +\infty$ *при* $n_0 \le n \to \infty$, *то*

$$(T^0_R[F]_G)^{\varrho_R[G]} = \frac{\varrho_R[G]\varrho^0_R[F]}{\lambda_n e^{\lambda_n}} \varlimsup_{n\to\infty} \exp\left\{\ln \frac{\lambda_n}{\ln^2 \lambda_n} \frac{\ln |f_n|}{\varrho^0_R[F]} + \frac{\varrho_R[G]}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|g_n|}\right\}.$$

*Якщо, крім цього,* $\lambda_{n+1} \sim \lambda_n$ *і* $\kappa_n[F] \nearrow 0$ *при* $n_0 \le n \to \infty$, *то*

$$(t^0_R[F]_G)^{\varrho_R[G]} = \frac{\varrho_R[G]\varrho^0_R[F]}{\lambda_n e^{\lambda_n}} \varliminf_{n\to\infty} \exp\left\{\ln \frac{\lambda_n}{\ln^2 \lambda_n} \frac{\ln |f_n|}{\varrho^0_R[F]} + \frac{\varrho_R[G]}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|g_n|}\right\}.$$

## Література


1. Ch. Roy, *On the relative order and lower order of an entire functiion*, Bull. Calcutta Math. Soc., **102**, № 1, 17 – 26 (2010).
2. S. K. Data, A. R. Maji, *Relative order of entire functions in terms of their maximum terms*, Int. J. Math. and Anal., **5**, № 43, 2119 – 2126 (2011).
3. S. K. Data, T. Biswas, Ch. Ghosh, *Growth analysis of entire functions concerning generalized relative type and generalized relative weak type*, Facta Univ. Ser. Math. and Inform., **30**, № 3, 295 – 324 (2015).
4. S. K. Data, T. Biswas, A. Hoque, *Some results on the growth analysis of entire function using their maximum terms and relative $L^*$-order*, J. Math. Ext., **10**, № 2, 59 – 73 (2016).
5. S. K. Data, T. Biswas, P. Das, *Some results on generalized relative order of meromorohic functions*, Ufa Math. J., **8**, № 2, 92 – 103 (2016).
6. S. K. Data, T. Biswas, *Growth analysis of entire functions of two complex variables*, Sahad Commun. Math. Anal., **3**, Issue 2, 13 – 22 (2016).
7. S. K. Data, T. Biswas, *Some growth analysis of entire functions in the form of vector valued Dirichlet series on the basis on their relative Ritt $L^*$-order and relative Ritt $L^*$-lower order*, New Trends Math. Sci., **5**, № 2, 97 – 103 (2017).
8. Я. Д. Пьяныло, М. Н. Шеремета, *О росте целых функций, представленных рядами Дирихле*, Изв. вузов. Математика, № 10, 91 – 93 (1975).
9. O. M. Mulyava, M. M. Sheremeta, *Relative growth of Dirichlet series*, Mat. Stud., **49**, № 2, 158 – 164 (2018).
10. O. M. Mulyava, M. M. Sheremeta, *Remarks to relative growth of entire Dirichlet series*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech., Math., № 87, 73 – 81 (2019).
11. Ю. М. Галь, М. Н. Шеремета, *О росте аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле*, Докл. АН УССР, сер. А, № 12, 1065 – 1067 (1978).
12. J. F. Ritt, *On certain points in the theory of Dirichlet series*, Amer. J. Math., **50**, 73 – 83 (1928).
13. А. М. Гайсин, *Оценки роста функций, представленных рядами Дирихле в полуплоскости*, Мат. сб., **117**, № 3, 412 – 424 (1982).
14. М. М. Шеремета, *Асимптотическое поведение целых функций, заданных степенными рядами и рядами Дирихле*, Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук, Киев (1987).
15. Ю. М. Галь, *О росте аналитических функций, заданных абсолютно сходящимися в полуплоскости рядами Дирихле*, Дрогобыч (1980), 30 с., Деп. в ВИНИТИ, № 4080-80Деп.
16. A. G. Azpeitia, *A remark on the Ritt order of entire functions defined by Dirichlet series*, Proc. Amer. Math. Soc., **12**, 722 – 723 (1961).
17. A. G. Azpeitia, *On the lower linear type of entire functions defined by Dirichlet series*, Bull. Unione Mat. Ital. A, **15**, № 3, 635 – 638 (1978).
18. В. С. Бойчук, *О росте рядов Дирихле, абсолютно сходящихся в полуплоскости*, Мат. сб., Наук. думка, Киев (1976), p. 238 – 240.
19. М. М. Шеремета, С. И. Федыняк, *О производной ряда Дирихле*, Сиб. мат. журн., **39**, № 1, 206 – 223 (1998).


Одержано 17.06.20