DOI: 10.37863/umzh.v73i7.6192

УДК 512.542

Ю. Мао*, С. Ма (Ін-т квантової інформатики, Університет Шаньси Датун, Китай),
М. Т. Воробйов, Т. Б. Караулова**** (Вітеб. держ. ун-т ім. П. М. Машерова, Білорусь)

ПРО ПІДГРУПИ ФІШЕРА СКІНЧЕННИХ ГРУП

Let $\mathscr{F}$ be a Fitting set of a group G, π be a nonempty set of primes, and $L \leq G$. In this case, $\mathscr{F}$ is called a *Fischer π-set of* G if conditions $L \in \mathscr{F}$, $K \trianglelefteq L$, and H/K is a p-subgroup of L/K for a prime $p \in \pi$ imply necessarily that $H \in \mathscr{F}$. It is said that a subgroup F of G is a *Fischer $\mathscr{F}$-subgroup* of G if the following conditions hold: 1) $F \in \mathscr{F}$; 2) if L is an $\mathscr{F}$-subgroup of G normalized by F, then $L \leq F$. It is said that a Fitting set $\mathscr{F}$ of G is *π-saturated* if $\mathscr{F} = \{H \leq G : H/H_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{E}_{\pi'}\}$, where $\mathfrak{E}_{\pi'}$ is the class of all π'-groups.

In this paper, under the condition that $\mathscr{F}$ is a π-saturated Fischer π-set of a π-soluble group G, we prove that a subgroup V of G is an $\mathscr{F}$-injector of G if and only if V is a Fischer $\mathscr{F}$-subgroup of G containing a Hall π'-subgroup of G.

Нехай $\mathscr{F}$ — множина Фіттінга групи G, π — деяка непорожня множина простих чисел і $L \leq G$. $\mathscr{F}$ називається *π-множиною Фішера* G, якщо з того, що $L \in \mathscr{F}$, $K \trianglelefteq L$ і H/K є p-підгрупою L/K для деякого $p \in \pi$, завжди випливає $H \in \mathscr{F}$. Підгрупа F групи G називається *$\mathscr{F}$-підгрупою Фішера* G, якщо справджуються такі твердження: 1) $F \in \mathscr{F}$; 2) якщо L є $\mathscr{F}$-підгрупою G, нормалізовною F, то $L \leq F$.

Множина Фіттінга $\mathscr{F}$ групи G називається *π-насиченою*, якщо $\mathscr{F} = \{H \leq G : H/H_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{E}_{\pi'}\}$, де $\mathfrak{E}_{\pi'}$ — клас усіх π'-груп. У даній статті доведено, що якщо $\mathscr{F}$ є π-насиченою π-множиною Фішера π-розв'язної групи G, то підгрупа V групи G є $\mathscr{F}$-ін'єктором G тоді й тільки тоді, коли V є $\mathscr{F}$-підгрупою Фішера G, яка містить холлівську π'-підгрупу G.

1. Вступ. Усі розглядувані групи вважатимемо скінченними, G позначає скінченну групу. Ми будемо дотримуватися позначень і термінології [3].

Нагадаємо, що клас $\mathfrak{F}$ груп називається: *формацією*, якщо він замкнений відносно взяття гомоморфних образів і підпрямих добутків; *класом Фіттінга*, якщо він замкнений відносно нормальних підгруп і добутків нормальних $\mathfrak{F}$-підгруп. Для класу $\mathfrak{F}$ підгрупа V групи G називається *$\mathfrak{F}$-максимальною* в G, якщо $V \in \mathfrak{F}$ і $U = V$ за умови, що $V \leq U \leq G$ і $U \in \mathfrak{F}$.

Очевидно, що для непорожньої формації $\mathfrak{F}$ кожна група G має найменшу нормальну підгрупу $G^{\mathfrak{F}}$ таку, що $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$; для непорожнього класу Фіттінга $\mathfrak{F}$ кожна група G має найбільшу нормальну $\mathfrak{F}$-підгрупу $G_{\mathfrak{F}}$. Ми називаємо $G^{\mathfrak{F}}$ і $G_{\mathfrak{F}}$ *$\mathfrak{F}$-корадикалом* і *$\mathfrak{F}$-радикалом* групи G відповідно.

Формацією Фіттінга називається клас груп, який є одночасно формацією і класом Фіттінга. В теорії формацій розв'язних груп основоположним результатом є теорема Гашюца [7] про існування і спряженість $\mathfrak{F}$-покривних підгруп у розв'язних групах для будь-якої насиченої формації $\mathfrak{F}$. Якщо $\mathfrak{F}$ є формацією, то підгрупа E групи G називається *$\mathfrak{F}$-покривною*, якщо виконуються такі умови: 1) $E \in \mathfrak{F}$; 2) якщо $E \leq H \leq G$ і $H/K \in \mathfrak{F}$, то $H = EK$.

У [5] Фішер визначив поняття, двоїсте $\mathfrak{F}$-покривним підгрупам для класу Фіттінга $\mathfrak{F}$, яке в подальшому почали називати *$\mathfrak{F}$-підгрупою Фішера* (див. [3], IX. 3.1). Нехай $\mathfrak{F}$ — непорожній клас Фіттінга. Підгрупа F групи G називається *$\mathfrak{F}$-підгрупою Фішера G*, якщо $F \in \mathfrak{F}$ і містить

* Дослідження підтримано НФСО Китаю (грант № 11901364) і науково-технічним інноваційним проєктом коледжів і університетів у провінції Шаньси Китаю (№ 2019Л0747).

** Дослідження виконано за підтримки Державної програми наукових досліджень Білорусі „Конвергенція” (2016 – 2020).

кожну $\mathfrak{F}$-підгрупу групи G, яка нормалізується F (див. [3], IX, теорема (4.7), і [8]). Очевидно, якщо F є $\mathfrak{F}$-підгрупою Фішера G і $F \leq H$, то F — $\mathfrak{F}$-підгрупа Фішера H.

Підгрупа V групи G називається $\mathfrak{F}$-*ін'єктором* G, якщо $V \cap N$ є $\mathfrak{F}$-максимальною підгрупою в N для кожної субнормальної підгрупи N групи G.

Фішер, Гашюц і Хартлі [6] довели, що для будь-якого класу Фіттінга $\mathfrak{F}$ у кожній розв'язній групі G існують $\mathfrak{F}$-ін'єктори і будь-які два з них є спряженими. Ця теорема є узагальненням фундаментальних теорем Силова (для множини всіх розв'язних груп) і Холла.

Легко бачити, що у розв'язній групі G кожен $\mathfrak{F}$-ін'єктор G є $\mathfrak{F}$-підгрупою Фішера G. Проте існують класи Фіттінга $\mathfrak{F}$ і розв'язні групи G такі, що $\mathfrak{F}$-підгрупа Фішера G не є $\mathfrak{F}$-ін'єктором G і $\mathfrak{F}$-підгрупи Фішера G не спряжені (див. [4] і [3], IX. 5.19).

Нагадаємо, що клас Фіттінга $\mathfrak{F}$ називається *класом Фішера*, якщо $\mathfrak{F}$ задовольняє такі умови: якщо $G \in \mathfrak{F}$, $H \leq G$ і H містить нормальну підгрупу N групи G таку, що H/N є p-підгрупою для деякого простого числа p, то $H \in \mathfrak{F}$ (див. [3, c. 601]).

Андерсон в [1] для розв'язних груп увів поняття множини Фіттінга групи G. Непорожня множина $\mathscr{F}$ підгрупи G називається *множиною Фіттінга групи* G, якщо виконуються такі умови: 1) якщо $S \in \mathscr{F}$ і T — нормальна підгрупа S, то $T \in \mathscr{F}$; 2) якщо $S, T \in \mathscr{F}$ і S, T — нормальні підгрупи ST, то $ST \in \mathscr{F}$; 3) якщо $S \in \mathscr{F}$ і $x \in G$, то $S^x \in \mathscr{F}$.

Поняття $\mathscr{F}$-ін'єктора G для множини Фіттінга групи G визначається, як і для класу Фіттінга.

Нехай $\mathbb{P}$ — множина всіх простих чисел, $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$ і $L \leq G$. Множину Фіттінга $\mathscr{F}$ групи G назвемо π-*множиною Фішера* G, якщо $H \in \mathscr{F}$ кожного разу, коли $K \trianglelefteq L \in \mathscr{F}$ і H/K є p-підгрупою L/K для деякого $p \in \pi$. Якщо $\pi = \mathbb{P}$, то π-множина Фішера G є множиною Фішера G (див. [3, c. 554]).

Наслідуючи [11], для множини Фіттінга $\mathscr{F}$ групи G і класу Фіттінга $\mathfrak{H}$ ми назвемо множину $\{H \leq G : H/H_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{H}\}$ *добутком* $\mathscr{F}$ і $\mathfrak{H}$ і позначимо $\mathscr{F} \circ \mathfrak{H}$.

π-Множина Фішера групи G називається π-*насиченою*, якщо $\mathscr{F} \circ \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathscr{F}$, де $\mathfrak{E}_{\pi'}$ — клас усіх π'-груп.

У теорії класів відомою є теорема Фішера [5] (див. також [3], VIII, наслідок (4.8)) про те, що *для класу Фішера $\mathfrak{F}$ розв'язної групи G $\mathfrak{F}$-підгрупи Фішера G збігаються з $\mathfrak{F}$-ін'єкторами G і утворюють єдиний клас спряжених підгруп.*

У зв'язку з цим природним є таке питання: *чи правильною є теорема Фішера для π-насиченої π-множини Фішера π-розв'язної групи G?*

Позитивну відповідь на вказане питання дає доведена нами теорема.

Теорема 1.1. *Нехай $\mathscr{F}$ — π-насичена π-множина Фішера π-розв'язної групи G. Підгрупа V групи G є $\mathscr{F}$-ін'єктором G тоді і тільки тоді, коли V є $\mathscr{F}$-підгрупою Фішера G, що містить холлівську π'-підгрупу G.*

Зауважимо, що якщо $\mathscr{F}$ — π-насичена множина Фіттінга π-розв'язної групи G, то $\mathscr{F}$-ін'єктори спряжені в G (див. [11], теорема B (2)). Тому безпосередньо з теореми 1.1 випливають такі наслідки.

***Наслідок* 1.1.** *Нехай $\mathscr{F}$ — π-насичена π-множина Фішера π-розв'язної групи G. Тоді $\mathscr{F}$-підгрупи Фішера, що містять холлівську π'-підгрупу G, спряжені в G.*

***Наслідок* 1.2** (Фішер [5], Хартлі [8], теорема 1)**.** *Нехай $\mathfrak{F}$ — розв'язний клас Фішера. Тоді кожна розв'язна група G має єдиний клас спряжених $\mathfrak{F}$-підгруп Фішера.*

2. Попередні відомості. Нагадаємо, що група G називається *π-розв'язною*, якщо кожен головний фактор групи G є або абелевою π-групою, або π'-групою. Підгрупа H групи G називається *холлівською π-підгрупою* G, якщо $|H|$ є π-числом, а індекс $|G\colon H|$ — π'-числом. Будемо позначати символом G_π деяку холлівську π-підгрупу групи G, а символом $\mathfrak{S}^\pi$ клас усіх π-розв'язних груп.

Наведемо в якості лем відомі твердження, які ми будемо використовувати в доведенні теореми 1.1.

Лема 2.1 ([11], теорема A (2) і лема 4.2)**.** *Нехай $G \in \mathfrak{S}^\pi$ і $\mathscr{F}$ — π-насичена множина Фіттінга групи G. Тоді G має $\mathscr{F}$-ін'єктор і будь-які два з них спряжені, причому індекс кожного $\mathscr{F}$-ін'єктора в G є π-числом.*

Лема 2.2 (теорема Чуніхіна [2])**.** *Нехай $G \in \mathfrak{S}^\pi$. Тоді справджуються такі твердження*:

1) *G має холлівські π-підгрупи і будь-які дві з них спряжені*;

2) *кожна π-підгрупа G міститься в деякій холлівській π-підгрупі G.*

Лема 2.3 ([10], лема 3.6)**.** *Нехай $G \in \mathfrak{S}^\pi$, $\mathscr{F}$ — π-насичена множина Фіттінга групи G і V — $\mathscr{F}$-ін'єктор G. Якщо $V \leq H \leq G$, то V — $\mathscr{F}$-ін'єктор H.*

Лема 2.4 ([9], лема 9)**.** *Нехай $G \in \mathfrak{S}^\pi$ і $\mathscr{F}$ — π-насичена множина Фіттінга групи G. Якщо K — нормальна підгрупа G і V — $\mathscr{F}$-ін'єктор G, то $N_G(V \cap K)K = G$.*

Лема 2.5 ([10], лема 3.12)**.** *Нехай $G \in \mathfrak{S}^\pi$, $\mathscr{F}$ — π-насичена множина Фіттінга групи G і N — нормальна підгрупа G. Якщо $G = LN$, $L \in \mathscr{F}$ і $L \cap N$ є $\mathscr{F}$-ін'єктором N, то L — $\mathscr{F}$-ін'єктор групи G.*

Нехай H/K — секція групи G. Підгрупа A групи G *покриває* H/K, якщо $H \leq KA$, та *ізолює* H/K, якщо $A \cap H \leq K$.

Означення 2.1 [4, c. 196]**.** *Нехай $\mathscr{F}$ — множина Фіттінга групи G. Якщо V — $\mathscr{F}$-ін'єктор G, то головний фактор H/K групи G називається $\mathfrak{F}$-покривним, якщо V покриває H/K, і $\mathfrak{F}$-ізолюючим, якщо V ізолює H/K.*

Лема 2.6 ([9], теорема 1)**.** *Якщо $G \in \mathfrak{S}^\pi$ і $\mathscr{F}$ — π-насичена множина Фіттінга групи G, то $\mathscr{F}$-ін'єктор групи G або покриває, або ізолює кожен головний фактор G.*

Нагадаємо, що підгрупа U групи G називається *p-нормально вкладеною в G*, якщо кожна силовська p-підгрупа P з U є силовською p-підгрупою деякої нормальної підгрупи G. Підгрупу U групи G назвемо *π-нормально вкладеною в G*, якщо U є p-нормально вкладеною в G для будь-якого $p \in \pi$. Підгрупа A групи G називається *пронормальною в G*, якщо для кожного $g \in G$ A і A^g спряжені в $\langle A, A^g \rangle$.

Лема 2.7 ([10], лема 3.15)**.** *Якщо $G \in \mathfrak{S}^\pi$ і $\mathscr{F}$ — π-насичена π-множина Фішера групи G, то $\mathscr{F}$-ін'єктори G — π-нормально вкладені підгрупи G.*

Лема 2.8 ([10], лема 3.8)**.** *Нехай $G \in \mathfrak{S}^\pi$, $\mathscr{F}$ — π-насичена множина Фіттінга групи G і N — нормальна підгрупа G. Тоді кожен $\mathscr{F}$-ін'єктор V групи N є пронормальною підгрупою в G.*

Лема 2.9 ([8], лема 5)**.** *Якщо V — пронормальна підгрупа G і H/K — головний фактор групи G, що централізується V, то $N = N_G(V)$ покриває H/K.*

Лема 2.10. *Якщо $G \in \mathfrak{S}^\pi$ і $\mathscr{F}$ — π-насичена множина Фіттінга G, то кожен головний фактор G, що ізолюється $\mathscr{F}$-ін'єктором G, є елементарною абелевою p-групою для деякого $p \in \pi$.*

Доведення. Нехай V — $\mathscr{F}$-ін'єктор G. За лемою 2.1 індекс $\mathscr{F}$-ін'єктора V в G є π-числом. Отже, V містить деяку холлівську π'-підгрупу $G_{\pi'}$ групи G. Якщо H/K є холлівською π'-групою, то за лемою 2.2 $H/K = H_{\pi'}K/K = (G_{\pi'} \cap H)K/K$, і тому $VK/K \geq G_{\pi'}K/K \geq$ $\geq (G_{\pi'} \cap H)K/K = H/K$. Тоді $H \leq VK$. Це означає, що V покриває кожний π'-головний фактор групи G. За лемою 2.6 $\mathscr{F}$-ін'єктор групи G або покриває, або ізолює кожен головний фактор групи G. Оскільки $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$, то кожен головний фактор групи G є або елементарною абелевою p-групою для деякого $p \in \pi$, або π'-групою. Таким чином, головні фактори G, що ізолюються, є елементарними абелевими π-групами.

З огляду на леми 2.7 і 2.10 наведемо таку модифікацію леми Хартлі (див. [8], лема 4).

Лема 2.11. *Нехай $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ і $\mathscr{F}$ — π-насичена множина Фішера групи G. Якщо V — $\mathscr{F}$-ін'єктор групи G і H/K — доповнюваний p-фактор групи G $(p \in \pi)$, що ізолюється V, такий, що $C_G(H/K) \leq H$, то кожне доповнення H/K у G містить підгрупи, спряжені з V.*

Якщо $\mathscr{F}$ — множина Фіттінга групи G, то $\mathscr{F}^g = \{H^g : H \in \mathscr{F}\}$. Наступна лема випливає безпосередньо з означення множини Фіттінга групи G.

Лема 2.12. *Нехай $\mathscr{F}$ — множина Фіттінга групи G. Тоді $\mathscr{F} = \mathscr{F}^x$ для кожного $x \in G$.*

Лема 2.13 ([3], властивість VIII.2.6)**.** *Нехай $\mathscr{F}$ — множина Фіттінга групи G. Якщо K — субнормальна підгрупа групи G і V — $\mathscr{F}$-ін'єктор групи G, то підгрупа $V \cap K$ є $\mathscr{F}$-ін'єктором групи K.*

3. Доведення теореми 1.1. Оскільки $\mathscr{F}$ — π-насичена π-множина Фішера π-розв'язної групи G, то за лемою 2.1 G має $\mathscr{F}$-ін'єктор. Нехай V — $\mathscr{F}$-ін'єктор групи G. Доведемо, що V — $\mathscr{F}$-підгрупа Фішера G, що містить холлівську π'-підгрупу G.

Оскільки індекс $|G : V|$ — π-число, то за лемою 2.1 V містить деяку холлівську π'-підгрупу G. Відомо, що $V \in \mathscr{F}$. Нехай $L \in \mathscr{F}$ і $V \leq N_G(L)$. Доведемо, що L — підгрупа V.

Спочатку покажемо, що $L \trianglelefteq VL$. Візьмемо довільний елемент $x = vl$ групи VL, де $v \in V$, $l \in L$. Тоді $(vl)^{-1}L(vl) = l^{-1}v^{-1}Lvl = l^{-1}Ll = L$. Отже, підгрупа L нормальна в VL. Тоді $L \leq (VL)_{\mathscr{F}}$. Оскільки $V \leq VL$, то за лемою 2.3 V — $\mathscr{F}$-ін'єктор групи VL. Отже, $L \leq (VL)_{\mathscr{F}} \leq V$. Це показує, що V є $\mathscr{F}$-підгрупою Фішера групи G.

Доведемо зворотне твердження. Нехай F — $\mathscr{F}$-підгрупа Фішера групи G, яка містить деяку холлівську π'-підгрупу G. Доведемо, що F є $\mathscr{F}$-ін'єктором G. Доведення проведемо індукцією по порядку групи G. Якщо $G = 1$, то теорема є очевидною. Припустимо, що теорема справджується для всіх груп, порядок яких менший ніж $|G|$.

Припустимо, що F не є $\mathscr{F}$-ін'єктором G. Нехай $G_{\mathscr{F}}$ — $\mathscr{F}$-радикал групи G. Якщо $G_{\mathscr{F}}$ — $\mathscr{F}$-ін'єктор групи G, то за означенням $\mathscr{F}$-підгрупи Фішера маємо $G_{\mathscr{F}} \leq F$. Проте $\mathscr{F}$-ін'єктор $G_{\mathscr{F}}$ є $\mathscr{F}$-максимальною підгрупою G, і тому $F = G_{\mathscr{F}}$. Отже, F є $\mathscr{F}$-ін'єктором G. Ця суперечність показує, що $G_{\mathscr{F}}$ не є $\mathscr{F}$-ін'єктором групи G.

Нехай V — $\mathscr{F}$-ін'єктор групи G. Виберемо підгрупу H групи G з такими властивостями:

а) $G_{\mathscr{F}} \trianglelefteq H \trianglelefteq G$;

б) H — найменша з підгруп, для якої має місце включення $G_{\mathscr{F}} < V \cap H$.

Нехай $V_0 = V \cap H$ і $N = N_G(V_0)$. Тоді очевидно, що $V \leq N < G$ і за лемою 2.4

$$G = N_G(V_0)H.$$

Доведення розіб'ємо на кілька кроків.

(1) *$F \cap H$ не є $\mathscr{F}$-ін'єктором H.*

Припустимо, що підгрупа $F \cap H$ є $\mathscr{F}$-ін'єктором H. За лемою 2.1 $F \cap H$ і $V \cap H$ спряжені в H. Отже, без обмеження загальності можна вважати, що $V_0 = V \cap H = F \cap H$. Тоді $F \leq N_G(V_0) < G$. Оскільки F є $\mathscr{F}$-підгрупою Фішера G, то очевидно, що F також є $\mathscr{F}$-підгрупою Фішера N. Отже, за індукцією F — $\mathscr{F}$-ін'єктор N. Звідси випливає, що F і V спряжені в $N = N_G(V_0)$, і тому F і V спряжені в G. Отже, $F = V^g$ для деякого $g \in G$ і F є $\mathscr{F}^g$-ін'єктором G. Оскільки за лемою 2.12 $\mathscr{F}^g = \mathscr{F}$, то F є $\mathscr{F}$-ін'єктором G, що суперечить нашому припущенню.

(2) *Нехай H/K — такий головний фактор групи G, що $G_{\mathscr{F}} \trianglelefteq K \triangleleft H$. Тоді H/K є елементарною абелевою p-групою для деякого $p \in \pi$ і K — єдина максимальна підгрупа з множини проміжних нормальних підгруп G між $G_{\mathscr{F}}$ і H.*

Оскільки $G_{\mathscr{F}} \leq K$ і $G_{\mathscr{F}} \leq V$, то $G_{\mathscr{F}} \leq V \cap K$. За лемою 2.13 $V \cap K$ є $\mathscr{F}$-ін'єктором K. Отже, $V \cap K \geq K_{\mathscr{F}} \geq G_{\mathscr{F}}$. Тому $V \cap K = G_{\mathscr{F}}$ внаслідок вибору H.

Оскільки G — π-розв'язна група, то H/K є або π'-групою, або елементарною абелевою p-групою для $p \in \pi$.

Припустимо, що H/K — π'-група. Оскільки $F \supseteq G_{\pi'}$ і $H \trianglelefteq G$, то $F \cap H$ містить деяку холлівську π'-підгрупу групи H. Звідси $H = (F \cap H)K$. За індукційним припущенням $F \cap K$ є $\mathscr{F}$-ін'єктором K, і тому $(F \cap H) \cap K = F \cap (H \cap K) = F \cap K = G_{\mathscr{F}} = V \cap K$. Але тоді за лемою 2.5 $F \cap H$ є $\mathscr{F}$-ін'єктором H, що суперечить твердженню (1). Таким чином, H/K є елементарною абелевою p-групою для деякого $p \in \pi$.

Припустимо, що G має дві максимальні нормальні підгрупи K_1, K_2 із множини нормальних підгруп між $G_{\mathscr{F}}$ і H. Тоді, за доведеним вище, H/K_i, $i = 1, 2$, є абелевою групою і $V_0(K_1 \cap \cap K_2)/K_1 \cap K_2 \leq H/K_1 \cap K_2$. Отже, $H \leq N_G(V_0(K_1 \cap K_2))$ і $N \leq N_G(V_0(K_1 \cap K_2))$. Це означає, що $V_0(K_1 \cap K_2)$ є нормальною в $HN = G$. Оскільки $G_{\mathscr{F}} < V_0 \leq V_0(K_1 \cap K_2)$, то $H = V_0(K_1 \cap K_2)$ внаслідок вибору H. Тому $K_i = K_i \cap H = K_i \cap (K_1 \cap K_2)V_0 = (K_1 \cap \cap K_2)G_{\mathscr{F}} = K_1 \cap K_2$. Звідси випливає, що $K_1 = K_2$. Таким чином, K є єдиною максимальною нормальною підгрупою G із множини нормальних підгруп між $G_{\mathscr{F}}$ і H.

(3) $HF = G$.

Якщо $HF < G$, то за індукцією F є $\mathscr{F}$-ін'єктором HF. Отже, $F \cap H$ є $\mathscr{F}$-ін'єктором H, що суперечить твердженню (1).

(4) *H/K — єдина мінімальна нормальна підгрупа G/K, де K — єдина максимальна нормальна підгрупа G з множини нормальних підгруп між $G_{\mathscr{F}}$ і H.*

Припустимо, що твердження (4) не є правильним. Тоді G/K містить таку мінімальну нормальну підгрупу R/K, що $H_1/K = R/K \times H/K$. За твердженням (2) H_1/K є абелевою нормальною підгрупою G/K. За твердженням (3) $HF = G$, $H_1 = H_1 \cap HF = H(F \cap H_1)$.

Нехай $H^* = K(F \cap H_1)$. Очевидно, що $FK/K \leq N_G(H^*/K)$. Оскільки H_1/K абелева, то $H/K \leq N_G(H^*/K)$. Тоді $H^*/K \trianglelefteq HF/K = G/K$. Отже, H^* нормальна в G.

Покажемо, що $F \cap H^*$ — $\mathscr{F}$-ін'єктор H^*. Зауважимо, що $H^*/K \neq 1$. Справді, якщо це не так, то $F \cap H_1 \leq K$, і тому $H_1 = H(F \cap H_1) = H$, що неможливо.

Оскільки $H^* = K(F \cap H_1)$, то $F \cap H^* = F \cap H_1$. Таким чином, $H^* = K(F \cap H^*)$. Отже, $(F \cap H^*) \cap K = F \cap (H \cap K) = F \cap K = G_{\mathscr{F}} = V \cap K$, $(F \cap H^*) \cap K = F \cap K$ — $\mathscr{F}$-ін'єктор K. Більш того, оскільки $\mathscr{F}$ — множина Фіттінга групи G і $F \cap H^* \trianglelefteq F \in \mathscr{F}$, то $F \cap H^* \in \mathscr{F}$. Отже, за лемою 2.5 $F \cap H^*$ є $\mathscr{F}$-ін'єктором H^*.

З іншого боку, $V \cap H^*$ також є $\mathscr{F}$-ін'єктором H^*, тому $V \cap H^*$ і $F \cap H^*$ спряжені в H^*. Тому без обмеження загальності ми можемо припустити, що $V^* = V \cap H^* = F \cap H^*$. Нехай

$V^* = F \cap H^*$. Оскільки $H < H_1$ і $G_{\mathscr{F}} = F \cap K \leq F \cap H \leq F \cap H_1 = F \cap H^* = V^*$, то отримуємо $N^* := N_G(V^*) < G$. Справді, якщо $N_G(V^*) = G$, то $V^* \trianglelefteq G$. Оскільки $V^* = F \cap H^* \in \mathscr{F}$ і $V^* \trianglelefteq G$, то $V^* \leq G_{\mathscr{F}}$, і тому $V^* = G_{\mathscr{F}}$. Таким чином, $V^* = F \cap H_1 = F \cap K \leq K \leq H$. Отже, $H_1 = H(F \cap H_1) = H$, що неможливо.

Оскільки $H^* \trianglelefteq G$, то F і V — підгрупи N^*. Очевидно, F є $\mathscr{F}$-підгрупою Фішера N^*. За індукційним припущенням F — $\mathscr{F}$-ін'єктор N^*. Тому F і V спряжені в N^*. Отже, F є $\mathscr{F}$-ін'єктором G. Прийшли до суперечності.

(5) $G = KN$ *точно тоді, коли* N *покриває* G/K.

З огляду на вибір підгрупи H $\mathscr{F}$-ін'єктор V не ізолює головний фактор H/K групи G. Справді, якщо припустити, що це не так, то $H \cap V \subseteq K \cap V = G_{\mathscr{F}}$. А це суперечить вибору підгрупи H. Тоді за лемою 2.6 V покриває H/K, тобто $(V \cap H)K = H$. Отже, за лемою 2.4 $G = N_G(V \cap H)H = HN = (V \cap H)KN = KN$.

(6) *Існує головний фактор* G, *який не покривається* N. *Зокрема, якщо* A/B *— такий головний фактор із підгрупою* A *максимального порядку, то* A/B *є елементарною абелевою* p*-групою для деякого* $p \in \pi$ *і* BN *— доповнення фактора* A/B *в* G.

Справді, оскільки $G_{\mathscr{F}} < N < G$, то N покриває G/K і $G_{\mathscr{F}}/1$. Легко бачити, що існують головні фактори групи G з множини нормальних підгруп між $G_{\mathscr{F}}$ і K такі, які N не покриває. Нехай A/B — головний фактор із підгрупою A максимального порядку.

Оскільки G π-розв'язна, то A/B є або π'-групою, або елементарною абелевою p-групою для деякого $p \in \pi$. Якщо A/B — π'-група, то $(A/B)_{\pi'} = A/B = A_{\pi'}B/B = (G_{\pi'} \cap A)B/B$. Оскільки за лемою 2.1 індекс кожного $\mathscr{F}$-ін'єктора в G — π-число, то $G_{\pi'} \leq V$, і тому $A/B = (G_{\pi'} \cap A)B/B \leq G_{\pi'}B/B \leq VB/B$. Таким чином, $A \leq VB$. Проте $V \leq N$ і $A \leq NB$, а це суперечить тому, що N не покриває фактор A/B. Таким чином, A/B є елементарною абелевою p-групою.

Оскільки A/B — головний фактор, який не покривається N, і A має максимальний порядок, то $G = KN = AN$ і $B(A \cap N) \trianglelefteq G$. Крім того, оскільки N не покриває A/B, то $A \neq B(A \cap N)$. Отже, $B(A \cap N) = B$ з огляду на вибір A/B і $A \cap N \leq B$. Таким чином, $G = AN = ABN$ і $A \cap BN = B(A \cap N) = B$. Це означає, що BN є доповненням A/B в G.

(7) $A = C_G(A/B)$.

Нехай $C = C_G(A/B)$ така, що $C \trianglelefteq G$. Якщо $H \leq C$, то $V_0 = V \cap H$ централізує A/B. За [1] (VIII, (2.6)) V_0 — $\mathscr{F}$-ін'єктор H і за лемою 2.8 V_0 — пронормальна підгрупа G. Тоді за лемою 2.9 $N = N_G(V_0)$ покриває A/B, що суперечить вибору підгрупи A/B. Тому $C \cap H < H$. Отже, $C \cap H$ є нормальною підгрупою G з множини нормальних підгруп між $G_{\mathscr{F}}$ і H. Оскільки K є єдиною максимальною нормальною підгрупою G з множини нормальних підгруп між $G_{\mathscr{F}}$ і H, то $C \cap H \leq K$, і тому $H/K \cap CK/K = 1$. Проте за твердженням (4) H/K є єдиною мінімальною нормальною підгрупою G/K. Отже, $C \leq K$.

Таким чином, $G_{\mathscr{F}} \leq A \leq C \leq K$. Нехай $D = BN$. Тоді $D < G$, тому що $A \neq B(A \cap N)$ і $G = DA$ за твердженням (6). Покажемо, що $C \cap D \trianglelefteq G$. Справді, $(C \cap D)^G = (C \cap D)^{DA} = (C \cap D)^A$. Нехай $x \in C \cap D$ і $a \in A$. Оскільки $A \subseteq C$, то $x^a \in C$. Оскільки група A/B абелева і $x^{-1}a^{-1}xa \in B$, то $x^a \in xB \subseteq DB = NBB = NB = D$. Тому $x^a \in C \cap D$. Це доводить, що $C \cap D \trianglelefteq G = DA$. Отже, $C/C \cap D$ — фактор ряду $G_{\mathscr{F}} \leq A \leq C \leq K$, що ізолюється D і N. З огляду на вибір A отримуємо $A = C = C_G(A/B)$.

(8) *Фінальна суперечність.*

Нехай $L = KF$. Оскільки $K \trianglelefteq G$ і $G_{\mathscr{F}} = F \cap K$ — $\mathscr{F}$-ін'єктор K, за лемою 2.5 F — $\mathscr{F}$-ін'єктор L. За індукційним припущенням $L < G$. Оскільки $L = L \cap G = L \cap AD = A(L \cap D)$ і

$A/B \cap (D \cap L)B/B = 1$, то $D \cap L$ є доповненням A/B в L. За твердженнями (6), (7) і лемою 2.11 $D \cap L$ містить $\mathscr{F}$-ін'єктор L. Без обмеження загальності припустимо, що $F \leq D \cap L$, і тому $F \leq D$.

Оскільки $V \leq N \leq BN = D < G$, то V є $\mathscr{F}$-ін'єктором D за лемою 2.3 і F також є $\mathscr{F}$-ін'єктором D за індукційним припущенням. Отже, V і F спряжені в D, а тому і в G. Проте кожна підгрупа, спряжена з $\mathscr{F}$-ін'єктором, є $\mathscr{F}$-ін'єктором G. Отже, F — $\mathscr{F}$-ін'єктор G. Ця суперечність показує, що кожна $\mathscr{F}$-підгрупа Фішера G, що містить холлівську π'-підгрупу G, є $\mathscr{F}$-ін'єктором G.

Теорему доведено.

Література

1. W. Anderson, *Injectors in finite soluble groups*, J. Algebra, **36**, 333 – 338 (1975).
2. С. А. Чунихин, *О π-отделимых группах*, Докл. АН СССР, **59**, 443 – 445 (1948).
3. K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin; New York (1992).
4. R. Dark, *Some examples in the theory of injectors of finite soluble groups*, Math. Z., **127**, 145 – 156 (1972).
5. B. Fischer, *Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen*, Habilitationsschrift, Univ. Frankfurt (1966).
6. B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley, *Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen*, Math. Z., **102**, 337 – 339 (1967).
7. W. Gaschütz, *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen*, Math. Z., **80**, 300 – 305 (1963).
8. B. Hartley, *On Fischer's dualization of formation theory*, Proc. London Math. Soc., **3**, № 2, 193 – 207 (1969).
9. Т. Б. Караулова, *Локальные множества Фиттинга и инъекторы конечной группы*, Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика, **3**, 29 – 38 (2018).
10. М. Г. Семенов, *Формула инъектора конечной π-разрешимой группы*, Проблемы физики, математики и техники, **21**, № 4, 77 – 88 (2014).
11. N. Yang, W. Guo, N. T. Vorob'ev, *On $\mathscr{F}$-injectors of Fitting set of a finite group*, Commun. Algebra, **46**, № 1, 217 – 229 (2018).

Одержано 27.06.20