DOI: 10.37863/umzh.v72i11.6201

УДК 517.988

В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов (Ін-т математики НАН України, Київ),
О. Ф. Кашпур (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОПЕРАТОРНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ В ЕВКЛІДОВИХ ПРОСТОРАХ

We obtain new criteria of compatibility for a linear system of equations (equivalent to the Kronecker – Capelli's theorem) and inequalities (equivalent to S. M. Chernikov's theorem), which are related to conditions for the existence of a linear interpolation polynomial in Euclidean spaces.

Запропоновано нові критерії сумісності лінійної системи рівнянь (еквівалентні теоремі Кронекера – Капеллі) та нерівностей (еквівалентні теоремі С. М. Чернікова), пов'язані з умовами існування лінійного інтерполяційного полінома в евклідових просторах.

Вступ. Розв'язання прикладних задач достатньо часто призводить до неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь та нерівностей, у зв'язку з чим постають питання про їхню сумісність. Відповідь на ці питання у випадку рівнянь надає теорема Кронекера – Капеллі [1], а у випадку нерівностей — теорема С. М. Чернікова [2]. В цій статті наведено аналоги згаданих теорем, причому для того, щоб вияснити чи має система розв'язок, потрібно перевіряти виконання певних рівностей. Встановлено зв'язок цих теорем з поліноміальним інтерполянтом першого степеня в евклідових просторах та умовами його існування.

Опишемо коротко структуру роботи. Перший пункт містить відомі результати, необхідні для подальшого викладу. Другий пункт присвячено умовам існування інтерполяційного полінома першого степеня, значення якого на спеціальних інтерполяційних вузлах збігаються з лінійною системою алгебраїчних рівнянь. Показано, що ці умови еквівалентні умовам теореми Кронекера – Капеллі. У третьому пункті показано, як за допомогою загальної теорії поліноміального інтерполювання одержати конструктивні умови розв'язності системи лінійних алгебраїчних нерівностей. Доведено, що ці умови еквівалентні умовам теореми С. М. Чернікова. Насамкінець наведено висновки. Виклад проілюстровано конкретними прикладами.

1. Допоміжні результати. Нехай задано систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Aa = y, \tag{1}$$

де $A\colon R_n \to R_m,\ A = \|\alpha_{ij}\|_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}},\ a = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Теорема 1 (Кронекер – Капеллі) [1]. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь* (1) *тоді і тільки тоді сумісна, коли ранг розширеної матриці* $\overline{A}$ *дорівнює рангу матриці* A.

В деяких випадках, на практиці, більш зручно користуватись іншим формулюванням теореми 1. У роботі (див., наприклад, [3]) розглянуто псевдообернення лінійних операторів у гільбертових та евклідових просторах. Позначимо через $E_n,\ E_m$ евклідові простори, через E одиничну матрицю. На підставі властивостей псевдооберненого оператора в евклідових просторах наведено наступне твердження.

Теорема 2 [3]. *Для розв'язності рівняння*

$$Aa = y, \quad A\colon E_n \to E_m \tag{2}$$

необхідно та достатньо виконання умови

$$(E - AA^+)y = 0, \tag{3}$$

де A^+ *— псевдообернена матриця Мура – Пенроуза до матриці* A*. Для будь-якого* $y \in E_m$

$$\inf\{\|Aa - y\|_{E_m} : a \in E_n\} = \|(E - AA^+)y\|_{E_m},$$

при цьому точна нижня границя досягається для

$$a = A^+y + (E - A^+A)z, \quad z \in E_n.$$

Система (2) збігається із системою лінійних алгебраїчних рівнянь (1). Отже, умова (3) є умовою сумісності системи рівнянь (1), яка є аналогом теореми Кронекера – Капеллі.

Наведемо відомий результат [2] відносно умов розв'язності лінійної системи нерівностей. Нехай $\alpha_{ik},\ z_k,\ a_i,\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m},$ — комплексні числа, $\varepsilon_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},$

$$|\alpha_{i1}z_1 + \alpha_{i2}z_2 + \ldots + \alpha_{in}z_n - a_i| \leq \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{4}$$

— система нерівностей рангу r, а індекси $\mu_1,\ \mu_2, \ldots, \mu_r$ вибрано так, що принаймні один із визначників

$$|\alpha_{i_r\mu_l}| = \begin{vmatrix} \alpha_{i_1\mu_1} & \ldots & \alpha_{i_1\mu_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i_r\mu_1} & \ldots & \alpha_{i_r\mu_r} \end{vmatrix} \tag{5}$$

не дорівнює нулю. Має місце така теорема.

Теорема 3 (С. М. Черніков) [2]**.** *Необхідною та достатньою умовою сумісності цієї системи є існування такої системи індексів* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$*, при яких* $|\alpha_{\nu_k\mu_l}| \neq 0$ *та існує принаймні один розв'язок* $(u_{\nu_1}, u_{\nu_2}, \ldots, u_{\nu_r})$ *системи*

$$|\overline{z}_{\nu_i} - a_{\nu_i}| = \varepsilon_{\nu_i}, \quad i = \overline{1,r},$$

$$\overline{z}_{\nu_i} = \alpha_{\nu_i1}z_1 + \alpha_{\nu_i2}z_2 + \ldots + \alpha_{\nu_in}z_n, \quad i = \overline{1,r},$$

що відповідає співвідношенням

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_{\nu_1\mu_1} & \ldots & \alpha_{\nu_1\mu_r} & u_{\nu_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\nu_r\mu_1} & \ldots & \alpha_{\nu_r\mu_r} & u_{\nu_r} \\ \alpha_{j\mu_1} & \ldots & \alpha_{j\mu_r} & a_j \end{matrix}\right\| \leq \varepsilon_j \left\|\begin{matrix} \alpha_{\nu_1\mu_1} & \ldots & \alpha_{\nu_1\mu_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu_r\mu_1} & \ldots & \alpha_{\nu_r\mu_r} \end{matrix}\right\|, \quad j = \overline{1,m}.$$

Якщо числа $\varepsilon_i,\ i = \overline{1,m},$ в (4) покладемо рівними нулю, то система нерівностей (4) перетвориться в систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Отже, з теореми 3, як наслідок, отримаємо необхідну та достатню умову сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь: система лінійних рівнянь тоді і тільки тоді сумісна, коли ранг матриці не зміниться у випадку розширення цієї матриці стовпцем вільних членів. Цей наслідок також буде аналогом теореми Кронекера – Капеллі.

Для встановлення зв'язку теорем $1-3$ з поліноміальним інтерполюванням у евклідових просторах нам будуть потрібні деякі відомі результати з [7].

Нехай $F\colon X \to Y$ $(X, Y$ — гільбертові простори), $x_i \in X,\ i = \overline{1,m},\ E,\ \Gamma$ — квадратні матриці m-го порядку, E — одинична матриця,

$$\Gamma = \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i, x_j)^p \right\|_{i,j=\overline{1,m}}, \quad 0^0 = 1,$$

$(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в X, Γ^+ — псевдообернена матриця Мура–Пенроуза до матриці Γ [4–6]. Наведемо умови, за яких існує операторний інтерполяційний поліном n-го степеня $P_n(x)$ з інтерполяційними умовами $P_n(x_i) = F(x_i) = y_i,\ i = \overline{1,m}$. Має місце така теорема.

Теорема 4 (В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов) [7]**.** *Необхідною та достатньою умовою існування інтерполяційного полінома $P_n(x)$ є рівність*

$$(E - \Gamma^+\Gamma) y = 0, \quad y = \|y_i\|_{i=\overline{1,m}}, \tag{6}$$

а вся множина операторних інтерполяційних поліномів n-го степеня за умови виконання (6) *має вигляд*

$$P_n(x) = Q_n(x) + \left\langle y - Q_n, \Gamma^+ \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i, x)^p \right\|_{i=\overline{1,m}} \right\rangle, \tag{7}$$

де $Q_n(x)$ — довільний поліном, що належить множині операторних поліномів n-го степеня,

$$Q_n = \|Q_n(x_i)\|_{i=\overline{1,m}}, \qquad \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i, \qquad \alpha = \|\alpha_i\|_{i=\overline{1,m}}, \qquad \beta = \|\beta_i\|_{i=\overline{1,m}}.$$

Також у [7] доведено, що інтерполянт мінімальної норми (породженої скалярним добутком з гауссовою мірою [8]) має вигляд

$$\overline{P_n}(x) = \left\langle y, \Gamma^+ \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i, x)^p \right\|_{i=\overline{1,m}} \right\rangle. \tag{8}$$

2. Умова існування інтерполяційного полінома першого степеня від n змінних, який на m вузлах задовольняє задану систему рівнянь. Будемо розглядати лінійну інтерполяційну задачу в скінченновимірному евклідовому просторі. Нехай $f\colon E_n \to R_1,\ E_n$ — n-вимірний евклідовий простір, $u \in E_n,\ u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Інтерполяційний поліном першого степеня для $f(u)$ запишемо у вигляді

$$P_1(u) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \tag{9}$$

з вузлами інтерполяції $u_k,\ k = \overline{0,m}$:

$$\begin{aligned} u_0 &= (0, 0, \ldots, 0), \\ u_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}), \\ u_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots, \alpha_{mn}) \end{aligned} \tag{10}$$

та інтерполяційними умовами

$$P_1(u_k) = f(u_k) = y_k, \qquad k = \overline{0, m}, \quad y_0 = 0. \tag{11}$$

На підставі теореми 4 маємо таку теорему.

Теорема 5. *Для розв'язання інтерполяційної задачі* (9)–(11) *необхідно та достатньо виконання рівності*

$$(E - \Gamma^+ \Gamma) y = 0, \tag{12}$$

де $y = (0, y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $\Gamma = \left\| \sum_{p=0}^{1} (u_i, u_j)^p \right\|_{i,j=\overline{0,m}}$, $0^0 = 1$, $(\cdot, \cdot)$ — *скалярний добуток в* E_n, Γ^+ — *псевдообернена матриця Мура–Пенроуза* [4–6] *до матриці* Γ, E — *одинична матриця розмірності* $(m+1) \times (m+1)$.

Оскільки це є еквівалент теореми 1 в сенсі сумісності системи (1), то аналогом теореми 1 (Кронекера–Капеллі) є рівність (12). При цьому розв'язок лінійної інтерполяційної задачі (9)–(11) в сенсі існування полінома (9), що має мінімальну норму, породжену скалярним добутком з гауссовою мірою [8], має вигляд [7, 9]

$$P_1(u) = \left\langle y, \Gamma^+ \left\| \sum_{p=0}^{1} (u_i, u)^p \right\|_{i=\overline{0,m}} \right\rangle, \tag{13}$$

де $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \beta_i$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$. Для інтерполяційного полінома 1-го степеня матриця Γ набирає вигляду

$$\Gamma = \left\| \sum_{p=0}^{1} (u_i, u_j)^p \right\|_{i,j=\overline{0,m}} = I + G(u_0, u_1, \ldots, u_m),$$

де I — квадратна матриця порядку $m+1$ з елементами, що дорівнюють одиниці, $G(u_0, u_1, \ldots$ $\ldots, u_m)$ — матриця Грама. Тоді

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 + (u_1, u_1) & \ldots & 1 + (u_1, u_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 + (u_m, u_1) & \ldots & 1 + (u_m, u_m) \end{Vmatrix}, \tag{14}$$

$\det \Gamma = \det G(u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

***Зауваження* 1.** Рівність (12) дає, як і теорема Кронекера – Капеллі, необхідну та достатню умову сумісності лінійної системи алгебраїчних рівнянь. В деяких дослідженнях формула (12) може бути використана для побудови інтерполяційного наближення функції багатьох змінних у вигляді полінома мінімальної норми (13).

***Зауваження* 2.** Якщо $m = n$, то розмірність матриці Γ в (12) на одиницю більша, ніж матриці A в (3). При побудові псевдообернених матриць достатньо великих розмірностей відмінність витрат при обчисленні Γ^+ та A^+ несуттєва.

Проілюструємо теорему 5 на прикладах.

***Приклад* 1.** Перевіримо умову сумісності системи рівнянь $x_1 + x_2 = 1,\ -x_1 - x_2 = -1$, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\overline{A}) = 1$. Отже, система рівнянь сумісна. Перевіримо рівність (12). Маємо $u_0 = (0, 0),\ u_1 = (1, 1),\ u_2 = (-1, -1),\ y = (0, 1, -1)$, матриця (14) в цьому випадку набирає вигляду

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Використовуючи скелетний розклад матриці Γ [4], одержуємо

$$\Gamma^+ = \frac{1}{72}\begin{Vmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 17 & -1 \\ 8 & -1 & 17 \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

$$(E - \Gamma^+\Gamma)y = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Умова (12) виконується, отже, система рівнянь має розв'язок, тобто є сумісною. Використовуючи рівність (12), можна не лише відповісти на питання про сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь, а і побудувати лінійний інтерполяційний поліном мінімальної норми (13) для функції двох змінних $f(x_1, x_2)$, що задана своїми значеннями. Так, матриця Γ^+ визначається рівністю (15), інтерполянт (13) має вигляд $P_1(x_1, x_2) = 0,5(x_1 + x_2)$.

***Приклад* 2.** Розглянемо систему рівнянь $x_1 + x_2 = 2,\ -x_1 - x_2 = -1$. Тоді $\operatorname{rang}(A) = 1$, $\operatorname{rang}(\overline{A}) = 2$ і система несумісна. З огляду на теорему 5 маємо $u_0 = (0, 0),\ u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (-1, -1),\ y = (0, 2, -1)$, а на підставі викладеного вище перевіримо умову (12):

$$(E - \Gamma^+\Gamma)y = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Отже, відповідна інтерполяційна задача не має розв'язку, а це означає, що система рівнянь несумісна.

***Приклад* 3.** Розглянемо систему рівнянь $x_1 + x_2 = 3,\ x_1 - x_2 = -1$. Для даної системи $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\overline{A}) = 2$. В цьому випадку система є сумісною, матриця A — невиродженою. Матриця Γ має обернену $\Gamma^+ = \Gamma^{-1}$, а отже, задача інтерполяції (9) – (11) інваріантно розв'язна, тобто має розв'язок при будь-якій правій частині. Дійсно,

$$(E - \Gamma^{+}\Gamma)y = (E - \Gamma^{-1}\Gamma)y = 0,$$

і умова (12) виконується при будь-яких значеннях функції у вузлах інтерполяції.

3. Умова існування інтерполяційного полінома першого степеня від n змінних, який на m вузлах задовольняє задану систему нерівностей. Інтерполяційний поліном першого степеня шукаємо у вигляді

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n. \tag{16}$$

Задача 1. Знайти умови, при виконанні яких існує такий поліном (16) або, що те ж саме, такий вектор $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, що буде виконуватись інтерполяційна система нерівностей

$$\begin{gathered} P_1(u_0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = 0, \\ f_{1j} \leq P_1(u_j) = a_0 + a_1\alpha_{j1} + a_2\alpha_{j2} + \ldots + a_n\alpha_{jn} \leq f_{2j}, \quad j = \overline{1,m}, \end{gathered} \tag{17}$$

на векторах $u_0 = \|\alpha_{0i} = 0\|_{i=\overline{1,n}}$, $u_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{jn})$, $j = \overline{1,m}$, з дійсними компонентами при заданих f_{1j}, f_{2j}, $j = \overline{1,m}$.

Нехай для системи нерівностей (4) у випадку $z_i = x_i$, $a_i = y_i$, $i = \overline{1,n}$, та системи нерівностей (17)

$$f_{1i} = -\varepsilon_i + y_i, \qquad f_{2i} = \varepsilon_i + y_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Тоді умови (17) можна розглядати як існування такої послідовності g_j, $j = \overline{0,m}$, для якої

$$P_1(u_j) = g_j, \quad j = \overline{0,m}, \tag{18}$$

при цьому повинні виконуватись нерівності

$$f_{1j} \leq g_j \leq f_{2j}, \quad j = \overline{1,m}, \qquad g_0 = a_0 = 0. \tag{19}$$

Згідно з теоремою 5, інтерполяційний поліном (16) з умовами (18) буде існувати тоді і тільки тоді, коли буде мати місце рівність

$$(E - \Gamma^{+}\Gamma)\|g_j\|_{j=\overline{0,m}} = 0, \tag{20}$$

де Γ має вигляд (14). Поглянемо на (20), як на необхідну і достатню умову (3) розв'язності системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Gamma y = \|g_j\|_{j=\overline{0,m}}.$$

Подіємо на обидві частини рівняння $(m \times (m+1))$-матрицею

$$S = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

В результаті одержимо

$$S\Gamma y = AA^T y = \|g_j\|_{j=\overline{1,m}}. \tag{21}$$

Позначимо

$$A^T y = x.$$

Тоді у покомпонентному вигляді система (21) набирає вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i = g_j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{22}$$

Але за припущенням і за побудовою система (22) має розв'язок $x_i = a_i,\ i = \overline{1,n}$, причому виконуються нерівності (19). Таким чином, приходимо до такого твердження: теореми 3 і 5 еквівалентні в сенсі сумісності системи (17).

Знайдемо умови, за яких існує хоча б один розв'язок системи (17). З цією метою розглянемо m-параметричну систему рівнянь

$$\begin{gathered} P_1(u_0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = a_0 = 0, \\ a_0 + a_1\alpha_{j1} + a_2\alpha_{j2} + \ldots + a_n\alpha_{jn} = t_j f_{1j} + (1 - t_j) f_{2j}, \\ t_j \in [0,1], \quad j = \overline{1,m}, \end{gathered} \tag{23}$$

де

$$f_{1j} \le t_j f_{1j} + (1 - t_j) f_{2j} \le f_{2j} \quad \forall t_j \in [0,1], \quad j = \overline{1,m}. \tag{24}$$

Наше завдання полягає у тому, щоб з'ясувати чи існує таке значення параметрів $t_j \in [0,1]$, при яких буде виконуватись умова розв'язності системи (23), тобто чи буде мати місце рівність

$$(E - \Gamma^+\Gamma) \left\| \begin{matrix} 0 \\ t_1 f_{11} + (1 - t_1) f_{21} \\ \ldots \\ t_m f_{1m} + (1 - t_m) f_{2m} \end{matrix} \right\| = 0. \tag{25}$$

Система (25) відносно $t_j \in [0,1]$, $j = \overline{1,m}$, є системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Якщо ця система має розв'язок, то підставляємо його у (23) і тим самим визначаємо вектор $\|g_j\|_{j=\overline{0,m}}$, а отже, тоді і система (17) має розв'язок. Якщо ж система (25) не має розв'язку, то система (17) також не має розв'язку.

Запишемо систему рівнянь (25) у вигляді

$$(E - \Gamma^+\Gamma) \left\| \begin{matrix} 0 + 0 \\ t_1(f_{11} - f_{21}) + f_{21} \\ t_2(f_{12} - f_{22}) + f_{22} \\ \ldots \\ t_m(f_{1m} - f_{2m}) + f_{2m} \end{matrix} \right\| =$$

$$= (E - \Gamma^+\Gamma) \begin{Vmatrix} 0 \\ t_1(f_{11} - f_{21}) \\ t_2(f_{12} - f_{22}) \\ \dots \\ t_m(f_{1m} - f_{2m}) \end{Vmatrix} + (E - \Gamma^+\Gamma) \begin{Vmatrix} 0 \\ f_{21} \\ f_{22} \\ \dots \\ f_{2m} \end{Vmatrix} = 0. \tag{26}$$

Позначимо $\bar{t}_i = t_i(f_{1i} - f_{2i}),\ i = \overline{1,m}$, і запишемо загальний розв'язок (див., наприклад, [3]) системи (26):

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ \bar{t}_i \end{Vmatrix}_{i=\overline{1,m}} = (E - \Gamma^+\Gamma)^+(E - \Gamma^+\Gamma) \begin{Vmatrix} 0 \\ -f_{2i} \end{Vmatrix}_{i=\overline{1,m}} +$$
$$+\big(E - (E - \Gamma^+\Gamma)^+(E - \Gamma^+\Gamma)\big) \begin{Vmatrix} w_i \end{Vmatrix}_{i=\overline{0,m}}.$$

Шукаємо такий вектор $w = \|w_i\|_{i=\overline{0,m}}$, щоб виконувались умови $t_i \in [0,1],\ i = \overline{1,m}$.

Проілюструємо останні міркування на такому прикладі.

***Приклад* 4.** Розв'язати систему нерівностей

$$-1 \le x_1 + x_2 \le 1,$$
$$1/2 \le -x_1 - x_2 \le 1.$$

Система рівнянь (23) буде мати вигляд

$$x_1 + x_2 = -t_1 + (1 - t_1),$$
$$-x_1 - x_2 = t_2/2 + (1 - t_2).$$

З прикладу 1 маємо

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}, \qquad \Gamma^+ = \frac{1}{72} \begin{Vmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 17 & -1 \\ 8 & -1 & 17 \end{Vmatrix}.$$

Запишемо необхідні та достатні умови сумісності системи (25) для прикладу 4:

$$(E - \Gamma^+\Gamma) \begin{Vmatrix} 0 + 0 \\ -t_1 + (1 - t_1) \\ t_2/2 + (1 - t_2) \end{Vmatrix} = (E - \Gamma^+\Gamma) \begin{Vmatrix} 0 + 0 \\ -2t_1 + 1 \\ -t_2/2 + 1 \end{Vmatrix} = 0,$$

де матриці Γ, Γ^+, $(E - \Gamma^+\Gamma)$ визначені у прикладі 1. Тоді

$$\frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ -2t_1 \\ -t_2/2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язком цієї системи буде $t_1 = 1 - t_2/4$, а загальний розв'язок системи нерівностей можна подати у вигляді $x_1 = -z - 2t_1 + 1,\ x_2 = z,\ z \in R_1,\ t_1 \in [3/4, 1]$.

Розглянемо комплексні евклідові простори $\widetilde{E}_m,\ \widetilde{E}_n$. Нехай $\alpha_{ij},\ z_j,\ y_i,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$, — комплексні числа. Система нерівностей С. М. Чернікова має вигляд

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}z_j-y_i\right|\le\varepsilon_i,\quad i=\overline{1,m}. \tag{27}$$

Знайдемо необхідні та достатні умови розв'язності системи нерівностей (27). Розглянемо систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}z_j-y_i=\varepsilon_i s_i,\qquad |s_i|\le 1,\quad i=\overline{1,m}. \tag{28}$$

Якщо існують такі комплексні числа $s_i,\ i=\overline{1,m}$, що система (28) буде розв'язною, то система нерівностей (27) також буде розв'язною, і навпаки.

Запишемо (28) у матрично-векторному вигляді

$$\|\alpha_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}\|z_j\|_{j=\overline{1,n}}=\|y_i+\varepsilon_i s_i\|_{i=\overline{1,m}}.$$

Задача 2. Знайти умови, при виконанні яких існує такий поліном (16), визначений у комплексному n-вимірному евклідовому просторі $\widetilde{E}_n$ або, що те ж саме, такий вектор $a=$ $=(a_0,a_1,\ldots,a_n)$, що буде справедливою інтерполяційна система рівнянь

$$\begin{gathered}P_1(u_0)=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+\ldots+a_n\cdot 0=a_0=0,\\ P_1(u_j)=a_0+a_1\alpha_{j1}+a_2\alpha_{j2}+\ldots+a_n\alpha_{jn}=y_j+\varepsilon_j s_j,\quad j=\overline{1,m},\end{gathered} \tag{29}$$

на інтерполяційних вузлах $u_0=\|\alpha_{0i}=0\|_{i=\overline{1,n}},\ u_j=(\alpha_{j1},\alpha_{2j},\ldots,\alpha_{jn}),\ j=\overline{1,m}$.

Згідно з теоремою 5, сформулюємо матриці $\Gamma,\ \Gamma^+$ і запишемо необхідні та достатні умови розв'язності системи (29):

$$(E-\Gamma^+\Gamma)\|y_i+\varepsilon_i s_i\|_{i=\overline{0,m}}=0,\qquad y_0=0,\quad s_0=0. \tag{30}$$

Систему (30) можна розглядати, як лінійну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $s_i,\ i=\overline{1,m}$. Умови розв'язності системи (30) з додатковими умовами

$$|s_i|\le 1,\quad i=\overline{0,m}, \tag{31}$$

дадуть умови розв'язності задачі С. М. Чернікова.

Система (30) має вигляд

$$(E-\Gamma^+\Gamma)\|\overline{s}_i\|_{i=\overline{0,m}}=(E-\Gamma^+\Gamma)\big\|-y_i\big\|_{i=\overline{0,m}}, \tag{32}$$

де $\overline{s}_i=\varepsilon_i s_i,\ i=\overline{0,m}$. Запишемо її загальний розв'язок

$$\begin{gathered}\|\overline{s}_i\|_{i=\overline{0,m}}=(E-\Gamma^+\Gamma)^+(E-\Gamma^+\Gamma)\big\|-y_i\big\|_{i=\overline{0,m}}+\\ +\big(E-(E-\Gamma^+\Gamma)^+(E-\Gamma^+\Gamma)\big)\|w_i\|_{i=\overline{0,m}}\end{gathered} \tag{33}$$

і будемо шукати такий вектор $\|w_i\|_{i=\overline{0,m}}$, щоб виконувались умови (31). Якщо він існує, то задача С. М. Чернікова (27) має розв'язок (33), у протилежному випадку — не має.

***Приклад* 5.** Розглянемо таку задачу: знайти комплексні числа $z_j,\ j = 1, 2, 3, 4$, які задовольняють систему нерівностей в позначеннях С. М. Чернікова [2]

$$\left|\sum_{j=1}^{4} \alpha_{kj} z_j + a_k\right| \leq \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{34}$$

Ця система визначається матрицею A і вектором $a = (a_1, a_2, a_3)$

$$A = \|\alpha_{kj}\|_{\substack{k=1,2,3\\ j=1,2,3,4}} = \begin{Vmatrix} 2i & -3+i & 4 & -2+2i \\ -4+i & 2-2i & -1+2i & 3-2i \\ -1+2i & -1-2i & 1+2i & -1-2i \end{Vmatrix}, \qquad a = \frac{1}{4}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Застосовуючи скелетний розклад матриці A, будуємо для неї псевдообернену

$$A^+ = \frac{1}{1183}\begin{Vmatrix} -137-37i & -134-99i & -12-36i \\ -60-50i & 36-7i & -11+26i \\ 143-31i & 60+5i & 15-21i \\ 23-131i & 132-9i & -7+31i \end{Vmatrix}.$$

Згідно з попереднім переформулюємо цю задачу таким чином. Визначити, чи існують такі комплексні числа $s_k,\ k = 1, 2, 3$, з якими система рівнянь з обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_{kj} z_j + a_k = s_k, \qquad |s_k| \leq \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{35}$$

буде мати розв'язок. Запишемо умови розв'язності (3) цієї системи

$$(E - AA^+)(-a+s) = \frac{1}{13}\begin{Vmatrix} 1 & -1+i & -1+3i \\ -1+i & 2 & -2-4i \\ -1-3i & -2+4i & 10 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} -1/4 + \overline{s}_1 + i\overline{l}_1 \\ -1/4 + \overline{s}_2 + i\overline{l}_2 \\ -1/4 + \overline{s}_3 + i\overline{l}_3 \end{Vmatrix} = 0,$$

де $s = \|s_k\|_{k=1,2,3},\ s_k = \overline{s}_k + i\overline{l}_k,\ k = 1, 2, 3$. Розв'язок останньої системи буде мати вигляд

$$\overline{s}_1 = -\frac{3}{4} - 2\overline{l}_2 + 4\overline{s}_3 + 2\overline{l}_3 + \overline{l}_1,$$

$$\overline{s}_2 = \overline{l}_1 - \overline{l}_2 - \frac{1}{2} - \overline{l}_3 + 3\overline{s}_3.$$

Тут величини $\overline{s}_3$, $\overline{l}_3$, $\overline{l}_1$, $\overline{l}_2$ є довільними, але такими, що $s_k = \overline{s}_k + i\overline{l}_k$, $k = 1, 2, 3$, задовольняють нерівності у (35). Наведемо одну з можливих множин розв'язків із усієї множини. Покладемо

$$\overline{s}_3 = \overline{l}_3 = \overline{l}_1 = \frac{1}{16}. \tag{36}$$

Тоді з нерівностей у (35) випливає, що повинні виконуватись нерівності

$$(\bar{s}_1)^2 \leq \frac{63}{256}, \qquad \frac{-\sqrt{63}-5}{32} \leq \bar{l}_2 \leq \frac{\sqrt{63}-5}{32}. \tag{37}$$

При виконанні умов (36), (37) множиною розв'язків системи (35) буде (див., наприклад, [3])

$$\begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{Vmatrix} = A^+(-a+s) + (E - A^+A)w \quad \forall w \in C^3. \tag{38}$$

Кожен вектор із множини (38) буде розв'язком задачі (34).

4. Висновки. В роботі показано, що необхідні та достатні умови існування лінійного інтерполяційного полінома з [7] еквівалентні необхідним та достатнім умовам сумісностей систем лінійних алгебраїчних рівнянь (теорема Кронекера – Капеллі [1]) та нерівностей (теорема С. М. Чернікова [2]). При цьому лінійний інтерполянт [7] визначено в комплексному n-вимірному евклідовому просторі. Крім того, згідно з теоремою 4 [7], надано поліноміальне наближення (інтерполяцію) функції багатьох змінних.

Література

1. А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Физматлит, Москва (1963).
2. С. Н. Черников, *Обобщение теоремы Кронекера – Капелли о системе линейных уравнений*, Мат. сб., **15(57)**, № 3, 437 – 448 (1944).
3. А. Алберт, *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание*, Наука, Москва (1977).
4. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Физматлит, Москва (2010).
5. Е. Л. Жуковский, Р. Ш. Липцер, *О вычислении псевдообратных матриц*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **15**, № 2, 489 – 492 (1975).
6. P. Courrieu, *Fast computation of Moore – Penrose inverse matrices*, Neural Inform. Processing, **8**, № 2, 25 – 29 (2005).
7. В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, *Основы теории полиномиального операторного интерполирования*, Ин-т математики НАН Украины, Киев (1998).
8. А. Д. Егоров, П. И. Соболевский, Л. А. Янович, *Приближенные методы вычисления континуальных интегралов*, Наука и техника, Минск (1985).
9. О. Ф. Кашпур, В. В. Хлобистов, *До деяких питань поліноміальної інтерполяції в евклідових просторах*, Доп. НАН України, № 10, 10 – 14 (2016).

Одержано 02.07.20