DOI: 10.37863/umzh.v73i4.6199

УДК 517.5, 539.3

С. В. Грищук (Ін-т математики НАН України, Київ)

МОНОГЕННІ ФУНКЦІЇ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У КОМУТАТИВНИХ КОМПЛЕКСНИХ АЛГЕБРАХ ДРУГОГО РАНГУ З ОДИНИЦЕЮ ТА УЗАГАЛЬНЕНЕ БІГАРМОНІЧНЕ РІВНЯННЯ З НЕНУЛЬОВИМИ ПРОСТИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ*

Among all two-dimensional algebras of the second rank with a unit e over the field of complex numbers $\mathbb{C}$, we found a semisimple algebra $\mathbb{B}_0 := \{c_1e + c_2\omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1,2\}$, $\omega^2 = e$, containing bases $\{e_1, e_2\}$ such that $\mathbb{B}_0$-valued "analytic" functions $\Phi(xe_1 + ye_2)$, where x, y are real variables, satisfy a homogeneous partial differential equation of the fourth order that has only simple nonzero characteristics. The set of pairs $(\{e_1, e_2\}, \Phi)$ is described in an explicit form.

Серед двовимірних алгебр другого рангу з одиницею e над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ знайдено напівпросту алгебру $\mathbb{B}_0 = \{c_1e + c_2\omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1,2\}$, $\omega^2 = e$, що містить базиси $\{e_1, e_2\}$ такі, що $\mathbb{B}_0$-значні „аналітичні" функції $\Phi(xe_1 + ye_2)$ (x, y — дійсні змінні) задовольняють однорідне рівняння з частинними похідними четвертого порядку, яке має лише прості ненульові характеристики. Наведено повний опис множини пар $(\{e_1, e_2\}, \Phi)$.

1. Постановки задач. Розглянемо рівняння

$$Lu(x,y) := \left(b_1 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + b_2 \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + b_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + b_4 \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + b_5 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) u(x,y) = 0, \qquad (1)$$

в якому комплексні коефіцієнти $b_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,5}$, $b_5 \neq 0$, такі, що характеристичне рівняння

$$l\,(s) := b_1 s^4 + b_2 s^3 + b_3 s^2 + b_4 s + b_5 = 0, \quad s \in \mathbb{C}, \qquad (2)$$

має чотири попарно різних корені (кожен корінь є простим):

$$\{s_1, s_2, s_3, s_4\} := \ker l, \qquad (3)$$

де $s_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $s_k \neq s_m$ при $k \neq m$, $k, m \in \{1, \ldots, 4\}$. Співвідношення $s_k \neq 0$, $k = \overline{1,4}$, еквівалентні заданій умові $b_5 \neq 0$. Очевидно, що співвідношення $b_1 \neq 0$ є наслідком зазначеної умови. Отже,

$$b_1 b_5 \neq 0. \qquad (4)$$

Під розв'язком рівняння (1) в області D декартової площини xOy будемо розуміти дійснозначну функцію u, що має неперервні частинні похідні до четвертого порядку включно та задовольняє дане рівняння в D.

Оскільки частинними випадками рівняння (1) є еліптичні рівняння („близькі" до бігармонічного рівняння у сенсі пункту 4 роботи) для знаходження функції напружень, що відповідають відповідним плоским анізотропним середовищам (див., наприклад, [2 – 4]), то рівняння (1) будемо називати *узагальненим бігармонічним рівнянням* (даний термін використовується, наприклад, у [1, с. 67] для рівняння функції напружень анізотропного середовища).

* Частково підтримано грантом Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U001528).

Позначимо через $\mathbb{B}_*$ асоціативну, комутативну над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебру другого рангу з одиницею e. Нехай $\{e_1, e_2\}$ — базис $\mathbb{B}_*$ такий, що задовольняє співвідношення

$$\mathcal{L}(e_1, e_2) := b_1(e_2)^4 + b_2 e_1(e_2)^3 + b_3(e_1)^2(e_2)^2 + b_4(e_1)^3 e_2 + b_5(e_1)^4 = 0. \tag{5}$$

Поставимо задачу про відшукання всіх пар $\mathbb{B}_*,\ \{e_1, e_2\}$ (див. п. 2).

Дану задачу для бігармонічного рівняння, а також її розв'язання наведено у роботі [5]. Для частинного випадку рівняння (1) ($b_1 = b_5 = 1,\ b_2 = b_4 = 0,\ b_3 > 2$) дану задачу було сформульовано та розв'язано у [6].

Введемо позначення $\mu_{e_1,e_2} := \{xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$ (лінійна оболонка векторів e_1 і e_2 над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$), $D_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : (x, y) \in D\} \subset \mu_{e_1,e_2},\ \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta$ для $(x, y) \in D$.

Нехай базис $\{e_1, e_2\}$ задовольняє крім умови (5) ще й таку умову:

$\mathcal{MB}$) кожен ненульовий елемент $h \in \mu_{e_1,e_2}$ є оборотним (тобто існує обернений елемент $h^{-1} \in \mathbb{B}_*$ такий, що $hh^{-1} = e$).

Для кожного шуканого базису $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє умови (5) і $\mathcal{MB}$ одночасно, розглядаємо *моногенні* в D_ζ функції, тобто функції $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_*$ вигляду

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y)\, e_1 + U_2(x, y)\, ie_1 + U_3(x, y)\, e_2 + U_4(x, y)\, ie_2 \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{6}$$

що мають класичну похідну $\Phi'(\zeta)$ в кожній точці ζ з D_ζ:

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h \to 0, h \in \mu_{e_1,e_2}} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big)\, h^{-1}.$$

Кожну компоненту $U_k : D \longrightarrow \mathbb{R}$ з (6) будемо позначати також через $\mathrm{U}_k[\Phi]$, тобто $\mathrm{U}_k[\Phi(\zeta)] :=$ $:= U_k(x, y),\ k \in \{1, \ldots, 4\}$.

Якщо моногенна функція Φ має неперервні похідні $\Phi^{(k)}(\zeta)$ до k-го порядку включно, $k \geq 4$, в області D_ζ, то згідно зі співвідношеннями $L\Phi(\zeta) = \mathcal{L}(e_1, e_2)\Phi^{(4)}(\zeta) \equiv 0$ при кожному $\zeta \in D_\zeta$ (які одержуються аналогічно відповідним співвідношенням [6] (п. 6) для частинного випадку оператора L у рівнянні (1)), а також рівністю (6), переконуємося, що компоненти $U_k,\ k = \overline{1, 4}$, задовольняють рівняння (1) в області D.

Поставимо задачу про опис усіх моногенних функцій, а також підмножини моногенних функцій Φ, компоненти яких $\mathrm{U}_k[\Phi] = U_k,\ k = \overline{1, 4}$, є розв'язками рівняння (1) (див. п. 3).

Нехай D — обмежена й однозв'язна область. Розглянемо задачу про існування моногенних функцій Φ таких, що $\mathrm{U}_1[\Phi] = u$, де u — довільна функція з простору розв'язків рівняння (1). У випадку, коли рівняння (1) є рівнянням для знаходження функції напружень для плоского анізотропного середовища, розглянемо також задачу про зведення його до рівнянь $L(\widetilde{u}) = 0$ вигляду (1), для яких шукані моногенні функції Φ (які задовольняють співвідношення $\mathrm{U}_1[\Phi] =$ $= \widetilde{u}$) можна знайти в явному вигляді. Цій проблематиці присвячено пункт 4.

Зауважимо, що гіперкомплексні „аналітичні" функції $\Phi(xe_1 + ye_2)$ зі значеннями у скінченновимірних алгебрах над полем дійсних (розмірності чотири) або комплексних чисел (розмірності два), компоненти яких задовольняють рівняння вигляду (1), розглядались, зокрема, у роботах [7 – 14]. Незважаючи на значне число робіт, повний опис зазначених трійок $\mathbb{B}_*$,

$\{e_1, e_2\}$, Φ (або аналогічних до них, для інших означень „моногенності”) залишався досі невідомим (базис $\{e_1, e_2\}$ задовольняє умови (5) і $\mathcal{MB}$ одночасно). Це пов’язано, зокрема, з тим, що клас рівнянь (1) є досить широким.

Усі наведені задачі розв’язано в роботі у повному і явному вигляді.

2. Комутативні й асоціативні алгебри другого рангу та їхні базиси, асоційовані з рівнянням (1). Як відомо (див. [15]), існують (з точністю до ізоморфізму) дві асоціативні, комутативні над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебри другого рангу з одиницею e:

$$\mathbb{B} := \{c_1 e + c_2 \rho : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\}, \quad \rho^2 = 0, \tag{7}$$

$$\mathbb{B}_0 := \{c_1 e + c_2 \omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\}, \quad \omega^2 = e. \tag{8}$$

Очевидно, що алгебра $\mathbb{B}_0$ є напівпростою (означення див., наприклад, у [16, с. 33]) і містить базис з ортогональних ідемпотентів $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\}$, де

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2}(e + \omega), \quad \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}(e - \omega), \quad \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = 0, \quad (\mathcal{I}_k)^2 = \mathcal{I}_k, \quad k = 1, 2. \tag{9}$$

Очевидно, що

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = e, \quad \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 = \omega. \tag{10}$$

Елемент $w = c_1\mathcal{I}_1 + c_2\mathcal{I}_2$ з $\mathbb{B}_0$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $c_k \neq 0$, $k = 1, 2$. У випадку виконання цієї умови справджується рівність для оберненого елемента (див. [17, с. 38]):

$$w^{-1} = \frac{1}{c_1}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{c_2}\mathcal{I}_2. \tag{11}$$

Наступна теорема визначає опис усіх пар $\mathbb{B}_*$, $\{e_1, e_2\}$, де базиси $\{e_1, e_2\}$ задовольняють умову (5). Зокрема, встановлено, що $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}_0$.

Теорема 1. *Алгебра* $\mathbb{B}$ *не містить жодного базису* $\{e_1, e_2\}$, *що задовольняє умову* (5).

Усі пари базисних елементів алгебри $\mathbb{B}_0$, *що задовольняють умову* (5), *мають вигляд*

$$e_1 = \alpha\,\mathcal{I}_1 + \beta\,\mathcal{I}_2, \quad e_2 = \widetilde{s}_1\alpha\,\mathcal{I}_1 + \widetilde{s}_2\beta\,\mathcal{I}_2, \tag{12}$$

де $\widetilde{s}_k \in \ker l$, $k = 1, 2$, *такі, що* $\widetilde{s}_1 \neq \widetilde{s}_2$, *комплексні числа* $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ *вибираються довільним чином.*

Доведення. Шукаємо пари базисних елементів $\{e_1, e_2\}$ вигляду

$$e_k = \alpha_k e + \beta_k \rho \in \mathbb{B}, \quad k = 1, 2, \tag{13}$$

де невідомі комплексні коефіцієнти α_k, β_k, $k = 1, 2$, задовольняють співвідношення

$$\Delta_{e_1 e_2} := \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0. \tag{14}$$

Легко одержити рівності

$$(e_m)^k = (\alpha_m)^{k-1}(\alpha_m e + k\beta_m \rho), \quad k = \overline{1, 4}, \quad m = \overline{1, 2}. \tag{15}$$

Підставляючи (13) у (5) і враховуючи при цьому (15), одержуємо

$$\mathcal{L}(e_1,e_2)=b_1\alpha_2^3\left(\alpha_2 e+4\beta_2\rho\right)+b_2\left(\alpha_1 e+\beta_1\rho\right)\alpha_2^2\left(\alpha_2 e+3\beta_2\rho\right)+$$
$$+b_3\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1 e+2\beta_1\rho\right)\left(\alpha_2 e+2\beta_2\rho\right)+b_4\alpha_1^2\left(\alpha_1 e+3\beta_1\rho\right)\left(\alpha_2 e+\beta_2\rho\right)+$$
$$+b_5\alpha_1^3\left(\alpha_1 e+4\beta_1\rho\right)=A_e\,e+A_\rho\,\rho, \tag{16}$$

де

$$A_e:=b_1\alpha_2^4+b_2\alpha_2^3\alpha_1+b_3\alpha_2^2\alpha_1^2+b_4\alpha_2\alpha_1^3+b_5\alpha_1^4,$$
$$A_\rho:=\left(b_2\beta_1+4b_1\beta_2\right)\alpha_2^3+\left(3b_2\beta_2+2b_3\beta_1\right)\alpha_1\alpha_2^2+$$
$$+\left(2b_3\beta_2+3b_4\beta_1\right)\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1^3\left(b_4\beta_2+4b_5\beta_1\right).$$

Тому шукані $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{C},\ k=1,2,$ повинні задовольняти систему

$$A_e=0,\quad A_\rho=0,\quad \Delta_{e_1e_2}\neq 0. \tag{17}$$

Розглянемо перше рівняння в системі (17). Згідно з (4) одержуємо, що $\alpha_1\neq 0$ (в іншому випадку $\alpha_1=\alpha_2=0$, що суперечить третьому співвідношенню в (17)) і виконуються рівності

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=s_*\quad \forall s_*\in\ker l. \tag{18}$$

Виконуючи ділення обох частин другого рівняння з (17) на α_1^3 і використовуючи (18), отримуємо

$$-l_0(s_*)\beta_1+l'(s_*)\beta_2=0, \tag{19}$$

де $l_0(s_*):=-\left(b_2s_*^3+2b_3s_*^2+3b_4s_*+4b_5\right)$, а $l'(s_*)$ — значення похідної многочлена $l(s)$ з (2) при $s=s_*$. Оскільки s_* є простим коренем рівняння (2), то $l'(s_*)\neq 0$, а рівняння (19) еквівалентне такому:

$$\beta_2=\frac{l_0(s_*)}{l'(s_*)}\beta_1. \tag{20}$$

Із знайдених пар $\{e_1,e_2\}$ потрібно відібрати ті, які є лінійно незалежними. Для цього потрібно перевірити на виконання третє співвідношення системи (17). Підставляючи (18) та (20) у (14), одержуємо

$$\Delta_{e_1e_2}=\left(\frac{l_0(s_*)}{l'(s_*)}-s_*\right)\alpha_1\beta_1\neq 0. \tag{21}$$

Якщо $\beta_1=0$, то умова (21) не виконується, тому $\beta_1\neq 0$, отже, і $\beta_2\neq 0$ згідно з (20). Оскільки за доведеним $\alpha_1\neq 0$ і $\beta_1\neq 0$, то $\Delta_{e_1e_2}$ може дорівнювати нулю лише за умови, що $\dfrac{l_0(s_*)}{l'(s_*)}-s_*=0$. Перевіримо, чи це можливо. Безпосередньою підстановкою переконуємося, що

$$\frac{l_0(s_*)}{l'(s_*)}-s_*=-\frac{4}{l'(s_*)}l\left(s_*\right)\equiv 0.$$

В результаті приходимо до висновку, що шуканих базисів в алгебрі $\mathbb{B}$ не існує.

Знайдемо необхідні базиси в алгебрі $\mathbb{B}_0$.

Легко показати, що елементи $e_k = \alpha_k \mathcal{I}_1 + \beta_k \mathcal{I}_2,\ k = 1, 2,$ задовольняють рівності

$$e_k^n = \alpha_k^n \mathcal{I}_1 + \beta_k^n \mathcal{I}_2, \quad n = \overline{1,4}, \quad k = 1, 2. \tag{22}$$

Позначимо $(e_k)^0 := 1,\ k = 1, 2,\ \lambda^0 := 1$ при дійсних λ. Тоді

$$\mathcal{L}(e_1, e_2) = \sum_{k=1}^{5} b_k \left(\alpha_2^{5-k}\mathcal{I}_1 + \beta_2^{5-k}\mathcal{I}_2\right)\left(\alpha_1^{k-1}\mathcal{I}_1 + \beta_1^{k-1}\mathcal{I}_2\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{5} b_k \left(\alpha_2^{5-k}\alpha_1^{k-1}\mathcal{I}_1 + \beta_2^{5-k}\beta_1^{k-1}\mathcal{I}_2\right).$$

Отже, шукана система для знаходження коефіцієнтів базисних елементів $e_k = \alpha_k \mathcal{I}_1 + \beta_k \mathcal{I}_2$, $k = 1, 2$, має вигляд

$$A_e \equiv \sum_{k=1}^{5} b_k \alpha_2^{5-k}\alpha_1^{k-1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{5} b_k \beta_2^{5-k}\beta_1^{k-1} = 0, \quad \Delta_{e_1e_2} \equiv \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0. \tag{23}$$

Як і в (17), встановлюємо, що $\alpha_1 \neq 0$. Аналогічним чином, розглядаючи друге рівняння з (23) і співвідношення $\Delta_{e_1e_2} \neq 0$, одержуємо, що $\beta_1 \neq 0$. Враховуючи додатково нерівність (4), приходимо до висновку, що система (23) рівносильна системі

$$l\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 0, \quad l\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = 0, \quad \Delta_{e_1e_2} \neq 0. \tag{24}$$

Розв'язки системи (24) мають вигляд

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \widetilde{s}_1, \quad \frac{\beta_2}{\beta_1} = \widetilde{s}_2 \quad \forall\, \widetilde{s}_k \in \ker l, \quad k = 1, 2, \quad \widetilde{s}_1 \neq \widetilde{s}_2. \tag{25}$$

Тому всі базиси алгебри $\mathbb{B}_0$, що задовольняють умову (5), записуються у вигляді (12).

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** Частинний випадок теореми 1 (коли $b_1 = b_5 = 1,\ b_2 = b_4 = 0,\ b_3 > 2$) одержано у [6].

З урахуванням (9), розв'язуючи (12) відносно $\mathcal{I}_k,\ k = 1, 2,$ одержуємо

$$\alpha\left(\widetilde{s}_2 - \widetilde{s}_1\right)\mathcal{I}_1 = \widetilde{s}_2 e_1 - e_2, \quad \beta\left(\widetilde{s}_2 - \widetilde{s}_1\right)\mathcal{I}_2 = -\widetilde{s}_1 e_1 + e_2. \tag{26}$$

Беручи до уваги (9) і (26), встановлюємо таблицю множення для пар елементів $e_k,\ k = 1, 2,$ базисів $\{e_1, e_2\}$ з (12):

$$e_1^2 = \frac{1}{\widetilde{s}_2 - \widetilde{s}_1}\left(\left(\widetilde{s}_2\alpha - \widetilde{s}_1\beta\right)e_1 + (\beta - \alpha)e_2\right), \tag{27}$$

$$e_2^2 = \frac{1}{\widetilde{s}_2 - \widetilde{s}_1}\left(\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2\left(\widetilde{s}_1\alpha - \widetilde{s}_2\beta\right)e_1 + \left((\widetilde{s}_2)^2\beta - (\widetilde{s}_1)^2\alpha\right)e_2\right), \tag{28}$$

$$e_1e_2 = \frac{1}{\widetilde{s}_2 - \widetilde{s}_1}\left(\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2(\alpha - \beta)e_1 + \left(\widetilde{s}_2\beta - \widetilde{s}_1\alpha\right)e_2\right). \tag{29}$$

3. Моногенні функції, асоційовані з рівнянням (1). З урахуванням (11) та умов $\widetilde{s}_k \neq 0$, $k = 1, 2$, легко переконуємось, що базиси (12) задовольняють, крім умови (5), умову $\mathcal{MB}$ тоді і тоді тоді, коли пари $\widetilde{s}_k \in \ker l$, $k = 1, 2$, що визначають відповідний базис, задовольняють, крім умов теореми 1, умову

$$\operatorname{Im} \widetilde{s}_k \neq 0, \quad k = 1, 2. \tag{30}$$

Отже, далі будемо вважати, що множина коренів рівняння (2) містить хоча б два різних корені $\widetilde{s}_k \in \ker l$, $k = 1, 2$, такі, що задовольняють умову (30), а у відповідних базисах, описаних у теоремі 1, пара $\widetilde{s}_k \in \ker l$, $k = 1, 2$, задовольняє дану умову.

Аналогічно випадку, коли замість оператора L розглядається бігармонічний оператор (див. [8, 18]), встановлюємо таку теорему.

Теорема 2. *Функція $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є моногенною в області D_ζ тоді і тільки тоді, коли її компоненти $U_k\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1,4}$, з розкладу* (6) *диференційовні в області D і виконується аналог умов Коші – Рімана*

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial y}\, e_1 - \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x}\, e_2 = 0 \quad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta. \tag{31}$$

Для кожної четвірки α, β, $\widetilde{s}_1$, $\widetilde{s}_2$ з (12) введемо позначення

$$A_1 := \beta - \alpha, \quad A_2 := \frac{\alpha}{\widetilde{s}_2} - \frac{\beta}{\widetilde{s}_1}, \quad B_1 := \widetilde{s}_2\beta - \widetilde{s}_1\alpha, \quad B_2 := \frac{\widetilde{s}_1}{\widetilde{s}_2}\,\alpha - \frac{\widetilde{s}_2}{\widetilde{s}_1}\beta,$$

$$C_1 := \frac{\alpha}{\widetilde{s}_1} - \frac{\beta}{\widetilde{s}_2}, \quad C_2 := \frac{\beta - \alpha}{\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2}, \quad D_1 := -A_1, \quad D_2 = D_2 := -A_2,$$

$$F\left\{\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2, \alpha, \beta\right\}[U_n, U_m](x, y) := \frac{\widetilde{s}_2 - \widetilde{s}_1}{\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2}\left(\frac{\partial U_n(x,y)}{\partial y}\, e_1^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial U_m(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial U_n(x,y)}{\partial x}\right) e_1e_2 - \frac{\partial U_m(x,y)}{\partial x}\, e_2^2\right) \forall (x,y) \in D, \tag{32}$$

де $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Підставляючи (27) – (29) у (32), отримуємо

$$F\left\{\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2, \alpha, \beta\right\}[U_n, U_m](x, y) = \sum_{k=1}^{2}\left(A_k\, \frac{\partial U_n(x,y)}{\partial x} + B_k\, \frac{\partial U_m(x,y)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + C_k\, \frac{\partial U_n(x,y)}{\partial y} + D_k\, \frac{\partial U_m(x,y)}{\partial y}\right) e_k \quad \forall\, (x,y) \in D, \quad n, m \in \{1, 2, 3, 4\}. \tag{33}$$

Нехай f_k, $k = 1, 2$, позначає одну з функцій Re, $-$Re, Im, $-$Im. Для кожного $k \in \{1, 2\}$ розглянемо дійснозначні функції, визначені у кожній точці $(x, y) \in D$, за допомогою формул

$$Q_k\left\{\Phi, f_1, f_2\right\}(x, y) := \sum_{j=1}^{4}\left(a_{k,j}\{f_1, f_2\}\, \frac{\partial U_j(x,y)}{\partial x} + b_{k,j}\{f_1, f_2\}\, \frac{\partial U_j(x,y)}{\partial y}\right),$$

де $U_j := \mathrm{U}_j[\Phi]$, $j = \overline{1,4}$, $a_{k,1}\{f_1, f_2\} := f_1(A_k)$, $a_{k,2}\{f_1, f_2\} = f_2(A_k)$, $a_{k,3}\{f_1, f_2\} := f_1(B_k)$, $a_{k,4}\{f_1, f_2\} := f_2(B_k)$, $b_{k,1}\{f_1, f_2\} := f_1(C_k)$, $b_{k,2}\{f_1, f_2\} := f_2(C_k)$, $b_{k,3}\{f_1, f_2\} := f_1(D_k)$, $b_{k,4}\{f_1, f_2\} := f_2(D_k)$.

***Зауваження* 2.** Покомпонентно, у розширеній формі, рівність (31) є системою чотирьох рівнянь відносно компонент $U_k,\ k=\overline{1,4}$, функції (6). Для базисів $\{e_1,e_2\}$, що визначаються формулою (12), ця система має вигляд

$$Q_k\{\Phi,\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\}(x,y)=0,\quad Q_k\{\Phi,\mathrm{Im},\mathrm{Re}\}(x,y)=0\quad \forall(x,y)\in D,\quad k=1,2. \tag{34}$$

Справді, оскільки для кожного $\zeta\in D_\zeta$ має місце рівність

$$G\left\{\Phi,\widetilde{s}_1,\widetilde{s}_2,\alpha,\beta\right\}(x,y):=\frac{\widetilde{s}_2-\widetilde{s}_1}{\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2}\left(\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial y}\,e_1-\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial x}\,e_2\right)=$$
$$=F\left\{\widetilde{s}_1,\widetilde{s}_2,\alpha,\beta\right\}[U_1,U_3](x,y)+iF\left\{\widetilde{s}_1,\widetilde{s}_2,\alpha,\beta\right\}[U_2,U_4](x,y), \tag{35}$$

то, підставляючи (33) при $n=1,\ m=3$ та $n=2,\ m=4$ відповідно у (35), одержуємо

$$G\left\{\Phi,\widetilde{s}_1,\widetilde{s}_2,\alpha,\beta\right\}(x,y)=\sum_{k=1}^{2}\left(Q_k\left\{\Phi,\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}(x,y)\,e_k+\right.$$
$$\left.+\,Q_k\left\{\Phi,\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\}(x,y)\,ie_k\right)\quad\forall(x,y)\in D,$$

що доводить необхідне твердження.

***Зауваження* 3.** Числові коефіцієнти у системі (34), що стоять перед $\dfrac{\partial U_j}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial U_j}{\partial y}$, $j=\overline{1,4}$, пов'язані співвідношеннями

$$a_{1,1}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=-b_{1,3}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=a_{1,2}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\}=-b_{1,4}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\},$$
$$a_{1,2}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=-b_{1,4}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=-a_{1,1}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\}=b_{1,3}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\},$$
$$a_{1,3}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=a_{1,4}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\},\quad a_{1,4}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=-a_{1,3}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\},$$
$$b_{1,1}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=b_{1,2}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\},\quad b_{1,2}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=-b_{1,1}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\},$$
$$a_{2,1}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=-b_{2,3}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=a_{2,2}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\}=-b_{2,4}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\},$$
$$a_{2,2}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=-b_{2,4}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=-a_{2,1}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\}=b_{2,3}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\},$$
$$a_{2,3}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=a_{2,4}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\},\quad a_{2,4}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=-a_{2,3}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\},$$
$$b_{2,1}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=b_{2,2}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\},\quad b_{2,2}\left\{\mathrm{Re},-\mathrm{Im}\right\}=-b_{2,1}\left\{\mathrm{Im},\mathrm{Re}\right\}.$$

Позначимо через $\mathcal{M}_4\{D_\zeta\}$ підклас моногенних функцій $\Phi\colon D_\zeta\longrightarrow\mathbb{B}_0$, що мають неперервні в D_ζ похідні $\Phi^{(k)}$ до порядку k включно, де $k\geq 4$.

З використанням теореми 2 одержуємо критерій належності Φ до $\mathcal{M}_4\{D_\zeta\}$, що є аналогом відповідного твердження для голоморфних функцій $F(z)$ комплексної змінної z через спряжену гармонічність компонент $\mathrm{Re}\,F(z)$ та $\mathrm{Im}\,F(z)$.

Лема 1. *Φ належить $\mathcal{M}_4\{D_\zeta\}$ тоді і тільки тоді, коли кожна функція $U_k=\mathrm{U}_k[\Phi]$, $k=\overline{1,4}$, є розв'язком рівняння* (1) *в області D, а четвірка функцій (U_1,U_2,U_3,U_4) задовольняє співвідношення* (31).

Доведення. *Достатність.* Оскільки кожна функція $U_k=\mathrm{U}_k[\Phi],\ k=\overline{1,4}$, є розв'язком рівняння (1), то $U_k(x,y),\ k=\overline{1,4}$, має неперервні похідні в області D до четвертого порядку включно. З теореми 2 випливає, що Φ є моногенною в D_ζ і має місце рівність

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x} = \Phi'(\zeta) e_1 \quad \forall\, \zeta \in D_\zeta. \tag{36}$$

де

$$\mathrm{U}_k\left[\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x}\right] = \frac{\partial U_k(x,y)}{\partial x}, \quad U_k = \mathrm{U}_k[\Phi], \quad k = \overline{1,4}.$$

Застосовуючи до обох частин рівності (31) оператор $(e_1)^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x}$ і враховуючи (36), переконуємося, що функція $\Phi := \Phi' = (e_1)^{-1}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ задовольняє умову (31) і є моногенною в області D_ζ. Застосовуючи цю операцію послідовно до Φ' та Φ'', приходимо до висновку, що функція Φ має похідні $\Phi^{(k)}$, $1 \le k \le 4$, до четвертого порядку включно, при цьому справджуються рівності

$$\Phi^{(k)}(\zeta) = \left((e_1)^{-1}\right)^k \frac{\partial^k \Phi(\zeta)}{\partial x^k} \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{37}$$

де

$$\mathrm{U}_j\left[\frac{\partial^k \Phi(\zeta)}{\partial x^k}\right] = \frac{\partial^k U_j(x,y)}{\partial x^k}, \quad k = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,4}.$$

Згідно з (37) одержуємо, що Φ має неперервні похідні до четвертого порядку включно в області D_ζ.

Необхідність доводиться тривіальним чином з урахуванням теореми 2, а також того факту, що кожна функція $U_k,\ k \in \{1,2,3,4\}$, задовольняє рівняння (1) на підставі рівностей

$$L\Phi(\zeta) = \mathcal{L}(e_1, e_2)\Phi^{(4)}(\zeta) \equiv 0, \quad \mathrm{U}_k\left[L\Phi(\zeta)\right] = L\left(\mathrm{U}_k(x,y)\right) \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \quad k = \overline{1,4},$$

які доводяться аналогічно до схем доведення рівностей (37).

Лему 1 доведено.

Введемо у розгляд комплексні змінні та області їх визначення:

$$z_k := x + \widetilde{s}_k y, \quad D_{z_k} := \{z_k \in \mathbb{C} \colon x e_1 + y e_2 \in D_\zeta\}, \quad k = 1, 2. \tag{38}$$

Має місце зображення моногенної функції $\Phi \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ через дві голоморфні функції комплексної змінної $z_1,\ z_2$ відповідно.

Теорема 3. *Функція $\Phi \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є моногенною в області D_ζ тоді і тільки тоді, коли справджується рівність*

$$\Phi(\zeta) = F_1(z_1)\mathfrak{I}_1 + F_2(z_2)\mathfrak{I}_2 \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{39}$$

де F_k — деяка голоморфна функція комплексної змінної z_k в області D_{z_k} при $k = 1, 2$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\Phi \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є моногенною, тоді потрібно довести, що існують голоморфні функції $F_k \colon D_{z_k} \longrightarrow \mathbb{C},\ k = 1, 2$, такі, що виконується рівність (39). Перетворюючи формулу (6) за допомогою підстановки в неї рівностей (12), одержуємо

$$\Phi(\zeta) = \alpha f_1(z_1)\mathfrak{I}_1 + \beta f_2(z_2)\mathfrak{I}_2 \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{40}$$

де

$$f_k(z_k) := U_1(x,y) + iU_2(x,y) + \widetilde{s}_k(U_3(x,y) + iU_4(x,y))$$
$$\forall z_k = x + \widetilde{s}_k y \in D_{z_k}, \quad k = 1, 2. \tag{41}$$

Доведемо, що функції (41) є голоморфними фукціями своїх комплексних змінних у областях $D_{z_k},\ k = 1, 2$. Записуючи аналог умов Коші – Рімана (31) для функції (40), приходимо до рівності

$$\alpha^2\, \mathrm{C}_{\widetilde{s}_1} f_1(z_1)\, \mathfrak{I}_1 + \beta^2\, \mathrm{C}_{\widetilde{s}_2} f_2(z_2)\, \mathfrak{I}_2 = 0 \quad \forall (x,y) \in D, \tag{42}$$

де

$$\mathrm{C}_{\widetilde{s}_k} := \frac{\partial}{\partial y} - \widetilde{s}_k \frac{\partial}{\partial x}, \quad k = 1, 2. \tag{43}$$

Покомпонентно рівність (42) набирає вигляду

$$\mathrm{C}_{\widetilde{s}_k} f_k(z_k) = 0 \quad \forall z_k \in D_{z_k}, \quad k = 1, 2. \tag{44}$$

Виділяючи дійсні та уявні частини для змінних $z_k,\ k = 1, 2$, з (38), отримуємо рівності

$$z_k = \xi_k + i\eta_k, \quad \xi_k := x + \mathrm{Re}\, \widetilde{s}_k\, y, \quad \eta_k := \mathrm{Im}\, \widetilde{s}_k\, y, \quad k = 1, 2. \tag{45}$$

Знаходимо частинні похідні функцій (41) першого порядку в області D:

$$\frac{\partial f_k}{\partial y} = \mathrm{Re}\, \widetilde{s}_k \frac{\partial f_k}{\partial \xi_k} + \mathrm{Im}\, \widetilde{s}_k \frac{\partial f_k}{\partial \eta_k}, \quad \frac{\partial f_k}{\partial x} = \frac{\partial f_k}{\partial \xi_k}, \quad k = 1, 2. \tag{46}$$

Підставляючи рівності (46) у (44), одержуємо

$$0 \equiv \mathrm{C}_{\widetilde{s}_k} f_k(z_k) = \mathrm{Im}\, \widetilde{s}_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta_k} - i \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right) f_k(z_k) \quad \forall z_k \in D_{z_k}, \quad k = 1, 2. \tag{47}$$

Беручи до уваги, що $\mathrm{Im}\, \widetilde{s}_k \neq 0,\ k = 1, 2$, приходимо до висновку, що (47) визначає умови Коші – Рімана для комплекснозначних функцій $f_k(z_k),\ k = 1, 2$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta_k} - i \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right) f_k(z_k) \quad \forall z_k \in D_{z_k}, \quad k = 1, 2. \tag{48}$$

З рівностей (41) отримуємо

$$\mathrm{Re}\, f_k(z_k) = U_1(x,y) + \mathrm{Re}\, \widetilde{s}_k\, U_3(x,y) - \mathrm{Im}\, \widetilde{s}_k\, U_4(x,y), \tag{49}$$

$$\mathrm{Im}\, f_k(z_k) = U_2(x,y) + \mathrm{Im}\, \widetilde{s}_k\, U_3(x,y) + \mathrm{Re}\, \widetilde{s}_k\, U_4(x,y). \tag{50}$$

За теоремою 2 компоненти $U_k,\ k = \overline{1,4}$, диференційовні в області D. Тому, беручи до уваги формули (49) і (50), переконуємося, що функції $\mathrm{Re}\, f_k(z_k)$ і $\mathrm{Im}\, f_k(z_k),\ k = 1, 2$, диференційовні в області $D_{\xi_k, \eta_k} := \{(\xi_k, \eta_k) \colon z_k = \xi_k + i\eta_k \in D_{z_k}\},\ k = 1, 2$.

Перепозначаючи $\alpha f_1(z_1)$ через $F_1(z_1)$, а $\beta f_2(z_1)$ через $F_2(z_2)$, записуємо формулу (40) у вигляді (39). Необхідність доведено.

Достатність. Потрібно довести, що функція, що задається рівністю (39) (F_k є голоморфною в $D_{z_k},\ k = 1, 2$), є моногенною в D_ζ.

Використовуючи позначення (43), рівності (9) і (12), голоморфність комплекснозначних функцій $F_k(z_k)\colon D_{z_k} \longrightarrow \mathbb{C},\ k = 1, 2,$ переконуємося, що має місце ланцюжок рівностей

$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial y}\,e_1 - \frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial x}\,e_2 = (\alpha \mathfrak{I}_1 \mathrm{C}_{\widetilde{s}_1} - \beta \mathfrak{I}_2 \mathrm{C}_{\widetilde{s}_2})\,(F_1(z_1)\mathfrak{I}_1 + F_2(z_2)\mathfrak{I}_2) =$$
$$= \alpha \mathfrak{I}_1 \mathrm{C}_{\widetilde{s}_1}\,(F_1(z_1))\,\mathfrak{I}_1 - \beta \mathfrak{I}_2 \mathrm{C}_{\widetilde{s}_2}\,(F_2(z_2))\,\mathfrak{I}_2 \equiv 0 \quad \forall \zeta \in D_\zeta.$$

Отже, функція (39) задовольняє аналог умов Коші – Рімана (31).

Підставляючи (26) у (39), одержуємо рівність

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\widetilde{s}_2 - \widetilde{s}_1}\left(\left(\frac{\widetilde{s}_2}{\alpha}F_1(z_1) - \frac{\widetilde{s}_1}{\beta}F_2(z_2)\right)e_1 + \left(\frac{1}{\beta}\,F_2(z_2) - \frac{1}{\alpha}\,F_1(z_1)\right)e_2\right) \quad \forall \zeta \in D_\zeta. \qquad (51)$$

Очевидно, що функції $F_k(z_k),\ k = 1, 2,$ мають неперервні частинні похідні першого порядку в області D за змінними x та y відповідно, тому ту ж властивість мають компоненти $U_k = \mathrm{U}_k[\Phi]$ функції (51). Достатність доведено.

Теорему 3 доведено.

Зауваження **4.** Випадки теореми 3 для моногенних функцій $\Phi(xe_1 + ye_2),\ e_1 = e,$ випливають також із робіт [23, 24] (обґрунтування даного факту проводится аналогічно до відповідного частинного випадку оператора L у [6], п. 3).

Зауваження **5.** Випадки теореми 3 для моногенних функцій, асоційованих з відповідними рівняннями вигляду (1), одержано у [6, 19, 20].

Будемо казати, що D_ζ є *обмеженою* та має *жорданову спрямлювану межу* ∂D_ζ, якщо область комплексної площини $D_z = \{x + iy\colon (x, y) \in D\}$ є обмеженою, а її межа ∂D_z є об'єднанням скінченного числа замкнених жорданових спрямлюваних кривих, обхід уздовж яких вибираємо таким чином, щоб область D_z залишалась зліва.

Наслідок **1.** *Нехай обмежена область D_ζ має жорданову спрямлювану межу ∂D_ζ, функція $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є моногенною в області D_ζ і неперервною у її замиканні $D_\zeta \cup \partial D_\zeta$ та зображується при цьому формулою* (39). *Тоді мають місце рівності*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{2} \mathfrak{I}_k \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{z_k}} \frac{F_k(t_k)}{t_k - z_k}\,dt_k \quad \forall \zeta \in D_\zeta,$$

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} \Phi(\zeta)\,d\zeta = 0, \quad \Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\zeta} \Phi(\vartheta)\,(\vartheta - \zeta)^{-1}\,d\vartheta \quad \forall \zeta \in D_\zeta,$$

де $\zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta,\ z_k \in D_{z_k},\ k = 1, 2.$

Наслідок **2.** *Кожна моногенна функція $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ має неперервні похідні $\Phi^{(n)}$ довільного порядку $n,\ n = 1, 2, \ldots,$ в області D_ζ. Компоненти $U_k = \mathrm{U}_k[\Phi],\ k = \overline{1, 4},$ є нескінченно неперервно диференційовними функціями в області D.*

З наслідку 2 та леми 1 випливає, що Φ належить $\mathcal{M}_4\{D_\zeta\}$ і кожна компонента $U_k = \mathrm{U}_k[\Phi]$, $k = \overline{1, 4}$, є частинним розв'язком рівняння (1).

При доведенні теореми 3 встановлено, що моногенна функція записується у вигляді формули (51). Замінюючи у ній, без втрати загальності, $\dfrac{\widetilde{s}_2}{(\widetilde{s}_2 - \widetilde{s}_1)\,\alpha}\,F_1(z_1)$ на $F_1(z_1)$, а

$-\dfrac{\widetilde{s}_1}{(\widetilde{s}_2-\widetilde{s}_1)\,\beta}\,F_2(z_2)$ на $F_2(z_2)$, одержуємо зображення моногенної функції Φ у базисі $\{e_1,e_2\}$ з (12):

$$\Phi(\zeta)=(F_1(z_1)+F_2(z_2))\,e_1-\left(\frac{F_1(z_1)}{\widetilde{s}_2}+\frac{F_2(z_2)}{\widetilde{s}_1}\right)e_2\quad\forall\zeta\in D_\zeta. \tag{52}$$

***Наслідок* 3.** *Нехай* Φ — *довільна моногенна функція* $\Phi\colon D_\zeta\longrightarrow\mathbb{B}_0$. *Частинними розв'язками рівняння* (1) *є функції вигляду*

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{4}a_k\mathrm{U}_k[\Phi(\zeta)]\quad\forall(x,y)\in D,$$

де a_k — *довільні дійсні сталі, а* $\mathrm{U}_k[\Phi(\zeta)]$ *визначається з* (52), $k=\overline{1,4}$.

4. Випадок не менш ніж двох несамоспряжених комплексних характеристик. Нехай множина коренів рівняння (2) містить хоча б два різних корені $\widetilde{s}_k\in\ker l$, $k=1,2$, такі, що задовольняють частинний випадок (30), а саме

$$\overline{\widetilde{s}_2}\neq\widetilde{s}_1,\quad \mathrm{Im}\,\widetilde{s}_k\neq 0,\quad k=1,2, \tag{53}$$

де $\overline{x+iy}:=x-iy$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Очевидно, що виконання умов (53) при $b_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,5}$, у (1) еквівалентне тому, що множина $\ker l$ складається з чотирьох попарно різних комплексних чисел

$$\ker l\equiv\{s_1,s_2,\overline{s_1},\overline{s_2}\}, \tag{54}$$

де s_k, $k=1,2$, задовольняють умови (53) з $\widetilde{s}_k:=s_k$, $k=1,2$.

У даному пункті під $\widetilde{s}_k$, $k=1,2$, будемо розуміти довільну пару різних елементів з $\widetilde{s}_k\in$ $\in\ker l$, $k=1,2$, що задовольняють умови теореми 1 і співвідношення (53).

Якщо $b_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,5}$, то з рівності (54) випливає, що існують чотири пари даних елементів $\widetilde{s}_1$, $\widetilde{s}_2\colon(s_1,s_2)$, $(\overline{s_1},\overline{s_2})$ та ті, що одержуються переставленнями.

Нехай $b_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,5}$, у (1), тоді формула загального розв'язку рівняння (1) для випадку (53) в обмеженій однозв'язній області D встановлюється так само (міркування аналогічні [2, с. 109, 110]), як і відповідна формула (див., наприклад, [2, с. 136]) для випадку рівняння (1), коли останнє визначає рівняння для знаходження функції напруження для плоского анізотропного плоского середовища:

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\,(F_1(z_1)+F_2(z_2))\quad\forall(x,y)\in D. \tag{55}$$

Тут $F_k\colon D_{z_k}\longrightarrow\mathbb{C}$, — $k=1,2$, — довільні голоморфні функції відповідних комплексних змінних. Тоді рівність (55) можна записати у вигляді

$$u(x,y)=U_1[\Phi_u(\zeta)]\quad\forall\zeta\in D_\zeta,$$

де $\Phi_u:=\Phi$ визначається формулою (52) з тими ж $F_k(z_k)$, $k=1,2$, що й у (55).

Моногенна функція (52) задовольняє умови леми 1.

Позначимо через Φ_0 моногенну функцію $\Phi_0:=\Phi$ з (6), де $U_1\equiv 0$. Отже, четвірка її компонент (U_1,U_2,U_3,U_4), $U_k=\mathrm{U}_k[\Phi_0]$, $k=\overline{1,4}$, задовольняє систему (34), в якій $U_1\equiv 0$.

Теорема 4. *Нехай* u — *деякий розв'язок рівняння* (1), *де* $b_k \in \mathbb{R},\ k = \overline{1,5}$, *у обмеженій однозв'язній області* D, *а базис* $\{e_1, e_2\}$ *алгебри* $\mathbb{B}_0$ *визначається формулою* (12). *Усі моногенні функції* $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ *такі, що* $\mathrm{U}_1[\Phi] \equiv u$, *мають вигляд*

$$\Phi(\zeta) = \Phi_u(\zeta) + \Phi_0(\zeta) \quad \forall \zeta \in D_\zeta.$$

Розглянемо випадок, коли рівняння (1) є рівнянням для знаходження функції напружень (див., наприклад, [2, с. 140], де $a_{26} = a_{16} = 0,\ \overline{U} \equiv 0,\ F := u$ для ортотропного середовища та у випадку відсутності об'ємних сил) для частинного випадку плоского анізотропного середовища — плоского ортотропного середовища (див., наприклад, [2, с. 33, 34]), а саме

$$L(x, y) \equiv a_{11}\,\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} + (2a_{12} + a_{66})\,\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22}\,\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} = 0. \tag{56}$$

Тут коефіцієнти задовольняють співвідношення (див., наприклад, [3, с. 56])

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{66} > 0, \quad -\sqrt{a_{11}a_{22}} < a_{12} < \sqrt{a_{11}a_{22}}. \tag{57}$$

Крім того, числа, що утворюють коефіцієнти рівняння (56), є коефіцієнтами рівнянь узагальненого закону Гука для ортотропного середовища (див., наприклад, [2, с. 34]) вигляду

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y, \quad \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y, \quad \frac{\gamma_{xy}}{2} = a_{66}\tau_{xy},$$

де $\varepsilon_x,\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2},\ \varepsilon_y$ і $\sigma_x,\ \tau_{xy},\ \sigma_y$ — компоненти тензора деформацій [2, с. 16] і напружень [2, с. 15] відповідно.

Як відомо (див., наприклад, [2, с. 113], де $a_{16} = a_{26} = 0$), характеристичне рівняння (2) для рівняння (56) не може мати дійсних коренів. Беручи до уваги, що коефіцієнти рівняння (56) є дійсними, приходимо до висновку, що умова простоти коренів характеристичного рівняння (2) (для рівняння (56)) рівносильна існуванню хоча б однієї пари різних $s_k \in \ker l,\ k = 1, 2$, такої, що $\overline{s_2} \neq s_1$. Тому має місце (54).

З'ясуємо якому класу ортотропій відповідає випадок, коли рівняння для функції напружень (яке, у свою чергу, відповідає умові (54)) має вигляд (56). Як випливає з [22, с. 50] (або [3, с. 53]), даний клас ортотропних плоских середовищ збігається з класом загальних ортотропних плоских середовищ, для яких рівняння (56) не можна звести до бігармонічного рівняння за допомогою невиродженої заміни змінних (перетворення вигляду $X = X(x, y),\ Y = Y(x, y)$, $(x, y) \in D \times D$, що має обернене).

Виконаємо заміну змінних $\sqrt[4]{a_{22}}x$ на $X =: x$ та $\sqrt[4]{a_{11}}y$ на $Y =: y$. Тоді рівняння (56) набере вигляду

$$L_p(x, y) := L(x, y) \equiv \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} + 2p\,\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} = 0, \tag{58}$$

де

$$p := \frac{2a_{12} + a_{66}}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}}. \tag{59}$$

З'ясуємо яких значень може набувати права частина (59). Беручи до уваги (57), одержуємо співвідношення $-1 + \varepsilon < p < 1 + \varepsilon,\ \varepsilon := \dfrac{a_{66}}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}} > 0$.

Очевидно, що заміна змінних, яку ми застосували для зведення рівняння (56) до рівняння (58), є невиродженою. Якщо у рівнянні (58) число $p = 1$, то воно перетворюється на бігармонічне рівняння. Як відомо (див., наприклад, [22, с. 50]), необхідною і достатньою умовою існування невиродженої заміни незалежних змінних, що зводить рівняння вигляду (56) (більше того, рівняння вигляду (2)) до бігармонічного рівняння, є те, що характеристичне рівняння (для відповідного рівняння з (56)) має два попарно рівних комплексних корені, тобто корені вигляду S_k, $\operatorname{Im} S_k \neq 0$, $k = 1, 2$, кратності два. Але останнє неможливо за умовою внаслідок простоти коренів характеристичного рівняння. Тому $p \neq 1$ і можливі два випадки щодо p: 1) $p \in (-1+\varepsilon; 1) \subset (-1; 1)$, 2) $p \in (1; 1+\varepsilon) \subset (1; \infty)$.

Випадок 1 розглянуто у роботах [19, 20], а випадок 2 — у [6, 21]. Зокрема, для оператора $L := L_p$ теорема 4 набирає замкненої форми у тому розумінні, що функції Φ_0 знайдено в явному вигляді.

У випадку, коли рівняння (1) є рівнянням для знаходження функції напружень для плоского анізотропного середовища (випадок відсутності об'ємних сил), воно є еліптичним та має вигляд (див., наприклад, [2, с. 140])

$$L(x,y) \equiv a_{11}\,\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} - 2a_{16}\,\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x \partial y^3} + $$

$$+ (2a_{12} + a_{66})\,\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{26}\,\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^3 \partial y} + a_{22}\,\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} = 0, \qquad (60)$$

де дійсні коефіцієнти задовольняють умови, аналогічні (57) (див., наприклад, [3, 4]).

З результатів [22, с. 50] та умови простоти коренів характеристичного рівняння (для рівняння (60)) випливає, що не існує невиродженої заміни незалежних змінних, що зводить рівняння (60) до бігармонічного рівняння

$$(\Delta_2)^2\, u(x,y) = 0, \quad \Delta_2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Разом з тим С. Г. Міхлін (див., наприклад, [25] або [26], гл. 5, § 7) навів приклад такої невиродженої заміни незалежних змінних (композиція лінійних замін змінних та поворотів координатних осей), що зводить рівняння (60) до вигляду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Delta_2 u(x,y) = 0, \qquad (61)$$

де $k > 0$, $k \neq 1$.

Зауважимо, що рівняння (61) є рівнянням вигляду (56). Останнє рівняння зводиться до рівняння (58).

Література

1. Механика в СССР за пятьдесят лет. Т.3. Механика деформируемого твердого тела, под ред. Л. И. Седова и др., Наука, Москва (1972).
2. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, Наука, Москва (1977).
3. Д. И. Шерман, *Плоская задача теории упругости для анизотропной среды*, Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 86, 51 – 78 (1938).
4. Ю. А. Боган, *Регулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи в анизотропной двумерной теории упругости*, Изв. РАН. Механика твердого тела, № 4, 17 – 26 (2005).

5. И. П. Мельниченко, *Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга*, Укр. мат. журн., **38**, № 2, 252 – 254 (1986).
6. С. В. Грищук, *Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії, I*, Укр. мат. журн., **70**, № 8, 1058 – 1071 (2018).
7. P. W. Ketchum, *Solution of partial differential equations by means of hypervariables*, Amer. J. Math., **54**, № 2, 253 – 264 (1932).
8. В. Ф. Ковалев, И. П. Мельниченко, *Бигармонические функции на бигармонической плоскости*, Докл. АН УССР. Сер. А, № 8, 25 – 27 (1981).
9. H. H. Snyder, *Elliptic systems in the plane associated with certain partial differential equations of deformable media*, Contemp. Math., **11**, 199 – 211 (1982).
10. R. Z. Yeh, *Hyperholomorphic functions and higher order partial differential equations in the plane*, Pacif. J. Math., **142**, № 2, 379 – 399 (1990).
11. А. П. Солдатов, *Эллиптические системы высокого порядка*, Дифференц. уравнения, **25**, 136 – 144 (1989).
12. A. P. Soldatov, *To elliptic theory for domains with piecewise smooth boundary in the plane*, Partial Different. and Integral Equat., Kluwer Acad. Publ. (1999), p. 177 – 186.
13. V. S. Shpakivskyi, *Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **12**, № 3, 251 – 268 (2015).
14. В. С. Шпаківський, *Гіперкомплексний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними*, Праці Ін-ту прикл. математики і механіки НАН України, **32**, 147 – 168 (2018).
15. E. Study, *Über Systeme komplexer Zahlen und ihre Anwendungen in der Theorie der Transformationsgruppen*, Monatsh. Math., **1**, № 1, 283 – 354 (1890).
16. Н. Г. Чеботарев, *Введение в теорию алгебр. 3-е изд.*, Физико-математическое наследие: математика (алгебра), Изд-во ЛКИ, Москва (2008).
17. W. E. Baylis, *Clifford (geometric) algebras with applications to physics, mathematics, and engineering*, Birkhäuser, Boston etc. (1996).
18. С. В. Грищук, С. А. Плакса, *Моногенные функции в бигармонической алгебре*, Укр. мат. журн., **61**, № 12, 1587 – 1596 (2009).
19. С. В. Грищук, *Моногенні функції у двовимірних комутативних алгебрах для рівнянь плоскої ортотропії*, Праці Ін-ту прикл. математики і механіки НАН України, **32**, 18 – 29 (2018).
20. С. В. Грищук, *Моногенные функции в комплексных коммутативных алгебрах второго ранга и система равновесия Ляме для одного класса плоской ортотропии*, Укр. мат. вісн., **16**, № 3, 345 – 356 (2019).
21. С. В. Грищук, *Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. II*, Укр. мат. журн., **70**, № 10, 1382 – 1389 (2018).
22. С. Г. Михлин, *Плоская задача теории упругости*, Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 65 (1934), 83 с.
23. С. А. Плакса, Р. П. Пухтаєвич, *Конструктивний опис моногенних функцій в скінченновимірній напівпростій комутативній алгебрі*, Доп. НАН України, № 1, 14 – 21 (2014).
24. S. A. Plaksa, R. P. Pukhtaievych, *Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra*, An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat., **22**, № 1, 221 – 235 (2014).
25. С. Г. Михлин, *Плоская деформация в анизотропной среде*, Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 76, 1 – 19 (1936).
26. S. G. Mikhlin, N. F. Morozov, M. V. Paukshto, *The integral equations of the theory of elasticity* (Teubner-Texte zur Mathematik, **135**), Springer, Stuttgart etc. (1995).

Одержано 01.07.20,
після доопрацювання — 02.03.21