DOI: 10.37863/umzh.v72i12.6216

УДК 517.54

О. К. Бахтін, Л. В. Вигівська, І. В. Денега (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАДАЧА ПРО ЕКСТРЕМАЛЬНЕ РОЗБИТТЯ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА КОЛІ

We consider the problem of maximization of the product of inner radii of n nonoverlapping domains, which are symmetric with respect to the unit circle, and the inner radius to the power γ of a domain with respect to zero. We solve the problem for $n = 2$ and $n = 3$ and some $\gamma > 1$.

Вивчається задача про максимум добутку внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних областей, симетричних відносно одиничного кола, і внутрішнього радіуса в додатному степені γ деякої області відносно початку координат. Розв'язано задачу про знаходження максимуму вказаного добутку при $n = 2$, $n = 3$ та деяких $\gamma > 1$.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Нехай $\chi(t) = \dfrac{1}{2}(t+t^{-1})$ — функція Жуковського. Будемо позначати відкритий одиничний круг комплексної площини з центром у початку координат через U_1. Нехай $r(B, a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див., наприклад, [1–20]). Внутрішній радіус області B пов'язаний із узагальненою функцією Гріна $g_B(z, a)$ області B (див. [1–20]) співвідношеннями

$$g_B(z,a) = -\ln|z-a| + \ln r(B,a) + o(1), \quad z \to a,$$

$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(B,\infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Для довільного набору різних точок одиничного кола $\{a_k\}_{k=1}^n$, занумерованих у порядку зростання аргумента і таких, що $a_1 = 1$, введемо позначення $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$.

На множині довільних систем взаємно неперетинних областей $B_0, B_1, \ldots, B_n$ (тобто $B_p \cap \cap B_j = \varnothing$ при $p \neq j$, $p, j = \overline{0,n}$) таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $|a_k| = 1$ для всіх $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0$ і області $B_1, \ldots, B_n$ симетричні відносно одиничного кола, $\gamma \in (0, n]$, будемо вивчати функціонал

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0)\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k). \tag{1}$$

Задача 1. Для кожного фіксованого $\gamma \in (0, n]$ визначити максимум функціонала (1) і описати екстремальні конфігурації з областей B_k і точок a_k, $k = \overline{0,n}$.

Ця задача відноситься до класу задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами. Такі проблеми вивчались у багатьох роботах (див., наприклад, [12–37]). У початковому формулюванні подібні задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на колі з'явились у роботах [21 – 23]. Далі ці задачі були значно узагальнені у роботах Г. В. Кузьміної, В. М. Дубініна і Є. Г. Ємільянова.

Задачу 1 сформулював як відкриту проблему В. М. Дубінін [15] при $\gamma = 1$. У частинному випадку, коли $B_0 \subset U_1$ і $\gamma = 1$, задачу 1 було розв'язано у роботі [15] і названо задачею Г. П. Бахтіної. В 2000 р. Л. В. Ковальов розв'язав задачу 1 при $\gamma = 1$ [18, 19].

При $\gamma \in (0, 1]$ і $n \geq 2$ задачу 1 вдалося розв'язати у роботі [31] лише у 2017 р. У 2018 р. було доведено, що для довільного $\gamma > 1$ існує наперед невідомий номер (залежний від γ), починаючи з якого отримано розв'язок задачі 1 [35]. При $\gamma \in (1; n^{\frac{1}{3}}]$ і $n \geq 14$ розв'язок задачі 1 отримано у [33]. Також у 2018 р. було отримано деякий результат в одній більш загальній задачі, з якого випливає розв'язок задачі 1 для $\gamma \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right]$ і $n \geq 9$ (див. [32]). У 2019 р. задачу 1 при $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$ і $n \geq 8$ розв'язано у роботі [30].

Як показав досвід дослідження задачі 1, найбільші труднощі виникають при $n = 2$ і $\gamma > 1$. Оскільки для $n = \overline{2,7}$ поки що не було отримано жодних результатів при $\gamma > 1$, тому мають певний інтерес наступні результати.

Теорема 1. *Нехай $n = 2$, $1 < \gamma \leq 1{,}1$. Тоді для довільного набору трьох різних точок таких, що $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = 1$, і довільного набору трьох взаємно неперетинних областей B_0, B_1, B_2 таких, що $a_0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, причому області B_1 і B_2 симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leq 4 \frac{\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{2}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{2\gamma}}{2}}{1 + \dfrac{\sqrt{2\gamma}}{2}} \right)^{\sqrt{2\gamma}}. \tag{2}$$

Знак рівності у (2) *досягається, коли точки* 0, a_1, a_2 *та області* B_0, B_1, B_2 *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w) dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4 - \gamma) w^2 + \gamma}{w^2 (w^2 - 1)^2}\, dw^2. \tag{3}$$

Теорема 2. *Нехай $n = 3$, $1 < \gamma \leq 1{,}2$. Тоді для довільного набору чотирьох різних точок таких, що $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$, і довільного набору чотирьох взаємно неперетинних областей B_0, B_1, B_2, B_3 таких, що $a_0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,3}$, причому області B_k, $k = \overline{1,3}$, симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) r(B_3, a_3) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\dfrac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1 - \dfrac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{2\gamma}}{3}}{1 + \dfrac{\sqrt{2\gamma}}{3}} \right)^{\sqrt{2\gamma}}. \tag{4}$$

Знак рівності у (4) *досягається, коли точки* 0, a_1, a_2, a_3 *та області* B_0, B_1, B_2, B_3 *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w) dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9 - \gamma) w^3 + \gamma}{w^2 (w^3 - 1)^2}\, dw^2. \tag{5}$$

При доведенні цих теорем будемо використовувати ідеї робіт [13 – 37] та властивості відокремлюючого перетворення (див., наприклад, [13 – 20]).

***Доведення теореми* 1.** Без обмеження загальності будемо вважати, що $a_1 = 1$. Доведення теореми 1 складається з розгляду двох можливих випадків: $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geq 2$ і $\alpha_0\sqrt{2\gamma} < 2$, $\alpha_0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Випадок 1. Нехай $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geq 2$. Для зручності будемо вважати, що $\alpha_0 = \alpha_2$.

Відомо (див. [33, 35]), що

$$I_2^{(0)}(\gamma) := r^\gamma\big(B_0^{(0)}, 0\big)r\big(B_1^{(0)}, a_1^{(0)}\big)r\big(B_2^{(0)}, a_2^{(0)}\big) = 4\frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}, \tag{6}$$

де 0, $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ і $B_0^{(0)}$, $B_1^{(0)}$, $B_2^{(0)}$ — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала (3).

Розглянемо функціонал $I_2(\gamma)$. Згідно з результатами роботи [19] маємо

$$I_2(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0)r(B_1, a_1)r(B_2, a_2) = r^{\gamma - \frac{2}{\alpha_2{}^2}}(B_0, 0)\Big[r^{\frac{2}{\alpha_2{}^2}}(B_0, 0)r(B_1, a_1)r(B_2, a_2)\Big]. \tag{7}$$

Поряд із припущенням, що $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geq 2$, будемо вивчати такі трійки областей B_0, B_1, B_2 і відповідні системи точок 0, a_1, a_2, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, 2}$, і $I_2(\gamma) \geq I_2^{(0)}(\gamma)$. В цьому випадку із роботи [27] при $n = 2$ маємо нерівність

$$r(B_0, 0) \leq \big[2I_2^{(0)}(\gamma)\big]^{-\frac{1}{2-\gamma}}. \tag{8}$$

Тоді, враховуючи співвідношення (7), (8), приходимо до нерівності

$$I_2(\gamma) \leq \big[2I_2^{(0)}(\gamma)\big]^{-\frac{1}{2-\gamma}\left(\gamma - \frac{2}{\alpha_2{}^2}\right)}\Big[r^{\frac{2}{\alpha_2{}^2}}(B_0, 0)r(B_1, a_1)r(B_2, a_2)\Big]. \tag{9}$$

Для зручності введемо позначення

$$\big[2I_2^{(0)}(\gamma)\big]^{-\frac{1}{2-\gamma}\left(\gamma - \frac{2}{\alpha_2{}^2}\right)} =: Q. \tag{10}$$

Тоді нерівність (9) набирає вигляду

$$I_2(\gamma) \leq Q\Big[r^{\frac{2}{\alpha_2{}^2}}(B_0, 0)r(B_1, a_1)r(B_2, a_2)\Big].$$

Далі за стандартною схемою (див. [14 – 16, 20]) виконуємо відокремлююче перетворення для областей B_0, B_1, B_2.

Позначимо $\theta_1 := \arg a_1 = 0$, $\theta_2 := \arg a_2$, $\theta_2 \in (0; 2\pi)$.

Розглянемо систему функцій $\pi_1(w) = \big(e^{-i\theta_1}w\big)^{\frac{1}{\alpha_1}} = (w)^{\frac{1}{\alpha_1}}$, $\pi_2(w) = \big(e^{-i\theta_2}w\big)^{\frac{1}{\alpha_2}}$, де гілки багатозначних аналітичних функцій $(w)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, 2}$, вибрано таким чином, що на дійсній додатній осі вони набувають додатних значень. Розглянемо кутові області $P_1 := \{w\colon 0 < \arg w < \theta_2\}$, $P_2 := \{w\colon \theta_2 < \arg w < 2\pi\}$ (див. рис. 1).

Таким чином, функції $\zeta = \pi_1(w)$, $\zeta = \pi_2(w)$ однолисто і конформно відображають відповідно області P_1, P_2 на верхню півплощину $\operatorname{Im}\zeta > 0$.

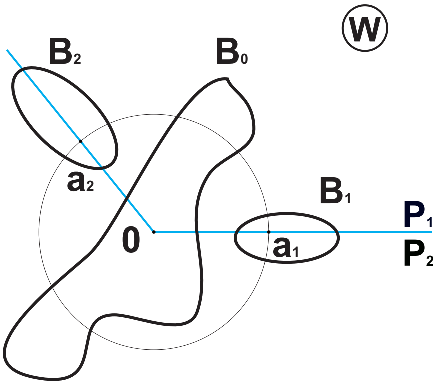

Рис. 1. Кути P_1 та P_2, відносно яких здійснюється відокремлююче перетворення, яке відповідає трійці довільних взаємно неперетинних областей B_0, B_1, B_2.

Сім'я функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^{2}$ є допустимою для відокремлюючого перетворення областей B_k, $k=\overline{0,2}$, відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^{2}$. Нехай $G_0^{(1)}$ — область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_1\big(B_0\bigcap\overline{P}_1\big)$, яка містить точку $\pi_1(a_0)=0$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі; $G_1^{(1)}$ — область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_1\big(B_1\bigcap\overline{P}_1\big)$, яка містить точку $\pi_1(a_1)=$ $=1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі; $G_2^{(1)}$ — область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_1\big(B_2\bigcap\overline{P}_1\big)$, яка містить точку $\pi_1(a_2)=-1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі; $G_0^{(2)}$ — область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_2\big(B_0\bigcap\overline{P}_2\big)$, яка містить точку $\pi_2(a_0)=0$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі; $G_1^{(2)}$ — область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_2\big(B_1\bigcap\overline{P}_2\big)$, яка містить точку $\pi_2(a_2)=1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі; $G_2^{(2)}$ — область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_2\big(B_1\bigcap\overline{P}_2\big)$, яка містить точку $\pi_2(a_1)=-1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі (див. рис. 2).

Тут було враховано, що

$$\pi_k(a_k)=1, \qquad \pi_k(a_{k+1})=-1, \quad k=1,2, \qquad B_3:=B_1, \quad a_3:=a_1.$$

З визначення функцій π_k, $k=1,2$, випливає справедливість асимптотичних співвідношень

$$|\pi_k(w)-1|\sim\frac{1}{\alpha_k}|w-a_k|, \qquad w\to a_k, \quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)+1|\sim\frac{1}{\alpha_k}|w-a_{k+1}|, \qquad w\to a_{k+1}, \quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)|\sim|w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \qquad w\to 0, \quad w\in\overline{P_k}.$$

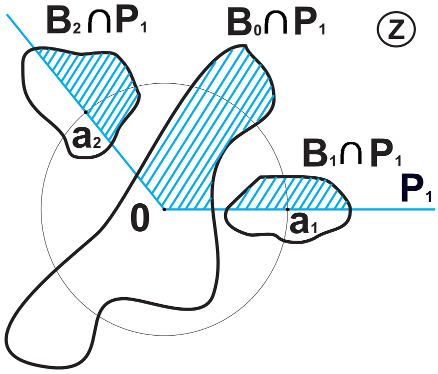

Рис. 2. Розбиття трійки областей B_0, B_1, B_2 на зв'язні компоненти.

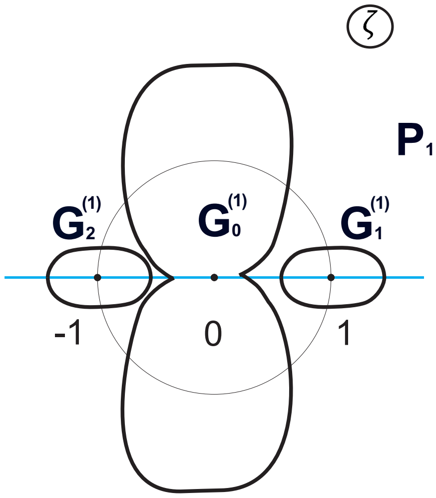

Рис. 3. Результат відокремлюючого перетворення областей B_0, B_1, B_2 відносно кута P_1.

Згідно з методом відокремлюючого перетворення [14, 15, 20] кожній трійці взаємно неперетинних областей B_0, B_1, B_2 і відповідній трійці точок a_0, a_1, a_2 відповідають дві трійки взаємно неперетинних областей $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ і $G_0^{(2)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$, для яких виконуються включення $0 \in G_0^{(k)}$, $1 \in G_1^{(k)}$, $-1 \in G_2^{(k)}$, $k = 1, 2$, площини $\mathbb{C}_\zeta$ (див. рис. 3). Тоді маємо нерівності

$$r(B_0, 0) \le \left[r^{\alpha_1^2}\big(G_0^{(1)}, 0\big) r^{\alpha_2^2}\big(G_0^{(2)}, 0\big) \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

$$r(B_1, a_1) \le \left[\alpha_1 \alpha_2 r\big(G_1^{(1)}, 1\big) r\big(G_2^{(2)}, -1\big) \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

$$r(B_2, a_2) \le \left[\alpha_1 \alpha_2 r\big(G_2^{(1)}, -1\big) r\big(G_1^{(2)}, 1\big) \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Із нерівностей (11) – (13) випливає ланцюжок співвідношень

$$r^{\frac{2}{\alpha_2{}^2}}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2)\leq\left(\left[r^{\alpha_1^2}\big(G_0^{(1)},0\big)r^{\alpha_2^2}\big(G_0^{(2)},0\big)\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{\alpha_2{}^2}}\times$$

$$\times\left[\alpha_1\alpha_2 r\big(G_1^{(1)},1\big)r\big(G_2^{(2)},-1\big)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\alpha_1\alpha_2 r\big(G_2^{(1)},-1\big)r\big(G_1^{(2)},1\big)\right]^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\alpha_1\alpha_2\left[r^{\frac{2\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\big(G_0^{(1)},0\big)r\big(G_1^{(1)},1\big)r\big(G_2^{(1)},-1\big)\right]^{\frac{1}{2}}\left[r^2\big(G_0^{(2)},0\big)r\big(G_1^{(2)},1\big)r\big(G_2^{(2)},-1\big)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Увівши позначення $t:=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, отримаємо нерівність

$$r^{\frac{2}{\alpha_2{}^2}}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2)\leq$$

$$\leq\alpha_1\alpha_2\left[r^{2t^2}\big(G_0^{(1)},0\big)r\big(G_1^{(1)},1\big)r\big(G_2^{(1)},-1\big)\right]^{\frac{1}{2}}\left[r^2\big(G_0^{(2)},0\big)r\big(G_1^{(2)},1\big)r\big(G_2^{(2)},-1\big)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, приходимо до нерівності

$$I_2(\gamma)\leq Q\alpha_1\alpha_2\left[r^{2t^2}\big(G_0^{(1)},0\big)r\big(G_1^{(1)},1\big)r\big(G_2^{(1)},-1\big)\right]^{\frac{1}{2}}\left[r^2\big(G_0^{(2)},0\big)r\big(G_1^{(2)},1\big)r\big(G_2^{(2)},-1\big)\right]^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq Q\alpha_1\alpha_2\big[I_2(2t^2)\big]^{\frac{1}{2}}[I_2(2)]^{\frac{1}{2}},\qquad(14)$$

яка дає оцінку початкового функціонала $I_2(\gamma)$ через величину Q, величини $\alpha_1,\ \alpha_2$, значення функціоналів $I_2(2t^2)$ та $I_2(2)$ на трійках $G_0^{(1)},\ G_1^{(1)},\ G_2^{(1)}$ і $G_0^{(2)},\ G_1^{(2)},\ G_2^{(2)}$ відповідно.

По аналогії з роботою [19] виконуємо відокремлююче перетворення для $G_0^{(1)},\ G_1^{(1)},\ G_2^{(1)}$ і $G_0^{(2)},\ G_1^{(2)},\ G_2^{(2)}$ відносно системи областей, які вводяться нижче.

Нехай

$$T_k:=\big\{\zeta:(-1)^{k+1}\mathrm{Im}\,\zeta>0\big\},\quad k\in\{1,2\},$$

$$E_1=T_1\cap U_1,\qquad E_2=(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{U}_1)\cap T_1,\qquad E_3=T_2\cap U_1,\qquad E_4=(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{U}_1)\cap T_2,$$

$$z=\beta(\zeta)=\frac{2\zeta}{1+\zeta^2}.$$

Легко бачити, що $\beta(0)=0,\ \beta(\pm1)=\pm1,\ \beta(\pm i)=\infty$,

$$|\beta(\zeta)|\sim2|\zeta|,\quad \zeta\to0,$$

$$\big|\beta(\zeta)-1\big|\sim\frac{1}{2}|\zeta-1|^2,\quad \zeta\to1,$$

$$\big|\beta(\zeta)+1\big|\sim\frac{1}{2}|\zeta+1|^2,\quad \zeta\to-1.$$

Функція $z=\beta(\zeta)$ однолисто і конформно відображає відповідно області $E_1,\ E_4$ на верхню півплощину $\mathbb{C}_z$ $(\mathrm{Im}\,z>0)$, а $E_2,\ E_3$ на нижню півплощину $\mathbb{C}_z$ $(\mathrm{Im}\,z<0)$.

Відносно системи областей $E_k,\ k=\overline{1,4}$, повторно застосовується відокремлююче перетворення до областей $G_0^{(1)},\ G_1^{(1)},\ G_2^{(1)}$ (див. рис. 4, 5).

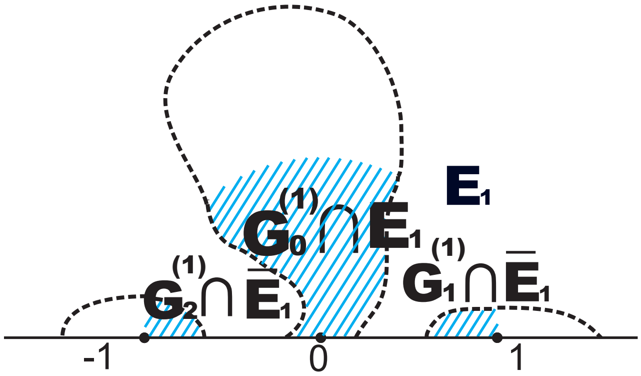

Рис. 4. Зв'язні компоненти множин $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$, які містяться у замкненому півкрузі $\overline{E_1}$.

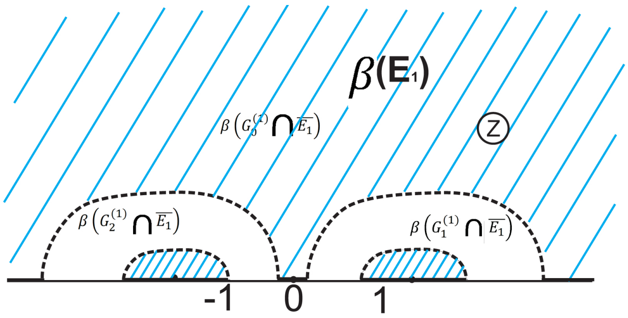

Рис. 5. Образи зв'язних компонент при відображенні β.

Нехай $\Omega_0^{(1)}(k)$ — область площини $\mathbb{C}_z$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_0^{(1)} \bigcap \overline{E}_k)$, $k = 1, 3$, яка містить точку 0, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі; $\Omega_1^{(1)}(k)$ — область площини $\mathbb{C}_z$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_1^{(1)} \bigcap \overline{E}_k)$, $k = \overline{1, 4}$, яка містить точку 1, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі; $\Omega_2^{(1)}(k)$ — область площини $\mathbb{C}_z$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_2^{(1)} \bigcap \overline{E}_k)$, $k = \overline{1, 4}$, яка містить точку -1, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі.

Тепер застосовуємо відокремлююче перетворення до трійки областей $G_0^{(2)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$.

Нехай $\Omega_0^{(2)}(k)$ — область площини $\mathbb{C}_z$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_0^{(2)} \bigcap \overline{E}_k)$, $k = 1, 3$, яка містить точку 0, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі; $\Omega_1^{(2)}(k)$ — область площини $\mathbb{C}_z$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_1^{(2)} \bigcap \overline{E}_k)$, $k = \overline{1, 4}$, яка містить точку 1, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі; $\Omega_2^{(2)}(k)$ — область площини $\mathbb{C}_z$, отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_2^{(2)} \bigcap \overline{E}_k)$, $k = \overline{1, 4}$, яка містить точку -1, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі.

У відповідності з теорією відокремлюючого перетворення маємо такі нерівності для трійки $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$:

$$r\big(G_0^{(1)},0\big)\leq\left[\frac{1}{2}r\big(\Omega_0^{(1)}(1),0\big)\frac{1}{2}r\big((\Omega_0^{(1)}(3),0\big)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\big(G_1^{(1)},1\big)\leq\Big[2r\big((\Omega_1^{(1)}(1),1\big)2r\big((\Omega_1^{(1)}(2),1\big)2r\big((\Omega_1^{(1)}(3),1\big)2r\big((\Omega_1^{(1)}(4),1\big)\Big]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\big(G_2^{(1)},-1\big)\leq\Big[2r\big((\Omega_2^{(1)}(1),-1\big)2r\big((\Omega_2^{(1)}(2),-1\big)2r\big((\Omega_2^{(1)}(3),-1\big)2r\big((\Omega_2^{(1)}(4),-1\big)\Big]^{\frac{1}{8}}.$$

Аналогічно отримаємо нерівності для трійки $G_0^{(2)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$:

$$r\big(G_0^{(2)},0\big)\leq\left[\frac{1}{2}r\big((\Omega_0^{(2)}(1),0\big)\frac{1}{2}r\big((\Omega_0^{(2)}(3),0\big)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\big(G_1^{(2)},1\big)\leq\Big[2r\big((\Omega_1^{(2)}(1),1\big)2r\big((\Omega_1^{(2)}(2),1\big)2r\big((\Omega_1^{(2)}(3),1\big)2r\big((\Omega_1^{(2)}(4),1\big)\Big]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\big(G_2^{(2)},-1\big)\leq\Big[2r\big((\Omega_2^{(2)}(1),-1\big)2r\big((\Omega_2^{(2)}(2),-1\big)2r\big((\Omega_2^{(2)}(3),-1\big)2r\big((\Omega_2^{(2)}(4),-1\big)\Big]^{\frac{1}{8}}.$$

Враховуючи симетрію областей $G_1^{(1)}$, $G_2^{(2)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(1)}$ відносно одиничного кола, бачимо, що $\Omega_1^{(1)}(1)$ збігається з областю $\Omega_1^{(1)}(2)$, $\Omega_1^{(1)}(3)$ — з областю $\Omega_1^{(1)}(4)$, $\Omega_2^{(2)}(1)$ — з областю $\Omega_2^{(2)}(2)$, $\Omega_2^{(2)}(3)$ — з областю $\Omega_2^{(2)}(4)$. Отже, виконуються такі співвідношення:

$$r\big(G_0^{(1)},0\big)\leq\left[\frac{1}{4}r\big(\Omega_0^{(1)}(1),0\big)r\big((\Omega_0^{(1)}(3),0\big)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\big(G_1^{(1)},1\big)\leq\Big[4r\big((\Omega_1^{(1)}(1),1\big)r\big((\Omega_1^{(1)}(3),1\big)\Big]^{\frac{1}{4}},$$

$$r\big(G_2^{(1)},-1\big)\leq\Big[4r\big((\Omega_2^{(1)}(1),-1\big)r\big((\Omega_2^{(1)}(3),-1\big)\Big]^{\frac{1}{4}}.$$

Аналогічно

$$r\big(G_0^{(2)},0\big)\leq\left[\frac{1}{4}r\big((\Omega_0^{(2)}(1),0\big)r\big((\Omega_0^{(2)}(3),0\big)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\big(G_1^{(2)},1\big)\leq\Big[4r\big((\Omega_1^{(2)}(1),1\big)r\big((\Omega_1^{(2)}(3),1\big)\Big]^{\frac{1}{4}},$$

$$r\big(G_2^{(2)},-1\big)\leq\Big[4r\big((\Omega_2^{(2)}(1),-1\big)r\big((\Omega_2^{(2)}(3),-1\big)\Big]^{\frac{1}{4}}.$$

В результаті наведених вище перетворень трійці $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ відповідають дві трійки: $\Omega_0^{(1)}(1)$, $\Omega_1^{(1)}(1)$, $\Omega_2^{(1)}(1)$ і $\Omega_0^{(1)}(3)$, $\Omega_1^{(1)}(3)$, $\Omega_2^{(1)}(3)$. Аналогічно, трійці $G_0^{(2)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$ відповідають дві трійки: $\Omega_0^{(2)}(1)$, $\Omega_1^{(2)}(1)$, $\Omega_2^{(2)}(1)$ і $\Omega_0^{(2)}(3)$, $\Omega_1^{(2)}(3)$, $\Omega_2^{(2)}(3)$ взаємно неперетинних областей (див. рис. 6).

Повертаючись до формули (14), де величина Q визначена формулою (10), і враховуючи попередні перетворення, маємо

$$I_2(\gamma)\leq Q\alpha_1\alpha_2\Big[2^{-4t^2}r^{2t^2}\big(\Omega_0^{(1)}(1),0\big)r^{2t^2}\big((\Omega_0^{(1)}(3),0\big)\Big]^{\frac{1}{4}}\times$$

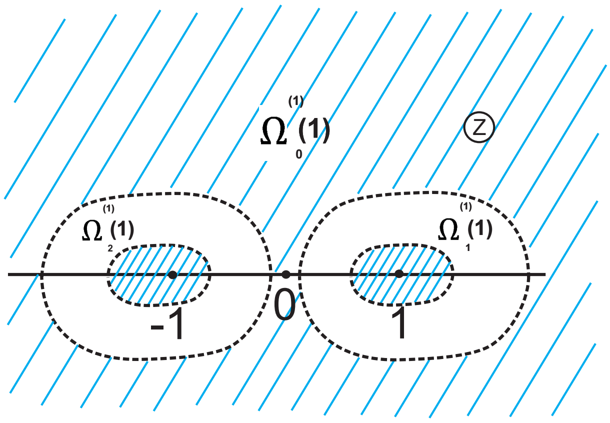

Рис. 6. $\Omega_0^{(1)}(1),\ \Omega_1^{(1)}(1),\ \Omega_2^{(1)}(1)$ є результатом відокремлюючого перетворення трійки $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ відносно кута $\overline{E_1}$.

$$\times\left[2^4 r\big((\Omega_1^{(1)}(1),1\big)r\big((\Omega_1^{(1)}(3),1\big)r\big((\Omega_2^{(1)}(1),-1\big)r\big((\Omega_2^{(1)}(3),-1\big)\right]^{\frac{1}{8}}\times$$

$$\times\left[2^{-4}r^2\big((\Omega_0^{(2)}(1),0\big)r^2\big((\Omega_0^{(2)}(3),0\big)\right]^{\frac{1}{4}}\times$$

$$\times\left[2^4 r\big((\Omega_1^{(2)}(1),1\big)r\big((\Omega_1^{(2)}(3),1\big)r\big((\Omega_2^{(2)}(1),-1\big)r\big((\Omega_2^{(2)}(3),-1\big)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Враховуючи, що при кожному $s=1,2$ і $k=1,3$ кожна трійка областей $\Omega_0^{(s)}(k)$, $\Omega_1^{(s)}(k)$, $\Omega_2^{(s)}(k)$ є трійкою попарно неперетинних областей, попередню нерівність можна записати у вигляді

$$I_2(\gamma)\le Q\alpha_1\alpha_2 2^{-t^2}\left[r^{4t^2}\big(\Omega_0^{(1)}(1),0\big)r\big((\Omega_1^{(1)}(1),1\big)r\big((\Omega_2^{(1)}(1),-1\big)\right]^{\frac{1}{8}}\times$$

$$\times\left[r^{4t^2}\big((\Omega_0^{(1)}(3),0\big)r\big((\Omega_1^{(1)}(3),1\big)r\big((\Omega_2^{(1)}(3),-1\big)\right]^{\frac{1}{8}}\times$$

$$\times\left[r^4\big((\Omega_0^{(2)}(1),0\big)r\big((\Omega_1^{(2)}(1),1\big)r\big((\Omega_2^{(2)}(1),-1\big)\right]^{\frac{1}{8}}\times$$

$$\times\left[r^4\big((\Omega_0^{(2)}(3),0\big)r\big((\Omega_1^{(2)}(3),1\big)r\big((\Omega_2^{(2)}(3),-1\big)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Таким чином, ми отримали оцінку $I_2(\gamma)$ через величини Q, α_1, α_2 і добуток значень функціоналів $I_2(4t^2)$, $I_2(4)$, яких вони набувають на означених трійках областей $\Omega_0^{(s)}(k)$, $\Omega_1^{(s)}(k)$, $\Omega_2^{(s)}(k)$, $s=1,2$, $k=1,3$. З іншого боку, для функціонала $I_2(\sigma^2)$, де $0<\sigma\le 2$, виконується нерівність (див. [14])

$$I_2(\sigma^2)=r^{\sigma^2}(D_0,0)r(D_1,-1)r(D_2,1)\le$$

$$\le 2^{\sigma^2+6}\sigma^{\sigma^2}(2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2},\quad 0<\sigma\le 2, \tag{15}$$

знак рівності в якій досягається тоді, коли довільні попарно неперетинні області $D_0,\ D_1,\ D_2$ $\big(0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}},\ 1 \in D_1 \subset \overline{\mathbb{C}},\ -1 \in D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}\big)$ є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\sigma^2)w^2+\sigma^2}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2.$$

Враховуючи (15), отримуємо

$$\Big(r\big(\Omega_0^{(1)}(1),0\big)\Big)^{4t^2} r\big((\Omega_1^{(1)}(1),1\big)r\big((\Omega_2^{(1)}(1),-1\big) \leq$$
$$\leq 2^{\sigma^2+6}\sigma^{\sigma^2}(2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2}, \quad 0<\sigma\leq 2,$$

де $\sigma = 2t$. Звідси маємо

$$2^{\sigma^2+6}\sigma^{\sigma^2}(2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2} =$$
$$= 2^{4t^2+6}2t^{4t^2}(2-2t)^{-(2-2t)^2/2}(2+2t)^{-(2+2t)^2/2} =$$
$$= 2^{2+4t^2}t^{4t^2}(1-t)^{-2(1-t)^2}(1+t)^{-2(1+t)^2}.$$

Тому

$$\left[\Big(r\big(\Omega_0^{(1)}(k),0\big)\Big)^{4t^2} r\big(\Omega_1^{(1)}(k),1\big)r\left(\Omega_2^{(1)}(k),-1\right)\right]^{\frac{1}{8}} \leq$$
$$\leq \left[2^{2+4t^2}t^{4t^2}(1-t)^{-2(1-t)^2}(1+t)^{-2(1+t)^2}\right]^{\frac{1}{8}}, \quad k=1,3. \tag{16}$$

Із (16) при $t=1$ одержуємо

$$\left[\Big(r\big(\Omega_0^{(2)}(k),0\big)\Big)^{4} r\big(\Omega_1^{(2)}(k),1\big)r\left(\Omega_2^{(2)}(k),-1\right)\right]^{\frac{1}{8}} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{8}}, \quad k=1,3.$$

Отже,

$$I_2(\gamma) \leq Q\alpha_2^2\cdot t\cdot 2^{-t^2}\left[2^{-2}\cdot 2^{2+4t^2}t^{4t^2}(1-t)^{-2(1-t)^2}(1+t)^{-2(1+t)^2}\right]^{\frac{1}{4}} =$$
$$= \left[2I_2^{(0)}(\gamma)\right]^{-\frac{1}{2-\gamma}\left(\gamma-\frac{(t+1)^2}{2}\right)}\frac{4}{(t+1)^2}t^{1+t^2}(1-t)^{-\frac{1}{2}(1-t)^2}(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+t)^2},$$

де $I_2^{(0)}(\gamma)$ визначено формулою (6).

Оскільки $\alpha_2 = \alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, то $t \in \big(0;\sqrt{2\gamma}-1\big)$. Тоді при умові, що $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ та $I_2(\gamma) \geq I_2^{(0)}(\gamma)$, отримуємо нерівність

$$I_2(\gamma) \leq y(\gamma,t),$$

де

$$y(\gamma,t) = k(\gamma,t)s(t), \tag{17}$$

$$k(\gamma,t)=\left[2\left(\frac{4\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}\right)\right]^{-\frac{1}{2-\gamma}\left(\gamma-\frac{(t+1)^2}{2}\right)},$$

$$s(t)=\frac{4}{(t+1)^2}t^{1+t^2}(1-t)^{-\frac{1}{2}(1-t)^2}(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+t)^2},$$

$$\gamma\in(1;1{,}1],\quad t\in\big(0;\sqrt{2\gamma}-1\big).$$

Розглянемо функцію $s(t),\ t\in\big(0;\sqrt{2\gamma}-1\big)$. Неважко показати, що

$$\big(\ln s(t)\big)'=\frac{1-t}{1+t}+2t\ln t+(1-t)\ln(1-t)-(1+t)\ln(1+t),$$

$$\big(\ln s(t)\big)''=-\frac{2}{(1+t)^2}+\ln\frac{t^2}{1-t^2}.$$

Звідси випливає, що $\big(\ln s(t)\big)'$ монотонно спадає на всьому проміжку (див. рис. 7). У точці $\tilde t\approx 0{,}345157$ $\big(\ln s(t)\big)'=0$, отже, функція $s(t)$ зростає від точки 0 до точки $\tilde t\approx 0{,}345157$ і спадає на проміжку від точки $\tilde t\approx 0{,}345157$ до точки $\sqrt{2\gamma}-1\approx 0{,}4832$, $\max s(\tilde t\,)\approx 0{,}562873$ (див. табл. 1 і рис. 8).

Таблиця 1

t	$s(t)$	t	$s(t)$	t	$s(t)$	t	$s(t)$
0	0	0,13	0,383595149	0,26	0,540598285	0,38	0,55990664
0,01	0,03918791	0,14	0,402613316	0,27	0,545843126	0,39	0,558053532
0,02	0,076727224	0,15	0,420318581	0,28	0,550311113	0,4	0,555802902
0,03	0,112602994	0,16	0,436753506	0,29	0,554039087	0,41	0,553180086
0,04	0,146816338	0,17	0,451960938	0,3	0,557062985	0,42	0,550209482
0,05	0,179378523	0,18	0,465983823	0,31	0,559417813	0,43	0,546914563
0,06	0,210308165	0,19	0,478865047	0,32	0,561137633	0,44	0,543317892
0,07	0,239629489	0,2	0,490647287	0,33	0,562255541	0,45	0,539441141
0,08	0,267371123	0,21	0,501372896	0,34	0,562803666	0,46	0,535305105
0,09	0,293565198	0,22	0,511083787	0,345157	0,562873896	0,47	0,53092972
0,1	0,318246642	0,23	0,519821347	0,35	0,562813156	0,48	0,526334086
0,11	0,34145261	0,24	0,527626346	0,36	0,562314184	0,49	0,521536484
0,12	0,363222018	0,25	0,534538877	0,37	0,56133594	0,5	0,516554396

Покажемо, що для кожного фіксованого $\gamma\in(1;1{,}1]$ і $t\in\big(0;\sqrt{2\gamma}-1\big)$ $k(\gamma,t)<1$, $k\big(\gamma,\sqrt{2\gamma}-1\big)=1$.

Для зручності у формулі (17) виконаємо заміну змінної, а саме, покладемо $\dfrac{\gamma}{2}=x$, $x\in$ $\in\left(\dfrac{10}{20};\dfrac{11}{20}\right]$. Тоді

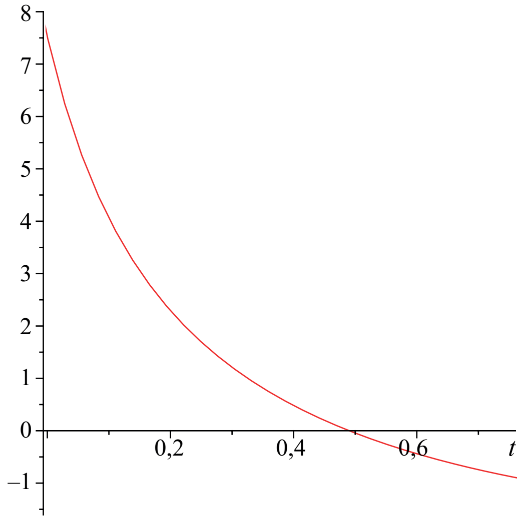

Рис. 7. Графік функції $\big(\ln s(t)\big)'$.

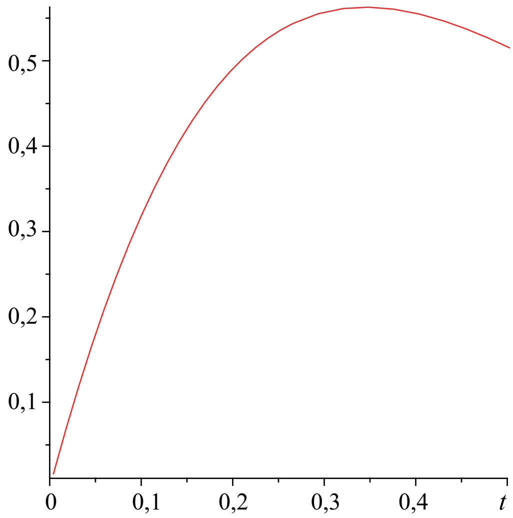

Рис. 8. Графік функції $s(t)$.

$$y_1(x,t) = k_1(x,t)s(t) = \left[8\frac{x^x}{(1-x)^{1+x}}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}\right]^{-\frac{x-\frac{1}{4}(t+1)^2}{1-x}} \times$$

$$\times\frac{4}{(t+1)^2}t^{1+t^2}(1-t)^{-\frac{1}{2}(1-t)^2}(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+t)^2}. \tag{18}$$

Справджується рівність

$$\big(\ln k_1(x,t)\big)'_t = \frac{1}{2}(t+1)\frac{\ln\left[8\dfrac{x^x}{(1-x)^{1+x}}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}\right]}{1-x}.$$

Позначимо

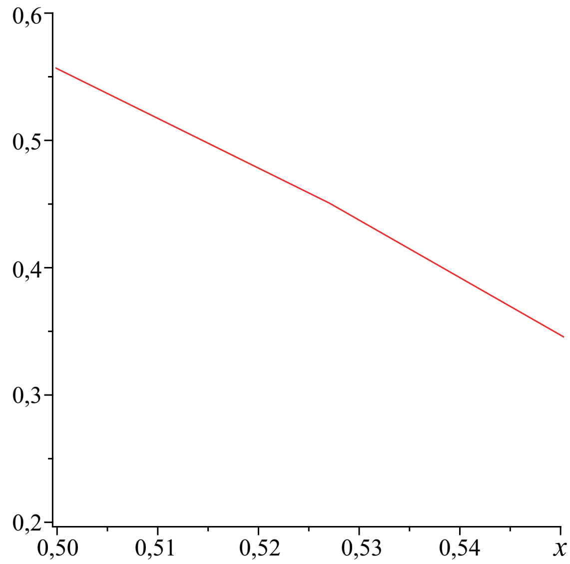

Рис. 9. Графік функції $\Psi(x)$.

$$Y_1(x) = \ln\left[8\frac{x^x}{(1-x)^{1+x}}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}\right].$$

Досліджуючи функцію $\Psi(x) = \dfrac{Y_1(x)}{1-x}$, бачимо, що вона завжди додатна і спадає на проміжку $x \in (0{,}5; 0{,}55]$ (див. рис. 9). З цього випливає, що для кожного фіксованого γ $k(\gamma, t) < 1$ при $t \in \big(0; \sqrt{2\gamma} - 1\big)$.

Розглянемо величину

$$I_2^{(0)}(\gamma) := I_2^{(0)}(2x) = 4\frac{x^x}{(1-x)^{1+x}}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}.$$

Справедливими є такі рівності:

$$\ln I_2^{(0)}(2x) = \ln 4 + x\ln x - (1+x)\ln(1-x) + 2\sqrt{x}\ln\big(1-\sqrt{x}\big) - 2\sqrt{x}\ln\big(1+\sqrt{x}\,\big),$$

$$\big(\ln I_2^{(0)}(2x)\big)' = \ln\frac{x}{1-x} + \ln\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} < 0.$$

Отже, величина $I_2^{(0)}(\gamma)$ монотонно спадає по γ.

На основі наведених вище міркувань $y(\gamma, t) < \max s(t) < 0{,}562873 < I_2^{(0)}(\gamma)$ (див. табл. 2).

Таким чином, ми отримали, що

$$I_2(\gamma) < y(\gamma, t) < I_2^{(0)}(\gamma).$$

Отже, припущення, що $I_2(\gamma) \geq I_2^{(0)}(\gamma)$, було хибним і ми отримали суперечність, яка і доводить дану теорему у випадку, коли $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geq 2$. Отже, у випадку $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geq 2$ екстремальних конфігурацій немає.

Таблиця 2

γ	$\max_t y$	$I_2^{(0)}(\gamma)$
1	0,5527960980	0,6613583736
1,01	0,5514734608	0,6531863388
1,02	0,5502797388	0,6451552085
1,03	0,5492168992	0,6372620032
1,04	0,5482871148	0,6295038046
1,05	0,5474927736	0,6218777824
1,06	0,5468364892	0,6143811812
1,07	0,5463211184	0,6070113078
1,08	0,5459497752	0,5997655432
1,09	0,5457258444	0,5926413374
1,1	0,5456530068	0,5856362013

Випадок 2. Тепер нехай $\alpha_0\sqrt{2\gamma} < 2$. В цьому випадку в роботі [34] при $n = 2$, $\alpha_0\sqrt{2\gamma} < 2$, $\gamma \in (1; 1{,}49]$ було доведено нерівність (2) для довільного набору трьох різних точок таких, що $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = 1$, і довільного набору трьох взаємно неперетинних областей B_0, B_1 і B_2 таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, причому області B_1 і B_2 симетричні відносно одиничного кола.

Знак рівності у (2) досягається, коли точки 0, a_1, a_2 і області B_0, B_1, B_2 є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (3).

Таким чином, із цього твердження випливає твердження теореми 1 для $\gamma \in (1; 1{,}1]$.

Теорему 1 доведено.

Для того щоб геометрично проілюструвати отриманий результат, наведемо структуру кругових областей квадратичного диференціала (3) у випадку $\gamma = 1{,}1$, яка визначає екстремальну конфігурацію в теоремі 1. Простими нулями квадратичного диференціала (3) є $w_1 = |w_1|i$, $w_2 = \dfrac{1}{\overline{w_1}}$, $w_3 = \overline{w_1}$, $w_4 = \dfrac{1}{\overline{w_3}}$, де $|w_1| \approx 0{,}443814$. На рис. 10 зображено кругові області B_0, B_1, B_2 $(0 \in B_0,\ 1 \in B_1, -1 \in B_2)$, які реалізують максимальне значення функціонала $I_2(\gamma)$ при $\gamma = 1{,}1$. Межа області B_0 складається з двох симетричних відносно уявної осі траєкторій l_1, l_2 і точок w_1, w_3. Межа області B_1 складається з двох відрізків уявної осі w_1w_2, w_3w_4 і двох симетричних відносно одиничного кола траєкторій l_1, L_1 та точок w_1, w_2, w_3, w_4. В свою чергу межа області B_2 складається з двох відрізків уявної осі w_1w_2, w_3w_4 і двох симетричних відносно одиничного кола траєкторій l_2, L_2 та точок w_1, w_2, w_3, w_4. Відрізки w_1w_2, w_3w_4 і дуги l_1, l_2, L_1, L_2 — це критичні траєкторії квадратичного диференціала (3), які визначають кругові області B_0, B_1, B_2.

Доведення теореми 2. Як і при доведенні теореми 1, розглянемо два випадки.

Випадок 1. Нехай $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geq 2$, $\alpha_0 = \max_k \alpha_k$, $k = \overline{1,3}$. Для визначеності зафіксуємо $\alpha_0 = \alpha_3$.

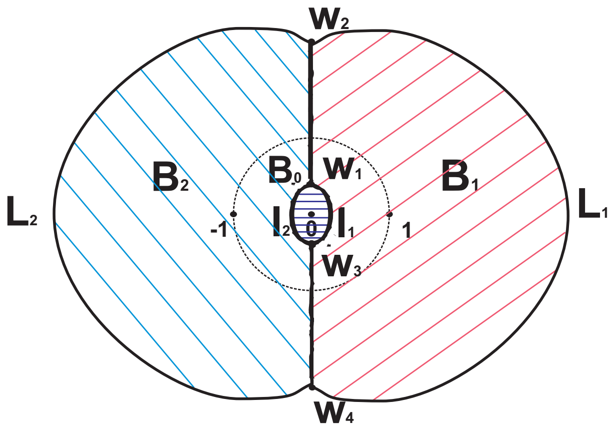

Рис. 10. Схематичне зображення кругових областей квадратичного диференціала (3) при $\gamma = 1{,}1$.

В цьому випадку вивчаємо ті системи областей $B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3$ і точок $0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$, при яких $I_3(\gamma) \geq I_3^{(0)}(\gamma)$, де величина $I_3^{(0)}(\gamma)$ обчислена у роботах [33, 35], а саме

$$I_3^{(0)}(\gamma) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}, \tag{19}$$

причому екстремальна конфігурація, для якої реалізується це значення, складається з полюсів і кругових областей квадратичного диференціала (5).

Використовуючи результат роботи [29], отримуємо нерівність

$$I_3(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) r(B_3, a_3) \leq 3^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{3} r(B_k, a_k)\right)^{1-\frac{\gamma}{3}}. \tag{20}$$

Далі використаємо відому нерівність Г. М. Голузіна (див. [2]), а саме

$$\prod_{k=1}^{3} r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right) |a_1 - a_2||a_2 - a_3||a_1 - a_3|. \tag{21}$$

Оскільки точки $a_1,\ a_2,\ a_3$ розміщені на одиничному колі і $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, маємо

$$|a_1 - a_2| = 2|a_1||a_2| \sin\left[\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\pi\right] = 2\sin\left[\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\pi\right],$$
$$|a_2 - a_3| = 2|a_2||a_3| \sin\left[\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)\pi\right] = 2\sin\left[\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)\pi\right],$$

а оскільки $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ та $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, то $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 2\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)$. Використовуючи логарифмічну випуклість функції $\sin x$ на проміжку $x \in [0, \pi]$, отримуємо співвідношення

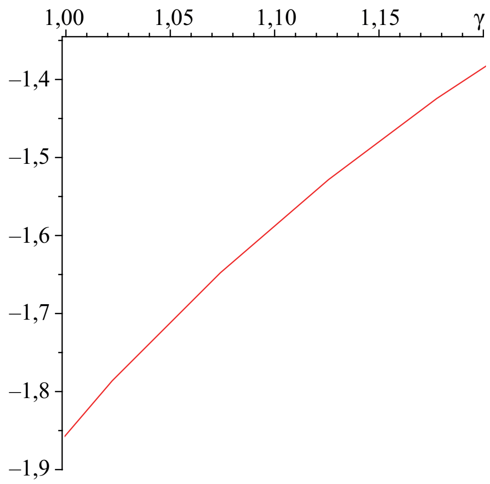

Рис. 11. Графік функції $\ln\left(\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]\times\right.$
$\left.\times\sin^2\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

$$\frac{1}{2}\ln\sin\left[\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\pi\right]+\frac{1}{2}\ln\sin\left[\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)\pi\right]\leq\ln\sin\left[\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\pi\right].$$

Очевидно, що рівність в цій нерівності буде досягатися, коли $\alpha_1=\alpha_2$.

Враховуючи попередні міркування, приходимо до співвідношення

$$|a_1-a_2||a_2-a_3||a_1-a_3|\leq 2\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]\cdot 4\sin^2\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]. \qquad (22)$$

З урахуванням (20) – (22) остаточно маємо

$$I_3(\gamma)\leq 3^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{64\cdot 8}{81\sqrt{3}}\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]\sin^2\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right)^{(1-\frac{\gamma}{3})}. \qquad (23)$$

Нехай $\gamma=1{,}2$. Тоді з оцінки (23) випливає, що $I_3(1{,}2)\leq 0{,}463186$, а з (19) — що $I_3^{(0)}(1{,}2)\approx$ $\approx 0{,}467745$, отже, виконується нерівність

$$I_3(1{,}2)<I_3^{(0)}(1{,}2).$$

Тепер доведемо нерівність $I_3(\gamma)<I_3^{(0)}(\gamma)$ для $\gamma\in(1;1{,}2)$. Позначимо праву частину виразу (23) через $\mu(\gamma)$ і дослідимо її на монотонність (див. рис. 11 – 13). Виконуються співвідношення

$$\ln\mu(\gamma)=-\frac{\gamma}{2}\ln 3+\left(1-\frac{\gamma}{3}\right)\left[\ln\frac{64\cdot 8}{81\sqrt{3}}+\ln\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]+2\ln\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right],$$

$$\big(\ln\mu(\gamma)\big)'_\gamma=-\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{64\cdot 8}{81\sqrt{3}}\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]\sin^2\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right)+$$

$$+\left(1-\frac{\gamma}{3}\right)\frac{\pi}{2\gamma\sqrt{2\gamma}}\left[\cot\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]+\cot\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right]=$$

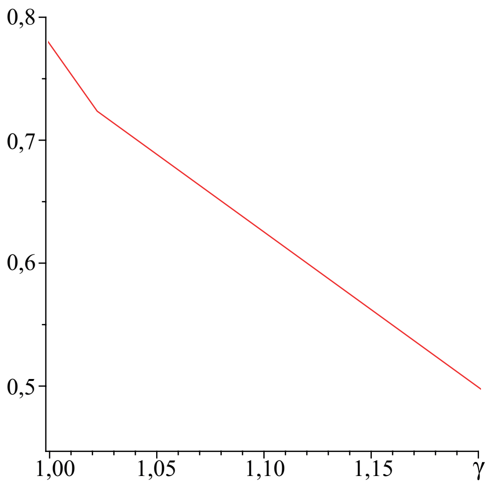

Рис. 12. Графік функції $\cot\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]$.

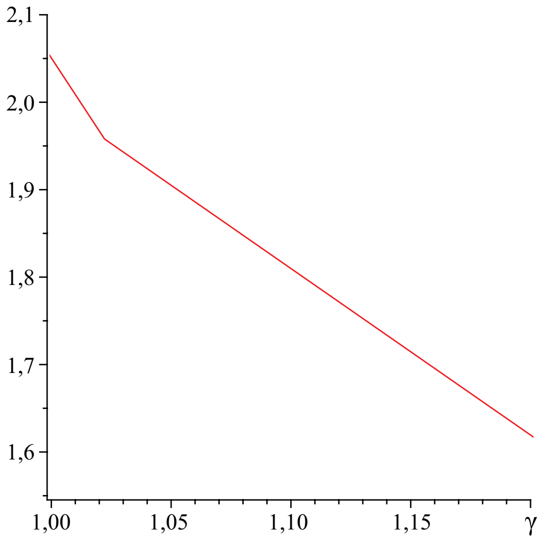

Рис. 13. Графік функції $\cot\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]$.

$$= -\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{64\cdot 8}{81\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]\sin^2\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right) +$$

$$+\left(1-\frac{\gamma}{3}\right)\frac{\pi}{2\gamma\sqrt{2\gamma}}\left[\cot\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right] + \cot\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right] >$$

$$> -0{,}9808 + \frac{1}{3}1{,}4 + \left(1-\frac{1,2}{3}\right)\frac{\pi}{2\cdot 1{,}2\sqrt{2\cdot 1{,}2}}(0{,}5+1{,}6) >$$

$$> -0{,}9808 + 0{,}4666 + 1{,}0641 > 0{,}5499 > 0.$$

Отже,

$$I_3^{(0)}(1{,}2) < I_3^{(0)}(\gamma), \qquad I_3^{(0)}(1{,}2) > I_3(1{,}2), \qquad I_3(1{,}2) > I_3(\gamma).$$

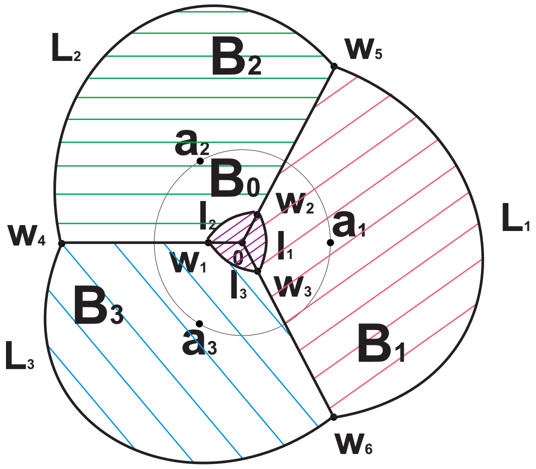

Рис. 14. Схематичне зображення кругових областей квадратичного диференціала (5) при $\gamma = 1{,}2$.

Підсумовуючи наведене вище, маємо

$$I_3(\gamma) < I_3^{(0)}(\gamma).$$

Очевидно, що величина $I_3(\gamma) > 0$ при всіх $\gamma \in (1; 1{,}2]$, а величина $I_3^{(0)}(\gamma)$ монотонно спадає при цих значеннях параметра γ, отже, $I_3(\gamma) < I_3^{(0)}(\gamma)$.

Випадок 2. Тепер нехай $\alpha_0\sqrt{2\gamma} < 2$. Як і при доведенні теореми 1, твердження теореми 2 випливає з роботи [34]. Справедливою є така лема (див. [34]).

Лема 1. *Нехай* $n = 3$, $\alpha_k \leq \dfrac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, $k = 1, 2, 3$, $\gamma \in [1; 3{,}01]$. *Тоді для довільного набору чотирьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$, *і довільного набору чотирьох взаємно неперетинних областей* B_0, B_1, B_2, B_3 *таких, що* $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, $a_3 \in B_3 \subset \mathbb{C}$, *причому області* B_1, B_2, B_3 *симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) r(B_3, a_3) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{3}{2} + \frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності досягається, коли точки 0, a_1, a_2, a_3 *і області* B_0, B_1, B_2, B_3 *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9 - \gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3 - 1)^2} \, dw^2.$$

Оскільки всі α_k задовольняють умови леми, звідси автоматично випливає справедливість теореми.

Знак рівності в останній нерівності досягається при тих же умовах, що і в теоремі 2.

Теорему 2 доведено.

Для того щоб геометрично проілюструвати отриманий результат, наведемо структуру кругових областей квадратичного диференціала (5) у випадку $\gamma = 1{,}2$, яка визначає екстремальну конфігурацію в теоремі 2. Простими нулями квадратичного диференціала (5) є $w_1 = -\rho$, $w_2 = -\rho e^{(\frac{2\pi}{3}i)}$, $w_3 = -\rho e^{(-\frac{2\pi}{3}i)}$, $w_4 = \dfrac{1}{\overline{w_1}}$, $w_5 = \dfrac{1}{\overline{w_2}}$, $w_6 = \dfrac{1}{\overline{w_3}}$, де $\rho \approx 0{,}426137$. На рис. 14 зображено області B_0, B_1, B_2, B_3 ($0 \in B_0$, $a_1 = 1 \in B_1$, $a_2 = e^{(\frac{2\pi}{3}i)} \in B_2$, $a_3 = e^{(-\frac{2\pi}{3}i)} \in B_3$), які реалізують максимальне значення функціонала $I_3(\gamma)$ при $\gamma = 1,2$. Межа області B_0 складається з трьох траєкторій l_1, l_2, l_3 і точок w_1, w_2, w_3. Межа області B_1 складається з двох відрізків w_2w_5, w_3w_6, двох симетричних відносно одиничного кола траєкторій l_1, L_1 і точок w_2, w_3, w_5, w_6. В свою чергу межа області B_2 складається з двох відрізків w_1w_4, w_2w_5 і двох симетричних відносно одиничного кола траєкторій l_2, L_2 та точок w_1, w_2, w_4, w_5. Межа області B_3 складається з двох уявних відрізків w_1w_4, w_3w_6 і двох симетричних відносно одиничного кола дуг l_3, L_3 та точок w_1, w_3, w_4, w_6. Відрізки w_2w_5, w_3w_6, w_1w_4 і дуги l_1, l_2, l_3, L_1, L_2, L_3 — це критичні траєкторії квадратичного диференціала (5), які визначають кругові області B_0, B_1, B_2, B_3.

Із доведених теорем випливають наведені нижче наслідки. Зокрема, якщо праву частину нерівності (2) записати у термінах кругових областей квадратичного диференціала (3), то справедливим є таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $1 < \gamma \leq 1{,}1$. *Тоді для довільного набору трьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = 1$, *і довільного набору трьох взаємно неперетинних областей* B_0, B_1 *і* B_2 *таких, що* $a_0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, *причому області* B_1 *і* B_2 *симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2) \leq r^{\gamma}\big(B_0^{(0)},0\big)r\big(B_1^{(0)},a_1^{(0)}\big)r\big(B_2^{(0)},a_2^{(0)}\big),$$

де 0, $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ *і* $B_0^{(0)}$, $B_1^{(0)}$, $B_2^{(0)}$ *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (3).

Наступний наслідок має місце для системи точок одиничного кола та додаткової умови $B_0 \subset U$. Варто зазначити, що вперше цю задачу у випадку однозв'язних симетричних областей було розглянуто у роботі [23].

***Наслідок* 2.** *Нехай* $1 < \gamma \leq 1{,}1$. *Тоді для довільного набору трьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = 1$, *і довільного набору трьох взаємно неперетинних областей* B_0, B_1 *і* B_2 *таких, що* $a_0 \in B_0 \subset U$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, *причому області* B_1 *і* B_2 *симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2) \leq 4\frac{\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1-\dfrac{\gamma}{2}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}}\left(\frac{1-\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{2}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності досягається, коли точки 0, a_1, a_2 *і області* B_0, B_1, B_2 *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (3).

Теорему 1 легко поширити на випадок довільного кола радіуса $R > 0$.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $1 < \gamma \leq 1{,}1$. *Тоді для довільного набору трьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = R > 0$, *і довільного набору трьох взаємно неперетинних областей* B_0, B_1 *і* B_2 *таких, що* $a_0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, *причому області* B_1 *і* B_2 *симетричні відносно кола радіуса* $R > 0$, *виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2) \leq 4\frac{\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1-\dfrac{\gamma}{2}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}}\left(\frac{1-\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{2}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} R^{\gamma+2}. \tag{24}$$

Знак рівності у (24) *досягається, коли точки* 0, a_1, a_2 *і області* B_0, B_1, B_2 *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4-\gamma)R^2w^2 + R^4\gamma}{w^2(w^2-R^2)^2}\,dw^2. \tag{25}$$

Наслідок 4 є аналогом теореми 1 для випадку кола радіуса $R > 0$, записаним у термінах кругових областей квадратичного диференціала (25).

***Наслідок* 4.** *Нехай* $1 < \gamma \leq 1{,}1$. *Тоді для довільного набору трьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = R > 0$, *і довільного набору трьох взаємно неперетинних областей* B_0, B_1 *і* B_2 *таких, що* $a_0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, *причому області* B_1 *і* B_2 *симетричні відносно кола радіуса* $R > 0$, *виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2) \leq r^{\gamma}\big(B_0^{(0)},0\big)r\big(B_1^{(0)},a_1^{(0)}\big)r\big(B_2^{(0)},a_2^{(0)}\big),$$

де 0, $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ *і* $B_0^{(0)}$, $B_1^{(0)}$, $B_2^{(0)}$ *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (25).

Наступний наслідок справджується, якщо праву частину нерівності (4) записати у термінах кругових областей квадратичного диференціала (5).

***Наслідок* 5.** *Нехай* $1 < \gamma \leq 1{,}2$. *Тоді для довільного набору чотирьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$, *і довільного набору чотирьох взаємно неперетинних областей* B_0, B_1, B_2 *і* B_3 *таких, що* $a_0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,3}$, *причому області* B_k, $k = \overline{1,3}$, *симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2)r(B_3,a_3) \leq r^{\gamma}\big(B_0^{(0)},0\big)r\big(B_1^{(0)},a_1^{(0)}\big)r\big(B_2^{(0)},a_2^{(0)}\big)r\big(B_3^{(0)},a_3^{(0)}\big),$$

де 0, $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $a_3^{(0)}$ *і* $B_0^{(0)}$, $B_1^{(0)}$, $B_2^{(0)}$, $B_3^{(0)}$ *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (5).

Наступний наслідок випливає з теореми 2 з урахуванням додаткової умови $B_0 \subset U$.

***Наслідок* 6.** *Нехай* $1 < \gamma \leq 1{,}2$. *Тоді для довільного набору чотирьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$, *і довільного набору чотирьох взаємно неперетинних областей* B_0, B_1, B_2 *і* B_3 *таких, що* $a_0 \in B_0 \subset U$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,3}$, *причому області* B_k, $k = \overline{1,3}$, *симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2)r(B_3,a_3) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{n}\frac{\left(\dfrac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1-\dfrac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}}\left(\frac{1-\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{3}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності досягається, коли точки $0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ *і області* $B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3$ *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (5).

Далі, для кола радіуса $R > 0$ маємо таке твердження.

Наслідок 7. *Нехай* $1 < \gamma \leq 1{,}2$. *Тоді для довільного набору чотирьох різних точок таких, що* $a_0 = 0,\ |a_1| = |a_2| = |a_3| = R > 0$, *і довільного набору чотирьох взаємно неперетинних областей* $B_0,\ B_1,\ B_2$ *і* B_3 *таких, що* $a_0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}},\ a_k \in B_k \subset \mathbb{C},\ k = \overline{1,3}$, *причому області* $B_k,\ k = \overline{1,3}$, *симетричні відносно кола радіуса* $R > 0$, *виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2)r(B_3,a_3) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{\left(\dfrac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1-\dfrac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1-\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{2\gamma}}{3}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} R^{\gamma+3}. \tag{26}$$

Знак рівності у (26) *досягається, коли точки* $0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ *і області* $B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3$ *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)R^3w^3 + R^6\gamma}{w^2(w^3-R^3)^2}\,dw^2. \tag{27}$$

Якщо наслідок 7 записати у термінах кругових областей квадратичного диференціала (27), то отримаємо таке твердження.

Наслідок 8. *Нехай* $1 < \gamma \leq 1{,}2$. *Тоді для довільного набору чотирьох різних точок таких, що* $a_0 = 0,\ |a_1| = |a_2| = |a_3| = R > 0$, *і довільного набору чотирьох взаємно неперетинних областей* $B_0,\ B_1,\ B_2$ *і* B_3 *таких, що* $a_0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}},\ a_k \in B_k \subset \mathbb{C},\ k = \overline{1,3}$, *причому області* $B_k,\ k = \overline{1,3}$, *симетричні відносно кола радіуса* $R > 0$, *виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2)r(B_3,a_3) \leq r^{\gamma}\big(B_0^{(0)},0\big)r\big(B_1^{(0)},a_1^{(0)}\big)r\big(B_2^{(0)},a_2^{(0)}\big)r\big(B_3^{(0)},a_3^{(0)}\big),$$

де $0,\ a_1^{(0)},\ a_2^{(0)},\ a_3^{(0)}$ *і* $B_0^{(0)},\ B_1^{(0)},\ B_2^{(0)},\ B_3^{(0)}$ *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (27).

Література

1. М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений*, Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, **5**, 159 – 245 (1934).
2. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1966).
3. Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций*, Наука, Москва (1975).
4. В. К. Хейман, *Многолистные функции*, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).
5. Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, Изд-во иностр. лит., Москва (1962).
6. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций. I, II*, Алгебра и анализ, **9**, № 3, 41 – 103; № 5, 1 – 50 (1997).
7. Е. Г. Емельянов, *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **286**, 103 – 114 (2002).
8. Л. И. Колбина, *Конформное отображение единичного круга на неналегающие области*, Вестн. Ленингр. ун-та, **5**, 37 – 43 (1955).
9. П. М. Тамразов, *Теоремы покрытия линий при конформном отображении*, Мат. сб., **66 (108)**, № 4, 502 – 524 (1965).
10. П. М. Тамразов, *Некоторые экстремальные задачи теории однолистных конформных отображений*, Мат. сб., **67 (109)**, № 3, 329 – 337 (1965).
11. П. М. Тамразов, *К общей теореме о коэффициентах*, Мат. сб., **72 (114)**, № 1, 59 – 71 (1967).

12. П. М. Тамразов, *Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов*, Изв. АН СССР, сер. мат., **32**, № 5, 1033 – 1043 (1968).
13. В. Н. Дубинин, *О произведении внутренних радиусов „частично неналегающих" областей*, Вопросы метрической теории отображений и ее применение, Наук. думка, Киев (1978).
14. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении*, Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, **168**, 48 – 66 (1988).
15. В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук, **49 (295)**, № 1, 3 – 76 (1994).
16. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука ДВО РАН, Владивосток (2009).
17. Л. В. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности*, Дальневост. мат. сб., **2**, 96 – 98 (1996).
18. Л. В. Ковалев, *О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей*, Изв. вузов. Математика, **6**, 80 – 81 (2000).
19. Л. В. Ковалев, *О трех непересекающихся областях*, Дальневост. мат. сб., **1**, 3 – 7 (2000).
20. А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе*, Праці Ін-ту математики НАН України (2008).
21. Г. П. Бахтина, *Об экстремизации некоторых функционалов в задаче о неналегающих областях*, Укр. мат. журн., **27**, № 2, 202 – 204 (1975).
22. Г. П. Бахтина, *Метод граничных вариаций в задачах о неналегающих областях*, Киев (1975), 35 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 75.2).
23. Г. П. Бахтина, *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях*: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук, Киев (1975).
24. Г. П. Бахтина, *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей*, Современные вопросы вещественного и комплексного анализа, Ин-т математики АН УССР, Киев, 21 – 27 (1984).
25. А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, *Экстремальные задачи о неналегающих областях и квадратичные дифференциалы*, Доп. НАН України, № 8, 13 – 15 (2005).
26. А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, *Разделяющие преобразования и задачи о неналегающих областях*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 273 – 284 (2006).
27. А. К. Бахтин, *Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей*, Зб. праць Ін-ту математики України, **14**, № 1, 25 – 33 (2017).
28. А. К. Бахтин, И. В. Денега, Л. В. Выговская, *Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей*, Укр. мат. журн., **70**, № 9, 1282 – 1288 (2018).
29. А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей*, Укр. мат. журн., **71**, № 7, 996 – 1002 (2019).
30. А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами*, Укр. мат. вестн., **16**, № 3, 307 – 328 (2019).
31. Я. В. Заболотный, Л. В. Выговская, *О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей*, Укр. мат. вестн., **14**, № 3, 441 – 452 (2017).
32. И. Я. Дворак, *Оценки произведений внутренних радиусов для частично неналегающих областей комплексной плоскости*, Укр. мат. вестн., **15**, № 3, 345 – 357 (2018).
33. A. Bakhtin, L. Vyhivska, *Estimates of inner radii of symmetric non-overlapping domains*, J. Math. Sci., **241**, № 1, 1 – 18 (2019).
34. A. Bakthin, L. Vyhivska, I. Denega, *Inequality for the internal radii of symmetric non-overlapping domains*, Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź, Sér. Rech. Déform., **68**, № 2, 37 – 44 (2018).
35. L. V. Vyhivska, *On the problem of V. N. Dubinin for symmetric multiply connected domains*, J. Math. Sci., **229**, № 1, 108 – 113 (2018).
36. A. L. Targonskii, *Some inequalities for inner radii of pair-wise disjoint domains and open sets*, Mat. Stud., **43**, № 1, 51 – 60 (2015) (in Ukrainian).
37. A. L. Targonskii, *Extremal problems of partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere*, Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., № 9, 31 – 36 (2008) (in Russian).

Одержано 07.07.20