DOI: 10.37863/umzh.v73i2.6210

УДК 519.27

О. Іксанов, Б. Рашитов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ФУНКЦІОНАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА БЕЗ ЦЕНТРУВАННЯ ДЛЯ ЗАГАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ ДРОБОВОГО ЕФЕКТУ

We define a general shot noise process as the convolution of a deterministic càdlàg function and a locally finite counting process concentrated on the nonnegative halfline. In this paper, we provide the sufficient conditions ensuring that a general shot noise process properly normalized without centering converges weakly in the Skorokhod space. We give several examples of particular counting processes satisfying the sufficient conditions and formulate the corresponding limit theorems. The present work continues the investigation initiated in [Iksanov and Rashytov (2020)], where a functional limit theorem with centering was proved under the condition that the limit process is a Riemann – Liouville-type (Gaussian) process.

Загальним процесом дробового ефекту ми називаємо згортку детермінованої функції, що належить простору Скорохода, та локально скінченного лічильного процесу, заданого на невід'ємній півосі. В цій статті запропоновано достатні умови, за яких належним чином нормалізований (без центрування) загальний процес дробового ефекту слабко збігається у просторі Скорохода. Наведено кілька прикладів конкретних лічильних процесів, що задовольняють ці достатні умови, разом із відповідними граничними теоремами. Продовжено дослідження, розпочаті в статті О. Іксанова та Б. Рашитова (2020 р.), де було доведено функціональну граничну теорему з центруванням із (гауссівськими) процесами типу Рімана – Ліувілля в якості граничних процесів.

1. Вступ та основний результат. Позначимо через $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, де $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$, необов'язково монотонну послідовність невід'ємних випадкових величин. Визначимо лічильний процес $N := := (N(t))_{t\geq 0}$ так:

$$N(t) := \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}, \quad t\geq 0.$$

Будемо припускати, що $N(t)<\infty$ майже напевно (м.н.) для всіх $t\geq 0$.

Нехай $D := D[0,\infty)$ $(D(0,\infty))$ — простір Скорохода дійснозначних неперервних справа функцій, що визначені на $[0,\infty)$ $((0,\infty))$ і мають скінченні лівобічні границі у додатних точках. Для функції $h\in D$ визначимо випадковий процес $X := (X(t))_{t\geq 0}$ так:

$$X(t) := \sum_{k\geq 0} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} = \int\limits_{[0,\,t]} h(t-y)dN(y), \quad t\geq 0.$$

Ми називаємо X *загальним процесом дробового ефекту*, оскільки, крім $N(t)<\infty$ м.н., жодних припущень щодо вхідної послідовності $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ не робимо. Зрозуміло, що $X\in D$ м.н.

У статті [8] знайдено достатні умови, за яких належним чином нормалізований і центрований загальний процес дробового ефекту слабко збігається у просторі Скорохода до гауссівського процесу типу Рімана – Ліувілля. Ми відсилаємо читача до згаданої роботи, а також до статті [3] за мотивацією дослідження загальних процесів дробового ефекту, їхнім зв'язком із (більш складними) випадковими процесами з імміграцією у випадкові моменти часу, а також детальним оглядом відповідної бібліографії. Зазначимо, що зацікавленість математиків у процесах дробового ефекту не вщухає, що підтверджується нещодавніми роботами [12, 15, 17].

Метою даної статті є знаходження достатніх умов, сформульованих у термінах функції відгуку h та лічильного процесу N, за яких належним чином нормалізований (без центрування) загальний процес дробового ефекту задовольняє функціональну граничну теорему у просторі Скорохода. В якості ілюстрації ми вказуємо конкретні лічильні процеси, для яких виконуються вищезгадані достатні умови.

Для формулювання основного результату потрібні додаткові позначення. Для $\lambda > 0$ позначимо через $V_\lambda := (V_\lambda(u))_{u\geq 0}$ випадковий процес, що м.н. не спадає, є м.н. локально неперервним за Гьольдером з показником λ і задовольняє $V_\lambda(0) = 0$ м.н. Зокрема, для довільного $T > 0$, всіх $0 \leq x, y \leq T$ і деякої м.н. скінченної додатної випадкової величини M_T

$$\big|V_\lambda(x) - V_\lambda(y)\big| \leq M_T|x-y|^{\lambda\wedge 1}. \tag{1}$$

Для $\gamma > -\lambda$ визначимо випадковий процес $Z_{\lambda,\gamma} := (Z_{\lambda,\gamma}(u))_{u\geq 0}$ так:

$$Z_{\lambda,\gamma}(u) := \int\limits_{[0,\,u]} (u-y)^\gamma dV_\lambda(y), \quad u \geq 0, \tag{2}$$

де інтеграл існує як потраєкторний інтеграл Лебега – Стільтьєса. Еквівалентно для $\gamma > -\lambda$, $\gamma \neq 0$, процес $Z_{\lambda,\gamma}$ задається за допомогою інтеграла Лебега. Дійсно, інтегруючи частинами, для $\gamma > 0$ маємо

$$Z_{\lambda,\gamma}(u) := \gamma \int\limits_0^u (u-y)^{\gamma-1} V_\lambda(y)dy, \quad u > 0, \qquad Z_{\lambda,\gamma}(0) := 0, \tag{3}$$

а для $-\lambda < \gamma < 0$ –

$$Z_{\lambda,\gamma}(u) := u^\gamma V_\lambda(u) + |\gamma| \int\limits_0^u (V_\lambda(u) - V_\lambda(u-y))y^{\gamma-1}dy, \quad u > 0, \qquad Z_{\lambda,\gamma}(0) := \lim_{u\to+0} Z_{\lambda,\gamma}(u). \tag{4}$$

Використовуючи (1), робимо висновок, що $Z_{\lambda,\gamma}(0) = 0$ м.н. для $\gamma \in (-\lambda, 0)$. У випадку $\gamma \geq 0$ збіжність інтеграла у (2), а також м.н. неперервність процесів $Z_{\lambda,\gamma}$ є тривіальними. У випадку $\gamma \in (-\lambda, 0)$ ці два факти випливають з леми 2.1 роботи [8].

Далі будемо вважати, що простори D і $D(0,\infty)$ наділені J_1-топологією, та позначатимемо слабку збіжність у цих просторах через $\overset{J_1}{\Longrightarrow}$. Детальна інформація щодо J_1-топології міститься у монографіях [1, 9]. Також будемо використовувати позначення $\mathbb{R}^+ := [0,\infty)$.

Теорема 1. *Нехай $\alpha, \lambda > 0$, а невід'ємна функція $h \in D$ є монотонною та правильно змінюється на ∞ з показником $\beta > -\min(\alpha, \lambda)$. Припустимо, що*

$$a(t)N(t\cdot) \overset{J_1}{\Longrightarrow} V_\lambda(\cdot), \quad t \to \infty, \tag{5}$$

у просторі D, *де функція* $a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *не зростає і правильно змінюється на нескінченності з показником* $-\alpha$, *а також для довільних* $q>0$ *і довільних* $0<a<b<\infty$

$$t^{-q}\sup_{u\in[a,\,b]}(N(ut)-N(ut-1))\ \overset{\mathbb{P}}{\to}\ 0,\quad t\to\infty. \tag{6}$$

Якщо h *не спадає, то*

$$\frac{a(t)}{h(t)}X(t\cdot)\ \overset{J_1}{\Longrightarrow}\ Z_{\lambda,\beta}(\cdot),\quad t\to\infty, \tag{7}$$

у просторі D.

Якщо h *не зростає, то припустимо додатково, що для всіх* $x>0$, $t\geq 1$ *і* $k\in\mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}\big\{a(t)(N((k+1)t)-N(kt))>x\big\}\leq f(x) \tag{8}$$

для невід'ємної функції f, *що не зростає та задовольняє*

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{j\geq 1}2^j f(x2^{jc})=0$$

для довільних $c>0$. *Тоді граничне співвідношення* (7) *виконується у просторі* $D(0,\infty)$.

***Зауваження* 1.** Оскільки для кожного $t>0$ випадкова функція $u\mapsto N(tu)$ не спадає м.н., а процес V_λ є м.н. неперервним, то згідно із зауваженням 2.1 [16] функціональна збіжність (5) еквівалентна слабкій збіжності скінченновимірних розподілів.

Теорему 1 доведено у пункті 2. Пункт 3 присвячено перевірці достатніх умов теореми 1 для конкретних вхідних послідовностей $(S_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$. Допоміжні твердження технічного характеру наведено у пункті 4.

2. Доведення теореми 1. Розпочнемо з допоміжного твердження. Для $t,T>0$ введемо позначення

$$A_t:=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ \ 0\leq v<u\leq T,\ \ u-v\geq 1/t\big\}.$$

Лема 1. *Нехай функція* a *задовольняє припущення теореми* 1 *і виконується умова* (8). *Тоді для довільного* $\delta\in(0,\alpha)$

$$\lim_{x\to\infty}\limsup_{t\to\infty}\mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(N(ut)-N(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}}>x\right\}=0.$$

Доведення. Оскільки функція a правильно змінюється за припущенням, лему достатньо довести лише для випадку $T=1$. Використовуючи те, що N не спадає м.н., записуємо

$$\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(N(ut)-N(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}}\leq\sup_{1/t\leq h\leq 1}\sup_{0\leq u\leq 1}\frac{a(t)(N(ut)-N((u-h)t))}{h^{\alpha-\delta}}\leq$$

$$\leq\sup_{j=1,\ldots,\lceil\log_2 t\rceil}\ \sup_{2^{-j}\leq h\leq 2^{-j+1}}\ \sup_{0\leq u\leq 1}\frac{a(t)(N(ut)-N((u-h)t))}{h^{\alpha-\delta}}\leq$$

$$\le \sup_{j=1,\ldots,\lceil \log_2 t\rceil} \sup_{2^{-j}\le h\le 2^{-j+1}} \sup_{k=1,\ldots,2^{j-1}} \sup_{(k-1)2^{-j+1}\le u\le k2^{-j+1}} \frac{a(t)(N(ut)-N((u-h)t))}{h^{\alpha-\delta}} \le$$

$$\le \sup_{j=1,\ldots,\lceil \log_2 t\rceil} \sup_{k=1,\ldots,2^{j-1}} \frac{a(t)(N(tk2^{-j+1})-N(t(k-2)2^{-j+1}))}{2^{-j(\alpha-\delta)}}.$$

Тут $\lceil x\rceil$ позначає найменше ціле, що є не меншим за $x\in\mathbb{R}$. За нерівністю Буля

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in A_t} \frac{a(t)(N(ut)-N(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}} > x\right\} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\lceil \log_2 t\rceil} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \mathbb{P}\bigg\{\frac{a(t)(N(tk2^{-j+1})-N(t(k-2)2^{-j+1}))}{2^{-j(\alpha-\delta)}} > x\bigg\}.$$

З урахуванням умови (8)

$$\mathbb{P}\left\{\frac{a(t)(N(tk2^{-j+1})-N(t(k-2)2^{-j+1}))}{2^{-j(\alpha-\delta)}} > x\right\} \le$$

$$\le \mathbb{P}\bigg\{a(t2^{-j+1})(N(tk2^{-j+1})-N(t(k-1)2^{-j+1})) > \frac{a(t2^{-j+1})}{a(t)}2^{-j(\alpha-\delta)-1}x\bigg\}+$$

$$+\mathbb{P}\left\{a(t2^{-j+1})(N(t(k-1)2^{-j+1})-N(t(k-2)2^{-j+1})) > \frac{a(t2^{-j+1})}{a(t)}2^{-j(\alpha-\delta)-1}x\right\} \le$$

$$\le 2f\left(\frac{a(t2^{-j+1})}{a(t)}2^{-j(\alpha-\delta)-1}x)\right).$$

Згідно з лемою А.5 [6]

$$a(t2^{-j+1})/a(t) \ge c2^{(j-1)(\alpha-\delta/2)}$$

для деякого $c>0$, всіх $t>0$ і всіх $j=1,\ldots,\lceil \log_2 t\rceil$. Тому

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in A_t} \frac{a(t)(N(ut)-N(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}} > x\right\} \le \sum_{j=1}^{[\log_2 t]+1} 2^j f\big(Cx2^{j\delta/2}\big) \le \sum_{j\ge 1} 2^j f\big(Cx2^{j\delta/2}\big) \to 0$$

при $x\to\infty$, де $C := c2^{\delta/2-\alpha-1}$.

Лему 1 доведено.

Доведення теореми **1.** 1. Випадок, коли h не спадає, в якому необхідно $\beta\ge 0$. Випадковий процес X не спадає м.н., а випадковий процес $Z_{\alpha,\beta}$ є неперервним м.н. У випадку $\beta=0$ останнє має місце за припущенням, оскільки $Z_{\alpha,0}=V_\lambda$, а у випадку $\beta>0$ неперервність випливає з леми А.8 (b) [5]. Тому згідно із зауваженням 2.1 [16], що вже згадувалося, для доведення функціональної збіжності у D достатньо встановити слабку збіжність скінченновимірних розподілів.

Далі вважаємо, що $h(t)=0$ для $t<0$. Для кожного $t>0$ покладемо

$$V^{(t)}(u) := a(t)N(tu), \qquad h_t(u) := h(tu)/h(t), \quad u\ge 0.$$

Використовуючи інтегрування частинами, для $t > 0,\ u \geq 0$ записуємо

$$\frac{a(t)}{h(t)}X(ut) = \frac{a(t)}{h(t)} \int\limits_{[0,\,u]} h(t(u-y))d_y N(ty) =$$

$$= a(t)N(0)\frac{h(tu) - h((tu)-)}{h(t)} + \int\limits_{(0,\,u]} V^{(t)}(y)d_y(-h_t(u-y)).$$

Для кожного $t > 0$ випадковий процес $X_t^* := (X_t^*(u))_{u \geq 0}$, визначений рівністю

$$X_t^*(u) := \int\limits_{(0,\,u]} V^{(t)}(y)d_y(-h_t(u-y)), \quad u \geq 0,$$

має траєкторії, що не спадають м.н. Зауважимо, що для $u > 0$

$$a(t)N(0)\frac{h(tu) - h((tu)-)}{h(t)} \leq a(t)N(0)\frac{h(tu)}{h(t)} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t \to \infty,$$

оскільки h правильно змінюється на ∞. При $u = 0$ останнє граничне співвідношення забезпечується припущенням $\beta > -\alpha$, що гарантує $\lim_{t\to\infty} a(t)/h(t) = 0$. Отже, достатньо довести граничну теорему для X_t^* (замість X).

Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $X_t^*(0) = Z_{\alpha,\,\beta}(0) = 0$ м.н., достатньо довести, що для довільних $0 < u_1 < \ldots < u_n < \infty$ і довільних $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$

$$\alpha_1 X_t^*(u_1) + \ldots + \alpha_n X_t^*(u_n) \overset{d}{\to} \alpha_1 Z_{\alpha,\,\beta}(u_1) + \ldots + \alpha_n Z_{\alpha,\,\beta}(u_n), \quad t \to \infty,$$

де $\overset{d}{\to}$ позначає збіжність за розподілом. Для $w > 0$ і $t > 0$ визначимо міри $\nu_{t,w}$ і ν_w на $[0, w]$ так:

$$\nu_{t,w}(c,d] := \frac{h(t(w-c)) - h(t(w-d))}{h(t)}, \quad 0 \leq c < d \leq w,$$

$$\nu_w(c,d] := (w-c)^\beta - (w-d)^\beta, \quad 0 \leq c < d \leq w.$$

При цьому

$$\alpha_1 X_t^*(u_1) + \ldots + \alpha_n X_t^*(u_n) = \alpha_1 \int\limits_{(0,\,u_1]} V^{(t)}(y)\nu_{t,u_1}(dy) + \ldots + \alpha_n \int\limits_{(0,\,u_n]} V^{(t)}(y)\nu_{t,u_n}(dy).$$

Припустимо, що $\beta > 0$. Використовуючи (5) разом з теоремою Скорохода, що гарантує існування версій, збіжних у D м.н., а також те, що $\nu_{t,w} \overset{d}{\to} \nu_w$ при $t \to \infty$, отримуємо

$$\alpha_1 X_t^*(u_1) + \ldots + \alpha_n X_t^*(u_n) \overset{d}{\to} \alpha_1 \int\limits_{(0,\,u_1]} V_\lambda(y)\nu_{u_1}(dy) + \ldots + \alpha_n \int\limits_{(0,\,u_n]} V_\lambda(y)\nu_{u_n}(dy) =$$

$$= \alpha_1 Z_{\alpha,\beta}(u_1) + \ldots + \alpha_n Z_{\alpha,\beta}(u_n)$$

за допомогою першої частини леми 5. У випадку $\beta = 0$ $\nu_{t,w} \xrightarrow{d} \delta_w$ при $t \to \infty$, де δ_w позначає розподіл, вироджений у точці w. Міркування, аналогічні до попередніх, а також залучення другої частини леми 5 дозволяють стверджувати, що

$$\alpha_1 X_t^*(u_1) + \ldots + \alpha_n X_t^*(u_n) \xrightarrow{d} \alpha_1 V_\lambda(u_1) + \ldots + \alpha_n V_\lambda(u_n) =$$
$$= \alpha_1 Z_{\alpha,0}(u_1) + \ldots + \alpha_n Z_{\alpha,0}(u_n).$$

2. Випадок, коли h не зростає, в якому необхідно $\beta \leq 0$. Для $\varepsilon \in (0,1)$ покладемо

$$I_\varepsilon(u,t) := \frac{a(t)}{h(t)} \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k) \mathbb{1}_{\{S_k \leq \varepsilon ut\}}, \qquad u \geq 0, \quad t > 0,$$

$$I_\varepsilon^*(u) := \int\limits_{[0,\,\varepsilon u]} (u-y)^\beta dV_\lambda(y), \quad u \geq 0,$$

і запишемо

$$I_\varepsilon(u,t) = a(t) \sum_{k\geq 0} \left(\frac{h(ut - S_k)}{h(t)} - (u - t^{-1}S_k)^\beta) \right) \mathbb{1}_{\{S_k \leq \varepsilon ut\}} +$$
$$+ a(t) \sum_{k\geq 0} (u - t^{-1}S_k)^\beta \mathbb{1}_{\{S_k \leq \varepsilon ut\}} =: I_{\varepsilon,1}(u,t) + I_{\varepsilon,2}(u,t).$$

Покажемо, що

$$I_{\varepsilon,1}(\cdot,t) \overset{J_1}{\Longrightarrow} \Psi(\cdot), \quad t \to \infty, \tag{9}$$

де $\Psi(s) = 0$ при $s \geq 0$, і

$$I_{\varepsilon,2}(\cdot,t) \overset{J_1}{\Longrightarrow} I_\varepsilon^*(\cdot), \quad t \to \infty, \tag{10}$$

а отже,

$$I_\varepsilon(\cdot,t) = I_{\varepsilon,1}(\cdot,t) + I_{\varepsilon,2}(\cdot,t) \overset{J_1}{\Longrightarrow} I_\varepsilon^*(\cdot), \quad t \to \infty.$$

Для додатних і скінченних чисел $a < b$, $t > 0$

$$\sup_{a\leq u\leq b} |I_{\varepsilon,1}(u,t)| \leq \sup_{(1-\varepsilon)a \leq y \leq b} \left| \frac{h(ty)}{h(t)} - y^\beta \right| a(t) N(\varepsilon bt) \quad \text{м.н.}$$

Формула (5) гарантує виконання співвідношення $a(t)N(\varepsilon bt) \xrightarrow{d} V_\lambda(\varepsilon b)$ при $t \to \infty$. Отже, згідно з теоремою про рівномірну збіжність для функцій, що правильно змінюються (теорема 1.5.2 [2]), права частина останньої центрованої нерівності збігається до 0 за ймовірністю при $t \to \to \infty$, що доводить (9). Співвідношення (10) випливає з леми А.2 [6], що є детермінованим результатом. Щоб ним скористатися, достатньо стандартних міркувань: слабка збіжність (5) та факт, що граничний процес у (5) є м.н. неперервним, гарантують, згідно з теоремою Скорохода, існування версій процесів у (5), що збігаються локально рівномірно з імовірністю 1.

Тепер покажемо, що для будь-якого фіксованого $u \geq 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 1-} I_\varepsilon^*(u) = Z_{\alpha,\,\beta}(u) \quad \text{м.н.} \tag{11}$$

Дійсно,

$$0 \leq \int\limits_{[0,\,u]} (u-y)^\beta dV_\lambda(y) - \int\limits_{[0,\,\varepsilon u]} (u-y)^\beta dV_\lambda(y) = \int\limits_{(\varepsilon u,\,u]} (u-y)^\beta dV_\lambda(y).$$

Враховуючи м.н. скінченність $Z_{\alpha,\beta}(u)$ для всіх $u \geq 0$, переконуємося, що права частина збігається до 0 м.н. при $\varepsilon \to 1-$ за теоремою Лебега про мажоровану збіжність. Отже, (11) виконується.

Згідно з теоремою 3.2 [1], враховуючи (11), для отримання (7) достатньо довести, що для довільних $\theta > 0$ і довільних $0 < a < b < \infty$

$$\lim_{\varepsilon \to 1-} \limsup_{t \to \infty} \mathbb{P}\left\{ \sup_{u \in [a,\,b]} \left(\frac{a(t)}{h(t)} X(ut) - I_\varepsilon(u,t) \right) > \theta \right\} = 0,$$

або у розгорнутому вигляді

$$\lim_{\varepsilon \to 1-} \limsup_{t \to \infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{a(t)}{h(t)} \sup_{u \in [a,\,b]} \sum_{k \geq 0} h(ut - S_k) \mathbb{1}_{\{\varepsilon ut < S_k \leq ut\}} > \theta \right\} = 0.$$

Зафіксуємо $\Delta \in (0, (\alpha+\beta)/2)$. За нерівністю Поттера для функцій, що правильно змінюються на ∞ (теорема 1.5.6 [2]), існує таке $c > 1$, що

$$\frac{h(t(u-y))}{h(t)} \leq 2(u-y)^{\beta-\Delta}$$

для всіх додатних t, u, y, що задовольняють $t(u-y) \geq c$ й $u - y \leq 1$. Тому для достатньо великих $t, u \in [a,b]$, $\varepsilon > 0$, що задовольняють нерівність $(1-\varepsilon)b \leq 1$,

$$\frac{a(t)}{h(t)} \sum_{k \geq 0} h(ut - S_k) \mathbb{1}_{\{\varepsilon ut < S_k \leq ut\}} =$$

$$= \frac{a(t)}{h(t)} \int\limits_{(\varepsilon u,\, u-c/t]} h(t(u-y)) d_y N(ty) + \frac{a(t)}{h(t)} \int\limits_{(u-c/t,\, u]} h(t(u-y)) d_y N(ty) \leq$$

$$\leq 2a(t) \int\limits_{(\varepsilon u,\, u-c/t]} (u-y)^{\beta-\Delta} d_y N(ty) + \frac{a(t)}{h(t)} h(0)(N(tu) - N(tu-c)) =$$

$$= 2(-\beta+\Delta) \int\limits_{\varepsilon u}^{u-c/t} a(t)(N(tu) - N(ty))(u-y)^{\beta-\Delta-1} dy +$$

$$+ 2u^{\beta-\Delta}(1-\varepsilon)^{\beta-\Delta} a(t)(N(tu) - N(\varepsilon tu)) +$$

$$+\left(\frac{a(t)}{h(t)}h(0) - 2c^{\beta-\Delta}t^{-\beta+\Delta}a(t)\right)\right)(N(tu) - N(tu-c)) =:$$

$$=: I_1(u,t) + I_2(u,t) + I_3(u,t).$$

Маємо

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{2(1-\varepsilon)^{\beta-\Delta} \sup_{u\in[a,\,b]} u^{\beta-\Delta}a(t)(N(tu) - N(\varepsilon tu)) > \theta\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{2(1-\varepsilon)^{\beta-\Delta} \sup_{u\in[a,\,b]} u^{\beta-\Delta}(V_\lambda(u) - V_\lambda(\varepsilon u)) > \theta\right\} \le$$

$$\le \mathbb{P}\big\{2(1-\varepsilon)^{\alpha+\beta-\Delta} b^{\alpha+\beta-\Delta} M_b > \theta\big\},$$

де рівність є наслідком (5) і теореми про неперервне відображення з урахуванням того, що супремум функціонал є неперервним у J_1-топології, а нерівність випливає з (1). Хоча важко уявити, що розподіл $\sup_{u\in[a,\,b]} u^{\beta-\Delta}(V_\lambda(u) - V_\lambda(\varepsilon u))$ може мати дискретну компоненту. Зазначимо, що якщо це так, то останні центровані формули виконуються для θ, що є точками неперервності розподілу $\sup_{u\in[a,\,b]} u^{\beta-\Delta}(V_\lambda(u) - V_\lambda(\varepsilon u))$, і, як наслідок, для всіх $\theta > 0$. Нарешті, оскільки $\alpha + \beta - \Delta > 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 1-} \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{\sup_{u\in[a,\,b]} I_2(u,t) > \theta\right\} = 0.$$

Далі внаслідок (6) і того, що функції $t \mapsto a(t)/h(t)$ і $t \mapsto t^{-\beta+\Delta}a(t)$ правильно змінюються на ∞ з від'ємними показниками $-\alpha-\beta$ й $-\alpha-\beta+\Delta$ відповідно, маємо

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{\sup_{u\in[a,\,b]} I_3(u,t) > \theta\right\} = 0.$$

Для завершення доведення достатньо встановити, що для довільних $\theta > 0$ і довільних $T > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 1-} \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{\sup_{u\in[0,\,T]} \int\limits_{\varepsilon u}^{u-c/t} a(t)(N(tu) - N(ty))(u-y)^{\beta-\Delta-1}dy > \theta\right\} = 0. \qquad (12)$$

Для $0 < \delta < \alpha + \beta - \Delta$ й $x > 0$, використовуючи позначення A_t, введене у лемі 1, записуємо

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{u\in[0,T]} \int\limits_{\varepsilon u}^{u-c/t} a(t)(N(tu) - N(ty))(u-y)^{\beta-\Delta-1}dy > \theta\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\bigg\{\ldots, \sup_{(u,v)\in A_t} \frac{a(t)(N(ut) - N(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}} > x\bigg\} +$$

$$+ \mathbb{P}\bigg\{\ldots, \sup_{(u,v)\in A_t} \frac{a(t)(N(ut) - N(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}} \le x\bigg\} \le$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in A_t} \frac{a(t)(N(ut)-N(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}} > x\right\} +$$

$$+\mathbb{P}\left\{\sup_{u\in[0,\,T]} \int\limits_{\varepsilon u}^{u} (u-y)^{\alpha+\beta-\Delta-\delta-1}dy > \theta/x\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in A_t} \frac{a(t)(N(ut)-N(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}} > x\right\} + \mathbb{P}\left\{\int\limits_{0}^{(1-\varepsilon)T} y^{\alpha+\beta-\Delta-\delta-1}dy > \theta/x\right\}.$$

При $\varepsilon \to 1-$ другий доданок прямує до 0. Тому з урахуванням леми 1 і того, що ліва частина не залежить від x, співвідношення (12) виконується.

Теорему 1 доведено.

3. Приклади застосування теореми 1. У цьому пункті ми наведемо приклади конкретних вхідних послідовностей $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, які задовольняють достатні умови теореми 1, а також вкажемо відповідні граничні теореми.

1. Стандартне випадкове блукання. Нехай $\xi_1,\, \xi_2, \ldots$ — незалежні копії додатної випадкової величини ξ. Випадкова послідовність $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що задається так: $S_0 := 0$ і $S_k := \xi_1 + \ldots + \xi_k$ для $k \in \mathbb{N}$, називається (*затриманим у нулі*) *стандартним випадковим блуканням*.

Позначимо через $N = (N(t))_{t\geq 0}$ лічильний процес для стандартного випадкового блукання. Згідно з лемою А.1 [5] так визначений процес задовольняє співвідношення (6). Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim t^{-\alpha}\ell(t)$ при $t \to \infty$ для деякого $\alpha \in (0,1)$ і функції ℓ, що повільно змінюється на нескінченності. З огляду на теорему 3.2 [10] (де встановлено слабку збіжність скінченновимірних розподілів) та зауваження 2.1 [16] робимо висновок, що

$$\mathbb{P}\{\xi > t\}N(t\cdot) \overset{J_1}{\Longrightarrow} W_\alpha(\cdot), \quad t \to \infty,$$

де $W_\alpha := (W_\alpha(u))_{u\geq 0}$ — обернений α-стійкий субординатор. Це означає, що

$$W_\alpha(u) := \inf\bigl\{s \geq 0 : D_\alpha(s) > u\bigr\}, \quad u \geq 0,$$

де $(D_\alpha(t))_{t\geq 0}$ — α-стійкий субординатор з $-\log \mathbb{E}e^{-sD_\alpha(1)} = \Gamma(1-\alpha)s^\alpha$, $s \geq 0$, а $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція. Згідно з лемою 3.4 [11] процес W_α є м.н. локально неперервним за Гьольдером з показником меншим за α. Отже, $V_\lambda = W_\alpha$ задовольняє умову (1) з $\lambda < \alpha$. Використовуючи субадитивність за розподілом N і нерівність Маркова, для всіх $x > 0$, $t \geq 1$ і $k \in \mathbb{N}_0$ записуємо

$$\mathbb{P}\bigl\{a(t)(N((k+1)t) - N(kt)) > x\bigr\} \leq \mathbb{P}\bigl\{a(t)N(t) > x\bigr\} \leq$$

$$\leq e^{-x}\mathbb{E}e^{a(t)N(t)} \leq Ce^{-x} =: f(x),$$

де стала $C := \sup_{t\geq 1} \mathbb{E}e^{a(t)N(t)}$ є скінченною за лемою А.4 [6]. Далі для $c > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j f(x2^{jc}) = C \lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j e^{-x2^{jc}} = 0,$$

оскільки останній ряд збігається рівномірно по $x \geq 1$. Отже, умова (8) виконується.

Тому, використовуючи теорему 1 з $a(t) = \mathbb{P}\{\xi > t\}$, $V_\lambda = W_\alpha$ і h, що задовольняє умови теореми, отримуємо

$$\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{h(t)} X(t\cdot) \overset{J_1}{\Longrightarrow} \int\limits_{[0,\,\cdot]} (\cdot - y)^\beta dW_\alpha(y), \quad t \to \infty,$$

у просторі D, якщо h не спадає, й у просторі $D(0,\infty)$, якщо h не зростає. Останнє граничне співвідношення встановлено у теоремі 2.1 [6].

2. Процес відновлення зі зміненим часом. 2.1. Нехай $\alpha \in (0,1]$, а послідовність $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ задається так:

$$S_0 := 0, \qquad S_k := ((\xi_1 + \ldots + \xi_k)/\eta)^{1/\alpha}, \quad k \in \mathbb{N},$$

де η — додатна випадкова величина, що не залежить від невід'ємних незалежних та однаково розподілених випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$. При цьому $N(t) = N^*(t^\alpha \eta)$ для $t \geq 0$, де $(N^*(t))_{t\geq 0}$ — лічильний процес для затриманого в нулі стандартного випадкового блукання зі стрибками ξ_k.

Далі припускаємо, що $\mu := \mathbb{E}\xi_1 < \infty$ і $\mathbb{E}e^{s\eta} < \infty$ для деякого s у правому околі нуля. За посиленим законом великих чисел для процесів відновлення разом з лемою Діні

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in[0,\,T]} \left| t^{-\alpha} N(ut) - \mu^{-1}\eta u^\alpha \right| = 0 \quad \text{м.н.}$$

для всіх $T > 0$. Отже, виконується співвідношення (5) з $a(t) = t^{-\alpha}$ і $V_\alpha(u) = \mu^{-1}\eta u^\alpha$ для $u \geq 0$. Внаслідок субадитивності функції $x \mapsto x^\alpha$ на $[0,\infty)$ випадковий процес V_α є м.н. локально неперервним за Гьольдером з показником α. Зокрема, нерівність (1) виконується з $M_T = \mu^{-1}\eta$. Для довільних $q > 0$, $0 < a < b < \infty$ і великих t записуємо

$$t^{-q} \sup_{u\in[a,\,b]} (N(ut) - N(ut-1)) =$$

$$= t^{-q} \sup_{u\in[a,\,b]} (N^*((ut)^\alpha \eta) - N^*((ut-1)^\alpha \eta)) \leq$$

$$\leq t^{-q} \sup_{u\in[a,\,b]} (N^*((u\eta^{1/\alpha} t)^\alpha) - N^*((u\eta^{1/\alpha} t)^\alpha - \eta)).$$

Згідно з лемою А.1 [5] для довільного $x > 0$

$$t^{-q} \sup_{u\in[a,\,b]} \big(N^*((uxt)^\alpha) - N^*((uxt)^\alpha - x^\alpha)\big) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty.$$

Тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність співвідношення (6) виконується для процесу $(N(t))_{t\geq 0}$, визначеного у цьому пункті.

Використовуючи субадитивність за розподілом N^* та субадитивність $x \mapsto x^\alpha$ на $[0,\infty)$, для всіх $x > 0$, $t \geq 1$ і $k \in \mathbb{N}_0$ записуємо

$$\mathbb{P}\big\{a(t)(N((k+1)t) - N(kt)) > x\big\} =$$

$$= \mathbb{P}\big\{a(t)(N^*(((k+1)t)^\alpha \eta) - N^*((kt)^\alpha \eta)) > x\big\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\big\{a(t)N^*(\eta t^\alpha((k+1)^\alpha - k^\alpha)) > x\big\} \leq \mathbb{P}\big\{a(t)N^*(\eta t^\alpha) > x\big\}.$$

Нехай $\sqrt{x}t^\alpha > 1$. Субадитивність за розподілом N^* гарантує, що для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $y > 0$

$$\mathbb{P}\big\{N^*(n) > y\big\} \leq \mathbb{P}\big\{N_1^*(1) + \ldots + N_n^*(1) > y\big\}, \tag{13}$$

де $N_1^*(1),\ N_2^*(1), \ldots$ — незалежні копії $N^*(1)$. Як наслідок, для довільних $s \in \in (0, -\log \mathbb{P}\{\xi_1 = 0\})$ $(-\log 0$ інтерпретується як $+\infty)$

$$\mathbb{E}e^{sN^*(n)/n} \leq \mathbb{E}e^{s(N_1^*(1)+\ldots+N_n^*(1))/n} = \mathbb{E}e^{sN^*(1)} < \infty,$$

при цьому скінченність забезпечується теоремою 2.1(c) [7]. Для довільного $r > 1$ знайдеться таке число $n \in \mathbb{N}$, що $r \in (n-1, n]$. Оскільки процес N^* не спадає м.н., то

$$N^*(r)/r \leq N^*(n)/(n-1) \leq 2N^*(n)/n \quad \text{м.н.},$$

і, отже, $\mathbb{E}e^{vN^*(r)/r} \leq \mathbb{E}e^{2vN^*(1)} < \infty$ для $v \in (0, -\log \mathbb{P}\{\xi_1 = 0\}/2)$. За нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}\big\{a(t)N^*(\eta t^\alpha) > x\big\} =$$

$$= \mathbb{P}\big\{a(t)N^*(\eta t^\alpha) > x,\ \ \eta > \sqrt{x}\big\} + \mathbb{P}\big\{a(t)N^*(\eta t^\alpha) > x, \eta \leq \sqrt{x}\big\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\big\{\eta > \sqrt{x}\big\} + \mathbb{P}\big\{N^*(\sqrt{x}t^\alpha)/(\sqrt{x}t^\alpha) > \sqrt{x}\big\} \leq$$

$$\leq \mathbb{E}e^{s\eta}e^{-s\sqrt{x}} + \mathbb{E}e^{vN^*(\sqrt{x}t^\alpha)/(\sqrt{x}t^\alpha)}e^{-v\sqrt{x}} \leq$$

$$\leq C_1 e^{-s\sqrt{x}} + C_2 e^{-v\sqrt{x}} =: f_1(x),$$

де $C_1 := \mathbb{E}e^{s\eta} < \infty$, $C_2 := \mathbb{E}e^{2vN^*(1)} < \infty$. Таким чином, для $c > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j f_1(x2^{jc}) = C_1 \lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j e^{-s\sqrt{x}2^{jc/2}} + C_2 \lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j e^{-v\sqrt{x}2^{jc/2}} = 0,$$

оскільки ряди збігаються рівномірно по $x \geq 1$.

Нехай $\sqrt{x}t^\alpha \leq 1$. За нерівністю Маркова при $t \geq 1$

$$\mathbb{P}\big\{a(t)N^*(\eta t^\alpha) > x\big\} \leq \mathbb{P}\big\{\eta > \sqrt{x}\big\} + \mathbb{P}\big\{N^*(\sqrt{x}t^\alpha) > xt^\alpha\big\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\big\{\eta > \sqrt{x}\big\} + \mathbb{P}\big\{N^*(1) > x\big\} \leq C_1 e^{-s\sqrt{x}} + C_3 e^{-vx} =: f_2(x),$$

де $C_3 := \mathbb{E}e^{vN^*(1)} < \infty$. Отже, для $c > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j f_2(x2^{jc}) = 0.$$

Таким чином, ми перевірили, що умова (8) виконується з $f := f_1 + f_2$.

За теоремою 1 з $a(t) = t^{-\alpha}$, $V_\alpha(u) = \mu^{-1}\eta u^\alpha$, $u \geq 0$, і функцією h, що задовольняє умови теореми,

$$\frac{1}{t^\alpha h(t)} X(t\cdot) \overset{J_1}{\Longrightarrow} \mu^{-1}\alpha \mathrm{B}(\alpha, \beta+1)\eta(\cdot)^{\alpha+\beta}, \quad t \to \infty,$$

де $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ — бета-функція, у просторі D, якщо h не спадає, й у просторі $D(0,\infty)$, якщо h не зростає.

2.2. Нехай тепер $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — незалежні копії η, що не залежать від $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Для $\tau \in (0,1]$ покладемо

$$S_0^* = T_0 := 0, \qquad S_n^* := \xi_1 + \ldots + \xi_n, \qquad T_n := \eta_1 + \ldots + \eta_n, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$S_0 := 0, \quad S_n := T_{\lfloor (S_n^*)^{1/\tau} \rfloor}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

При цьому $N(t) = N^*(N_1^\tau(t))$ для $t \in \mathbb{R}$, де $N_1(t) := \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$, $t \in \mathbb{R}$ (зрозуміло, що $N_1(t) = 0$ для $t \leq 0$). Дійсно, використовуючи позначення $\lfloor x \rfloor$ для цілої частини $x \in \mathbb{R}$, маємо

$$\big\{T_{\lfloor (S_n^*)^{1/\tau} \rfloor} \leq t\big\} = \big\{N_1(t) + 1 > \lfloor (S_n^*)^{1/\tau} \rfloor\big\} = \big\{N_1(t) \geq (S_n^*)^{1/\tau}\big\} = \{S_n^* \leq N_1^\tau(t)\},$$

і, отже, $N(t) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_n^* \leq N_1^\tau(t)\}} = N^*(N_1^\tau(t))$. Зазначимо, що за умови, що ξ_1 має показниковий розподіл, так визначений процес $(N(t))_{t\geq 0}$ є окремим прикладом процесу Кокса (інша назва — двічі стохастичний процес Пуассона).

Припустимо, як і раніше, що $\mu = \mathbb{E}\xi_1 \in (0,\infty)$, а також, що $\mathbb{P}\{\eta_1 > t\} \sim t^{-\rho}\ell(t)$ при $t \to \infty$ для $\rho \in (0,1)$ і ℓ, що повільно змінюється на нескінченності. Тоді

$$\big(\mathbb{P}\{\eta_1 > t\}\big)^\tau N_1^\tau(t\cdot) \overset{J_1}{\Longrightarrow} W_\rho^\tau(\cdot), \quad t \to \infty,$$

де W_ρ — обернений ρ-стійкий субординатор (див. пункт, присвячений стандартним випадковим блуканням). Використовуючи посилений закон великих чисел для N^* та лему 4, отримуємо

$$\big(\mathbb{P}\{\eta_1 > t\}\big)^\tau N^*(N_1^\tau(t\cdot)) \overset{J_1}{\Longrightarrow} \mu^{-1} W_\rho^\tau(\cdot), \quad t \to \infty.$$

Таким чином, співвідношення (5) виконується з $\alpha = \rho\tau$, $a(t) = \big(\mathbb{P}\{\eta_1 > t\}\big)^\tau$ та $V_\lambda = \mu^{-1} W_\rho^\tau$.

Покажемо, що в якості λ можна взяти додатне число, менше за $\rho\tau$. Для довільного $T > 0$ і довільних $0 \leq x, y \leq T$, враховуючи субадитивність $x \to x^\tau$ на $[0,\infty)$, записуємо

$$\big|W_\rho^\tau(x) - W_\rho^\tau(y)\big| \leq \big|W_\rho(x) - W_\rho(y)\big|^\tau \leq M_T^\tau |x-y|^{\lambda_1 \tau},$$

де $\lambda_1 \in (0,\rho)$. Умови (6) і (8) виконуються для $(N(t))_{t\geq 0}$ за лемами 2 і 3 відповідно.

За теоремою 1 з $\alpha = \rho\tau$, $a(t) = \big(\mathbb{P}\{\eta_1 > t\}\big)^\tau$, $V_\lambda = \mu^{-1} W_\rho^\tau$ і функцією h, що задовольняє умови теореми,

$$\frac{\big(\mathbb{P}\{\eta_1 > t\}\big)^\tau}{h(t)} X(t\cdot) \overset{J_1}{\Longrightarrow} \mu^{-1} \int\limits_{[0,\cdot]} (\cdot - y)^\beta dW_\rho^\tau(y), \quad t \to \infty,$$

у просторі D, якщо h не спадає, й у просторі $D(0,\infty)$, якщо h не зростає.

2.3. У цьому прикладі вважаємо, що точки $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задаються (14) з $\tau = 1$, при цьому величини ξ_1 і η_1 можуть бути залежними. Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi_1 > x\} \sim c_1 x^{-\rho_1}$ і $\mathbb{P}\{\eta_1 > x\} \sim c_2 x^{-\rho_2}$ при $x \to \infty$ для додатних c_1, c_2 і $\rho_1, \rho_2 \in (0,1)$. Зокрема, це означає, що для $x_1, x_2 > 0$

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\big\{\xi_1 > (c_1 t)^{1/\rho_1} x_1\big\} = x_1^{-\rho_1}, \qquad \lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\big\{\eta_1 > (c_2 t)^{1/\rho_2} x_2\big\} = x_2^{-\rho_2}.$$

Для контролю асимптотики спільного розподілу ξ_1 і η_1 припустимо, що для $x_1, x_2 > 0$ існує границя

$$f(x_1, x_2) := \lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\big\{\xi_1 > (c_1t)^{1/\rho_1}x_1, \eta_1 > (c_2t)^{1/\rho_2}x_2\big\},$$

і, отже, існує міра ν, визначена на множині $\mathbb{K} := [0,\infty]^2\backslash\{(0,0)\}$, що задається так:

$$\nu\big\{(u,v)\in\mathbb{K}\colon u > x_1 \ \text{ або } \ v > x_2\big\} = x_1^{-\rho_1} + x_2^{-\rho_2} - f(x_1,x_2), \quad x_1, x_2 > 0.$$

Міра ν (і, отже, функція f) не може бути довільною: ми припускаємо, що вона задовольняє

$$\int\limits_{|\mathbf{x}|\neq 0} (|\mathbf{x}|\wedge 1)\nu(d\mathbf{x}) < \infty, \tag{15}$$

де $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ для $x = (x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2$.

Позначимо через $\mathcal{M} := \sum_k \delta_{(t_k, \mathbf{j}_k)}$ пуассонівську випадкову міру на $[0,\infty)\times\mathbb{K}$ з мірою інтенсивності LEB $\otimes\,\nu$. Тут $\delta_{(t,\mathbf{x})}$ — ймовірнісна міра, зосереджена у точці $(t,\mathbf{x})\in[0,\infty)\times\mathbb{K}$, а LEB позначає міру Лебега на $[0,\infty)$. Покладемо

$$\mathbf{L}(t) := (L_1(t), L_2(t)) = \sum_{k: t_k\le t} \mathbf{j}_k, \quad t > 0.$$

Умова (15) гарантує збіжність останнього ряду з імовірністю 1. Випадковий процес $\mathbf{L}$ є двовимірним процесом Леві з мірою Леві ν. Його координати L_1 і L_2 є (залежними, окрім випадку, коли $f\equiv 0$) стійкими субординаторами без зносу з параметрами ρ_1 і ρ_2 відповідно. Позначимо через $L_1^{\leftarrow}$ і $L_2^{\leftarrow}$ відповідні обернені ρ_1- і ρ_2-стійкі субординатори. Згідно з лемою 6.1 [13, с. 174]

$$t\mathbb{P}\left\{\left(\frac{\xi_1}{(c_1t)^{1/\rho_1}}, \frac{\eta_1}{(c_2t)^{1/\rho_2}}\right)\in\cdot\right\} \overset{v}{\to} \nu(\cdot), \quad t\to\infty,$$

де $\overset{v}{\to}$ позначає грубу збіжність на множині локально скінченних мір на $\mathbb{K}$. Тому за теоремою 4 [14]

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{[t\cdot]}\xi_k}{(c_1t)^{1/\rho_1}}, \frac{\sum_{j=1}^{[t\cdot]}\eta_j}{(c_2t)^{1/\rho_2}}\right) \Rightarrow \mathbf{L}(\cdot), \quad t\to\infty, \tag{16}$$

у J_1-топології на $D\times D$.

Покажемо, що звідси випливає співвідношення

$$\left(\frac{N^*(t\cdot)}{c_1^{-1}t^{\rho_1}}, \frac{N_1(t\cdot)}{c_2^{-1}t^{\rho_2}}\right) \Rightarrow \big(L_1^{\leftarrow}(\cdot), L_2^{\leftarrow}(\cdot)\big), \quad t\to\infty, \tag{17}$$

у продакт J_1-топології на $D\times D$. Дійсно, слабка збіжність скінченновимірних розподілів у (17) еквівалентна слабкій збіжності скінченновимірних розподілів у (16). Щільність розподілів координат у лівій частині (17) випливає з зауваження 2.1 [16] з урахуванням того, що координати є випадковими процесами, що м.н. не спадають, та того, що граничні процеси $L_1^{\leftarrow}$ і $L_2^{\leftarrow}$ є м.н. неперервними. Застосовуючи лему 4 до (17), отримуємо

$$t^{-\rho_1\rho_2}N^*(N_1(t\cdot)) \overset{J_1}{\Longrightarrow} c_1^{-1}c_2^{-\rho_2}L_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(\cdot)), \quad t\to\infty.$$

Отже, виконується співвідношення (5) з $\alpha=\rho_1\rho_2$, $a(t)=t^{-\rho_1\rho_2}$ і $V_\lambda(u)=c_1^{-1}c_2^{-\rho_2}L_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(u))$ для $u\ge 0$.

При перевірці інших умов теореми 1 будемо вважати, що величини ξ_1 і η_1 є незалежними. Покажемо, що в якості λ можна взяти додатне число, менше за $\rho_1\rho_2$. Згідно з інформацією, наведеною у пункті 1, для довільного $\lambda_i\in(0,\rho_i)$, довільного $T>0$, всіх $0\le x,y\le T$ і деяких м.н. скінченних додатних випадкових величин $M_T^{(i)}$ (що залежать від λ_i) $\big|L_i^{\leftarrow}(x)-L_i^{\leftarrow}(y)\big|\le$ $\le M_T^{(i)}|x-y|^{\lambda_i}$, $i=1,2$. Тому для таких же x і y

$$\big|L_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(x))-L_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(y))\big|\le M^{(1)}_{L_2^{\leftarrow}(T)}\big|L_2^{\leftarrow}(x)-L_2^{\leftarrow}(y)\big|^{\lambda_1}\le M^{(1)}_{L_2^{\leftarrow}(T)}(M_T^{(2)})^{\lambda_1}|x-y|^{\lambda_1\lambda_2}.$$

Внаслідок незалежності $L_1^{\leftarrow}$, $L_2^{\leftarrow}$ і самоподібності $L_1^{\leftarrow}$ з показником ρ_1 випадкова величина $M^{(1)}_{L_2^{\leftarrow}(T)}$ має той самий розподіл, що і $M_1^{(1)}(L_2^{\leftarrow}(T))^{\rho_1-\lambda_1}$, а отже, є м.н. скінченною.

Умови (6) і (8) виконуються для $(N(t))_{t\ge0}$ за лемами 2 і 3 відповідно. Таким чином, за теоремою 1 з $\alpha=\rho_1\rho_2$, $a(t)=t^{-\rho_1\rho_2}$, $V_\lambda(u)=c_1^{-1}c_2^{-\rho_2}L_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(u))$ для $u\ge0$ і функцією h, що задовольняє умови теореми,

$$\frac{t^{-\rho_1\rho_2}}{h(t)}X(t\cdot) \overset{J_1}{\Longrightarrow} c_1^{-1}c_2^{-\rho_2}\int\limits_{[0,\,\cdot]}(\cdot-y)^\beta dL_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(y)), \quad t\to\infty,$$

у просторі D, якщо h не спадає, й у просторі $D(0,\infty)$, якщо h не зростає.

4. Допоміжні твердження.

Лема 2. *За умов пп.* 2.2 *та* 2.3 *пункту* 3 *випадкові процеси* $(N(t))_{t\ge0}$ *задовольняють умову* (6).

Доведення. Міркування, наведені нижче, застосовні як для процесу $(N(t))_{t\ge0}$, що фігурує у пп. 2.2, так і для процесу, що фігурує у пп. 2.3. Принциповим припущенням є незалежність ξ_1, η_1 і, як наслідок, незалежність N^* і N_1.

Для довільних $0<a<b<\infty$ і $t>0$ виконується нерівність

$$\sup_{u\in[at,\,bt]}\big(N^*(N_1^\tau(u))-N^*(N_1^\tau(u-1))\big)\le\max\{R(t),Z(t)\}\le R(t)+Z(t),$$

де

$$R(t):=\sup_{at\le T_k\le bt}\big(N^*(N_1^\tau(T_k))-N^*(N_1^\tau(T_k-1))\big)\le$$
$$\le\sup_{k\le N_1(bt)}\big(N^*(N_1^\tau(T_k))-N^*(N_1^\tau(T_k-1))\big),$$
$$Z(t):=\sup_{at\le T_k\le bt}\big(N^*(N_1^\tau(T_k+1))-N^*(N_1^\tau(T_k))\big)\le$$
$$\le\sup_{k\le N_1(bt)}\big(N^*(N_1^\tau(T_k+1))-N^*(N_1^\tau(T_k))\big).$$

Припущення $\mathbb{E}\eta = \infty$ разом зі слабким законом великих чисел гарантує, що для довільного $\delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\big\{N_1(bt) > \delta t\big\} = 0.$$

Виберемо $a \in \big(0, -\log \mathbb{P}\{\xi = 0\}\big)$ і зазначимо, що $c := \mathbb{E}e^{aN^*(1)} < \infty$ за теоремою 2.1 (c) [7]. Далі, використовуючи (13), для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо $\mathbb{E}e^{aN^*(n)} \le c^n$. Тому, оскільки N^* і N_1 є незалежними,

$$\mathbb{E}e^{aN^*(1+N_1(1))} \le \mathbb{E}c^{1+N_1(1)} < \infty,$$

при цьому скінченність забезпечується теоремою 2.1 (b) [7] (нагадаємо, що за припущенням $\eta > 0$ м.н.). Аналогічно

$$\mathbb{E}e^{aN^*(N_1(1))} = \mathbb{E}e^{aN^*(N_1(1))}\mathbb{1}_{\{N_1(1)\ge 1\}} + \mathbb{E}e^{aN^*(N_1(1))}\mathbb{1}_{\{N_1(1)=0\}} \le \mathbb{E}c^{N_1(1)} + \mathbb{E}e^{aN^*(0)} < \infty.$$

Використовуючи незалежність N^* і N_1, субадитивність за розподілом і монотонність N^*, субадитивність $x \to x^\tau$ на $[0,\infty)$ та нерівність Маркова, для довільних додатних q, ε і δ маємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big\{R(t) > \varepsilon t^q\big\} &= \mathbb{P}\big\{R(t) > \varepsilon t^q,\, N_1(bt) > \delta t\big\} + \mathbb{P}\big\{R(t) > \varepsilon t^q,\, N_1(bt) \le \delta t\big\} \le \\
&\le \mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \mathbb{P}\left\{\sup_{k\le\lfloor\delta t\rfloor}\big(N^*(N_1^\tau(T_k)) - N^*(N_1^\tau(T_k - 1))\big) > \varepsilon t^q\right\} \le \\
&\le \mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \sum_{k=0}^{\lfloor\delta t\rfloor}\mathbb{P}\big\{N^*((N_1(T_k) - N_1(T_k - 1))^\tau) > \varepsilon t^q\big\} = \\
&= \mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \sum_{k=0}^{\lfloor\delta t\rfloor}\mathbb{P}\left\{N^*\left(\left(1 + \sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{1}_{\{T_k - T_i < 1\}}\right)^\tau\right) > \varepsilon t^q\right\} = \\
&= \mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \sum_{k=0}^{\lfloor\delta t\rfloor}\mathbb{P}\left\{N^*\left(\left(1 + \sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{1}_{\{T_i < 1\}}\right)^\tau\right) > \varepsilon t^q\right\} \le \\
&\le \mathbb{P}\big\{N_1(bt) > \delta t\big\} + \sum_{k=0}^{\lfloor\delta t\rfloor}\mathbb{P}\big\{N^*((1 + N_1(1))^\tau) > \varepsilon t^q\big\} \le \\
&\le \mathbb{P}\big\{N_1(bt) > \delta t\big\} + (\delta t + 1)e^{-a\varepsilon t^q}\mathbb{E}e^{aN^*(1+N_1(1))}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\big\{R(t) > \varepsilon t^q\big\} = 0.$$

Міркуючи аналогічно, для довільних додатних q, ε і δ отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big\{Z(t) > \varepsilon t^q\big\} &= \mathbb{P}\big\{Z(t) > \varepsilon t^q,\, N_1(bt) > \delta t\big\} + \mathbb{P}\big\{Z(t) > \varepsilon t^q,\, N_1(bt) \le \delta t\big\} \le \\
&\le \mathbb{P}\big\{N_1(bt) > \delta t\big\} + \mathbb{P}\left\{\sup_{k\le\delta t}\big(N^*(N_1^\tau(T_k + 1)) - N^*(N_1^\tau(T_k))\big) > \varepsilon t^q\right\} \le
\end{aligned}$$

$$\le \mathbb{P}\big\{N_1(bt) > \delta t\big\} + \sum_{k=0}^{\lfloor \delta t \rfloor} \mathbb{P}\big\{N^*((N_1(T_k+1) + N_1(T_k))^\tau) > \varepsilon t^q\big\} =$$

$$= \mathbb{P}\big\{N_1(bt) > \delta t\big\} + \sum_{k=0}^{\lfloor \delta t \rfloor} \mathbb{P}\left\{N^*\left(\left(\sum_{i\ge 1} \mathbb{1}_{\{T_k < T_{k+i} \le T_k+1\}}\right)^\tau\right) > \varepsilon t^q\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\big\{N_1(bt) > \delta t\big\} \sum_{k=0}^{\lfloor \delta t \rfloor} \mathbb{P}\left\{N^*\left(\left(\sum_{i\ge 1} \mathbb{1}_{\{T_{k+i} - T_k \le 1\}}\right)^\tau\right) > \varepsilon t^q\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\big\{N_1(bt) > \delta t\big\} \sum_{k=0}^{\lfloor \delta t \rfloor} \mathbb{P}\big\{N^*(N_1^\tau(1)) > \varepsilon t^q\big\} \le$$

$$\le \mathbb{P}\big\{N_1(bt) > \delta t\big\}(\delta t + 1)e^{-a\varepsilon t^q}\mathbb{E}\, e^{aN^*(N_1(1))}.$$

Звідси випливає виконання співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\big\{Z(t) > \varepsilon t^q\big\} = 0.$$

Таким чином, процеси $(N(t))_{t\ge 0}$ дійсно задовольняють умову (6).

Лему 2 доведено.

Лема 3. *За умов пп.* 2.2 *і* 2.3 *пункту* 3 *випадкові процеси* $(N(t))_{t\ge 0}$ *задовольняють умову* (8).

Доведення. Перший крок доведення розіб'ємо на дві частини, що відповідають припущенням пп. 2.2 і 2.3 відповідно, а другий крок буде спільним.

Крок 1, метою якого є встановлення обмеженості певних експоненційних моментів, що будуть визначені нижче.

Нехай виконано припущення пп. 2.2. Нагадаємо, що $a(t) = \big(\mathbb{P}\{\eta_1 > t\}\big)^\tau$ і $\phi(s) := \mathbb{E}e^{sN^*(1)} < \infty$ для $s \in (0, -\log \mathbb{P}\{\xi = 0\})$ (див. теорему 2.1(c) [7]). Зокрема, $\mathbb{E}N^*(1) < \infty$. Оскільки $\log\phi(s) \sim \phi(s) - 1 \sim \mathbb{E}N^*(1)s$ при $s \to 0+$, для вибраного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке значення $s_0 > 0$, що $\log\phi(s) \le (\mathbb{E}N^*(1) + \varepsilon)s$ для всіх $s \in (0, s_0]$. Виберемо будь-яке $b > 0$, що задовольняє $ba(1) \le s_0$, і покажемо, що $C^* := \sup_{t\ge 1} \mathbb{E}e^{ba(t)N^*(M_1^\tau(t))} < \infty$, де $M_1(t) := N_1(t) + 1$ для $t \ge 0$.

Використовуючи (13), для $t \ge 1$маємо

$$\mathbb{E}\left[e^{ba(t)N^*(M_1^\tau(t))} \,\Big|\, M_1(t)\right] \le \mathbb{E}\left[e^{ba(t)(N_1^*(1)+\ldots+N^*_{\lceil M_1^\tau(t)\rceil}(1))} \,\Big|\, M_1(t)\right] = e^{\log\phi(ba(t))\lceil M_1^\tau(t)\rceil}.$$

Тому для $\varepsilon > 0$, вибраного вище, і довільного $t \ge 1$

$$\mathbb{E}\left[e^{ba(t)N^*(\lceil M_1^\tau(t)\rceil)} \,\Big|\, M_1(t)\right] \le e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)ba(t)\lceil M_1^\tau(t)\rceil}.$$

Оскільки

$$\sup_{t\ge 1} \mathbb{E}e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)ba(t)\lceil M_1^\tau(t)\rceil} \mathbb{1}_{\{a(t)\lceil M_1^\tau(t)\rceil > 1\}} \le$$

$$\le \mathbb{E}e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)ba(1)} \sup_{t\ge 1} \mathbb{E}e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)b\mathbb{P}\{\eta_1 > t\}M_1(t)} < \infty,$$

де скінченність забезпечується лемою А.4 [6], то $C^* < \infty$.

Нехай виконано припущення пп. 2.3. Нагадаємо, що $a(t) = t^{-\rho_1\rho_2}$. Покладемо $\psi(s) := := \mathbb{E}e^{-s\xi}$ і $\varphi(s) := \mathbb{E}e^{-s\eta}$ для $s \geq 0$. Маємо $\mathbb{E}[e^{-sS_n}|S_n^*] = \varphi^{\lfloor S_n^* \rfloor}(s) \leq \varphi^{S_n^*-1}(s)$ і, отже, $\mathbb{E}e^{-sS_n} \leq \psi^n(-\log\varphi(s))/\varphi(s)$. У цьому випадку виберемо будь-яке $b \in (0, -\log\mathbb{P}\{\xi = 0\}/2)$ і покажемо, що $C^* := \sup_{t\geq 1}\mathbb{E}e^{ba(t)N^*(M_1(t))} < \infty$.

Для додатних s, що задовольняють нерівність $e^{2ba(t)}\psi(-\log\varphi(s)) < 1$, із застосуванням нерівності Маркова отримуємо

$$\mathbb{E}e^{2ba(t)N(t)} - 1 = \left(1 - e^{-2ba(t)}\right)\sum_{k\geq 1} e^{2ba(t)k}\mathbb{P}\{N(t) \geq k\} =$$

$$= \left(1 - e^{-2ba(t)}\right)\sum_{k\geq 1} e^{2ba(t)k}\mathbb{P}\{S_{k-1} \leq t\} \leq$$

$$\leq e^{st}\left(e^{2ba(t)} - 1\right)\sum_{k\geq 0} e^{2ba(t)k}\psi^k(-\log\varphi(s)) = \frac{e^{st}\left(e^{2ba(t)} - 1\right)}{1 - e^{2ba(t)}\psi(-\log\varphi(s))}.$$

Згідно з наслідком 8.1.7 [2] $1 - \psi(s) \sim c_1\Gamma(1-\rho_1)s^{\rho_1}$ і $-\log\varphi(s) \sim 1 - \varphi(s) \sim c_2\Gamma(1-\rho_2)s^{\rho_2}$ при $s \to 0+$. Тому для будь-якого $\kappa > 0$

$$1 - \psi\big(-\log\varphi(\kappa t^{-1})\big) \sim c_1\Gamma(1-\rho_1)\big(c_2\Gamma(1-\rho_2)\kappa^{\rho_2}\big)^{\rho_1}t^{-\rho_1\rho_2}, \quad t \to \infty.$$

Отже, при $t \to \infty$

$$\frac{1 - e^{-2ba(t)}}{1 - \psi(-\log\varphi(ct^{-1}))} \sim \frac{2b}{c_1\Gamma(1-\rho_1)(c_2\Gamma(1-\rho_2)\kappa^{\rho_2})^{\rho_1}} := A.$$

Виберемо значення κ так, що $A < 1$. Тоді нерівність $e^{2ba(t)}\psi(-\log\varphi(s)) < 1$ виконується для $s = \kappa t^{-1}$ при достатньо великих t і

$$\mathbb{E}e^{2ba(t)N(t)} - 1 \leq \frac{e^{\kappa}\left(e^{2ba(t)} - 1\right)}{1 - e^{2ba(t)}\psi(-\log\varphi(\kappa t^{-1}))} \to \frac{e^{\kappa}A}{1-A}, \quad t \to \infty.$$

Таким чином, ми встановили скінченність $\sup_{t\geq 1}\mathbb{E}e^{2ba(t)N(t)} < \infty$. Далі, використовуючи субадитивність за розподілом N^* і нерівність Гьольдера, для $t \geq 1$ записуємо

$$\mathbb{E}e^{ba(t)N^*(M_1(t))} \leq \mathbb{E}e^{ba(t)(N^*(1)+N^*(N_1(t)))} \leq$$

$$\leq \left(\mathbb{E}e^{2ba(t)N^*(1)}\mathbb{E}e^{2ba(t)N^*(N_1(t))}\right)^{1/2} \leq \left(\mathbb{E}e^{2bN^*(1)}\mathbb{E}e^{2ba(t)N(t)}\right)^{1/2}.$$

Отже, $C^* < \infty$, оскільки наш вибір b гарантує скінченність $\mathbb{E}e^{2bN^*(1)}$.

Крок 2, на якому завершується доведення. За виконання припущень пп. 2.3 вважаємо, що $\tau = 1$. Використовуючи незалежність N^* і N_1, субадитивність за розподілом N^*, субадитивність $x \to x^\tau$ на $[0,\infty)$ і те, що $t \to N^*(t)$ не спадає м.н., для $x > 0$, $t \geq 1$ і $k \in \mathbb{N}$ записуємо

$$\mathbb{P}\Big\{a(t)(N^*(N_1^\tau((k+1)t)) - N^*(N_1^\tau(kt))) > x \;\Big|\; (N_1(s))_{s\geq 0}\Big\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\Big\{a(t)N^*(N_1^\tau((k+1)t) - N_1^\tau(kt)) > x \;\Big|\; (N_1(s))_{s\geq 0}\Big\} \leq$$
$$\leq \mathbb{P}\Big\{a(t)N^*((N_1((k+1)t) - N_1(kt))^\tau) > x \;\Big|\; (N_1(s))_{s\geq 0}\Big\}.$$

Далі, використовуючи незалежність N^* і N_1, субадитивність за розподілом $(M_1(t))_{t\geq 0}$, те, що $t \to N^*(t)$ не спадає м.н., і нерівність Маркова, маємо

$$\mathbb{P}\big\{a(t)(N^*(N_1^\tau((k+1)t)) - N^*(N_1^\tau(kt))) > x\big\} \leq$$
$$\leq \mathbb{P}\big\{a(t)N^*((N_1((k+1)t) - N_1(kt))^\tau) > x\big\} =$$
$$= \mathbb{E}\mathbb{P}\big\{a(t)N^*((N_1((k+1)t) - N_1(kt))^\tau) > x \;\big|\; (N^*(s))_{s\geq 0}\big\} \leq$$
$$\leq \mathbb{P}\big\{a(t)N^*(M_1^\tau(t)) > x\big\} \leq C^* e^{-bx} = f(x).$$

При цьому для $c > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j f(x2^{jc}) = C^* \lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j e^{-bx2^{jc}} = 0,$$

оскільки останній ряд збігається рівномірно по $x \geq 1$. Таким чином, процеси $(N(t))_{t\geq 0}$ дійсно задовольняють умову (8).

Лему 3 доведено.

Насамкінець наведемо два останні допоміжні результати, запозичені з леми 2.3 [4, с. 159] і леми A.5 [5] відповідно.

Лема 4. *Відображення композиції* $(x, y) \mapsto x \circ y$ *є* J_1*-неперервним на неперервних функціях* $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *і неперервних функціях* $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *що не спадають.*

Лема 5. *Нехай* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *у* D. *Припустимо, що при* $n \to \infty$ *скінченні міри* ν_n *слабко збігаються до скінченної неперервної міри* ν *на* $[0, u]$ *для деякого* $u > 0$. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,u]} x_n(y)\nu_n(dy) = \int\limits_{[0,u]} x(y)\nu(dy).$$

Якщо функція x *неперервна у точці* $c \in [0, u]$, *а* $\nu = \delta_c$ *є ймовірнісною мірою, зосередженою у точці* c, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,u]} x_n(y)\nu_n(dy) = x(c).$$

Література

1. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York (1999).
2. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, Cambridge Univ. Press (1989).
3. C. Dong, A. Iksanov, *Weak convergence of random processes with immigration at random times*, J. Appl. Probab., **57**, 250 – 265 (2020).
4. A. Gut, *Stopped random walks. Limit theorems and applications*, 2nd ed., Springer (2009).
5. A. Iksanov, *Functional limit theorems for renewal shot noise processes with increasing response functions*, Stoch. Process. and Appl., **123**, 1987 – 2010 (2013).

6. A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych, G. Shevchenko, *Fractionally integrated inverse stable subordinators*, Stoch. Process. and Appl., **127**, 80 – 106 (2016).
7. A. Iksanov, M. Meiners, *Exponential rate of almost sure convergence of intrinsic martingales in supercritical branching random walks*, J. Appl. Probab., **47**, 513 – 525 (2010).
8. A. Iksanov, B. Rashytov, *A functional limit theorem for the general shot noise processes*, J. Appl. Probab., **57**, 280 – 294 (2020).
9. J. Jacod, A. N. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes*, 2nd ed., Springer (2003).
10. M. M. Meerschaert, H. P. Scheffler, *Limit theorems for continuous time random walks with infinite mean waiting times*, J. Appl. Probab., **41**, 623 – 638 (2004).
11. T. Owada, G. Samorodnitsky, *Functional central limit theorem for heavy tailed stationary infinitely divisible processes generated by conservative flows*, Ann. Probab., **43**, 240 – 285 (2015).
12. G. Pang, Y. Zhou, *Functional limit theorems for shot noise processes with weakly dependent noises*, Stoch. Syst., **10**, 99 – 123 (2020).
13. S. I. Resnick, *Heavy-tail phenomena: probabilistic and statistical modeling*, Springer (2007).
14. S. Resnick, P. Greenwood, *A bivariate stable characterization and domains of attraction*, J. Multivar. Anal., **9**, 206 – 221 (1979).
15. M. Tamborrino, P. Lansky, *Shot noise, weak convergence and diffusion approximations*, https://arxiv.org/abs/2005.06067.
16. M. Yamazato, *On a J_1-convergence theorem for stochastic processes on $D[0,\infty)$ having monotone sample paths and its applications*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **1620**, 109 – 118 (2009).
17. Г. Верьовкін, О. Маринич, *Стаціонарні границі процесів дробового ефекту*, Теорія ймовірностей та мат. статистика, **101**, 63 – 77 (2019).

Одержано 06.07.20