DOI: 10.37863/umzh.v72i10.6231

УДК 517.9

М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

ДВОВИМІРНА ДІЙСНА НАПІВСИЛЬНА ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ ТА ВІДПОВІДНІ БЛОЧНІ МАТРИЦІ. II

We describe the direct and inverse spectral problems related to the block Jacobi type matrices that correspond to the two-dimensional half-strong real moment problem. In particular, we obtain three matrices that have three-diagonal block structure and act in an l_2-like space as commuting self-adjoint operators, and two of them are mutually inverse.

Наведено пряму й обернену спектральні задачі щодо блочних матриць типу Якобі, що відповідають двовимірній дійсній напівсильній проблемі моментів. Зокрема, отримано три матриці, які мають блочну тридіагональну структуру і діють у просторі типу l_2 як комутуючі самоспряжені оператори, два з яких є взаємно оберненими.

Стаття є продовженням роботи [9], присвяченої 95-річчю від дня народження Ю. М. Березанського (08.05.1925 – 07.06.2019). В роботі детально встановлено вигляд блочних матриць типу Якобі, що відповідають дійсній напівсильній проблемі моментів. Нагадаємо, що вигляд матриць анонсовано у [9]. Цей факт за Ю. М. Березанським називається оберненою спектральною задачею. Також на основі отриманих матриць проілюстровано процедуру запису відповідних ортогональних многочленів та відновлення міри, яка породжує задані матриці. Цей факт за Ю. М. Березанським є прямою спектральною задачею.

3. Ортогоналізація і побудова відповідних тридіагональних блочних матриць типу Якобі. Нехай $d\rho(x,y)$ — міра Бореля із компактним носієм на $\mathbb{R}^2$ і $L_2 := L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ — простір інтегровних із квадратом функцій, визначених на $\mathbb{R}^2$. Припустимо, що функції $\mathbb{R}^2 \ni \{x,y\} \longmapsto y^m x^n,\ m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z}$, є лінійно незалежними і утворюють тотальну множину в L_2.

Для того щоб знайти аналог матриці Якобі J, як у класичному випадку (див. [5]), необхідно вибрати порядок ортогоналізації L_2 для сім'ї функцій

$$\{y^m x^n\}, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Пропонується такий порядок ортогоналізації за Шмідтом:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & y^0x^{-2} & y^0x^{-1} & y^0x^0 \longrightarrow & y^0x^1 & y^0x^2 & \cdots \\
\cdots & y^1x^{-2} & y^1x^{-1} & y^1x^0 & y^1x^1 & y^1x^2 & \cdots \\
\cdots & * & y^2x^{-1} & y^2x^0 & y^2x^1 & * & \cdots \\
\cdots & * & * & y^3x^0 & * & * & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Згідно із запропонованим порядком ортогоналізації маємо послідовність

$$1; \quad x, y, x^{-1}; \quad x^2, yx, y^2, y^1x^{-1}, x^{-2}; \quad \ldots;$$
$$x^n, yx^{(n-1)}, \ldots, y^{n-1}x, y^n, y^{n-1}x^{-1} \ldots, yx^{-(n-1)}, x^{-n}; \quad \ldots, \tag{2}$$

де враховано, що $y^0 = x^0 = 1$. Таким чином утворено деякі набори „ламаних ліній” із початком у точці x^n, закінченням у точці x^{-n} і „з кутом” у точці y^n.

Застосовуючи до послідовності (2) процедуру ортогоналізації за Шмідтом (див., наприклад, [3], розділ 7), отримуємо ортонормовану систему поліномів (кожний поліном є сумою доданків вигляду $y^m x^n$, $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{Z}$, із числовими коефіцієнтами), які для зручності позначимо так:

$$\begin{array}{llllll}
P_{0;0}(x,y); & P_{1;0}(x,y), & P_{2;0}(x,y), & \ldots, & P_{n;0}(x,y), & \ldots, \\
 & P_{1;1}(x,y), & P_{2;1}(x,y), & \ldots, & P_{n;1}(x,y), & \ldots, \\
 & P_{1;2}(x,y); & P_{2;2}(x,y), & \ldots, & P_{n;2}(x,y), & \ldots, \\
 & & P_{2;3}(x,y), & \ldots, & P_{n;3}(x,y), & \ldots, \\
 & & P_{2;4}(x,y); & \ldots, & P_{n;4}(x,y), & \ldots, \\
 & & & & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\
 & & & & P_{n;2n}(x,y), & \ldots,
\end{array} \tag{3}$$

де кожний поліном має вигляд

$$P_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha} y^{n-|\alpha-n|} x^{(n-\alpha)} + R_{n;\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 2n, \quad k_{n;\alpha} > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4}$$

$R_{n;\alpha}$ позначає подальшу частину відповідного полінома згідно з порядком (2); $P_{0;0}(x,y) = 1$. Таким чином, $P_{n;\alpha}$ є лінійною комбінацією

$$\{1;\ x, y, x^{-1};\ \ldots;\ x^n, y^1 x^{(n-1)}, \ldots, y^{n-|\alpha-n|} x^{(n-\alpha)}\}. \tag{5}$$

Якщо множина (1) є тотальною у просторі L_2, то послідовність (3) утворює ортонормований базис у цьому просторі.

Позначимо через $\mathcal{P}_{n;\alpha}$ підпростір, утворений з набору (5). Отже,

$$\mathcal{P}_{0;0} \subset \mathcal{P}_{1;0} \subset \mathcal{P}_{1;1} \subset \mathcal{P}_{1;2} \subset \mathcal{P}_{2;0} \subset \mathcal{P}_{2;1} \subset \mathcal{P}_{2;2} \subset \mathcal{P}_{2;3} \subset \mathcal{P}_{2;4} \subset \ldots$$
$$\ldots \subset \mathcal{P}_{n;0} \subset \mathcal{P}_{n;1} \subset \ldots \subset \mathcal{P}_{n;2n} \subset \ldots,$$
$$\mathcal{P}_{n;\alpha} = \{P_{0;0}(x,y)\} \oplus \{P_{1;0}(x,y)\} \oplus \{P_{1;1}(x,y)\} \oplus \{P_{1;2}(x,y)\} \oplus \tag{6}$$
$$\oplus \{P_{2;0}(x,y)\} \oplus \{P_{2;1}(x,y)\} \oplus \{P_{2;2}(x,y)\} \oplus \{P_{2;3}(x,y)\} \oplus \{P_{2;4}(x,y)\} \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus \{P_{n;0}(x,y)\} \oplus \{P_{n;1}(x,y)\} \oplus \ldots \oplus \{P_{n;\alpha}(x,y)\} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

де $\{P_{n;\alpha}(x,y)\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 2n$, позначає одновимірний підпростір, утворений $P_{n;\alpha}(x,y)$, $\mathcal{P}_{0;0} = \mathbb{C}$.

У подальшому замість звичайного l_2 зручно розглядати

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

Кожний вектор $f \in \mathbf{l}_2$ має вигляд $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{H}_n$, тому

$$\|f\|_{\mathbf{l}_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty, \quad (f,g)_{\mathbf{l}_2} = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{\mathcal{H}_n} \quad \forall f, g \in \mathbf{l}_2.$$

Вектор $f_n \in \mathcal{H}_n$ із $n \in \mathbb{N}_0$ координатами у деякому ортонормованому базисі $\{e_{n;0},\ e_{n;1},\ e_{n;2},\ \ldots,\ e_{n;2n}\}$ простору $\mathbb{C}^{n+1}$ позначимо через $(f_{n;0}, f_{n;1}, f_{n;2}, \ldots, f_{n;2n})$ і, отже, $f_n = (f_{n;0}, f_{n;1}, f_{n;2}, \ldots, f_{n;2n})$. Зрозуміло, що простір $\mathbf{l}_2$ є „майже” ізометричним до $l_2 \times l_2$ (під „майже” ізометричним розуміється те, що у просторі $l_2 \times l_2$ є вектор $e_0 \times e_0$, а в $\mathbf{l}_2$ — лише $e_{0,0}$).

Використавши ортонормовану систему (3), визначимо вкладення $\mathbf{l}_2$ у L_2. Для будь-яких $n \in \mathbb{N}_0$ і $\{x, y\} \in \mathbb{R}^2$, $P_n(x,y) = (P_{n;0}, P_{n;1}(x,y), P_{n;2}(x,y), \ldots, P_{n;2n}(x,y)) \in \mathcal{H}_n$, покладемо

$$\mathbf{l_2} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, P_n(x,y))_{\mathcal{H}_n} \in L_2. \tag{8}$$

Оскільки для $n \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$(f_n, P_n(x,y))_{\mathcal{H}_n} = f_{n;0}\overline{P_{n;0}(x,y)} + f_{n;1}\overline{P_{n;1}(x,y)} + f_{n;2}\overline{P_{n;2}(x,y)} + \ldots + f_{n;2n}\overline{P_{n;2n}(x,y)}$$

і

$$\|f\|_{\mathbf{l}_2}^2 = \|(f_{0;0}, f_{1;0}, f_{1;1}, f_{1;2}, \ldots, f_{n;0}, f_{n;1}, \ldots, f_{n;2n}, \ldots)\|_{l_2}^2,$$

то (8) дійсно є вкладенням простору $\mathbf{l}_2$ в L_2. Використовуючи ортонормованість системи (3), переконуємося, що вкладення є ізометрією. Образом $\mathbf{l}_2$ при відображенні (8) є простір L_2, тому що, за припущенням, система (3) є ортонормованою в L_2. Отже, відображення (8) є унітарним перетворенням (позначимо його через I), що діє з $\mathbf{l}_2$ в L_2.

Нехай S — деякий обмежений лінійний оператор, визначений у просторі $\mathbf{l}_2$. Можна побудувати операторну матрицю $(s_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, де для кожного $j, k \in \mathbb{N}_0$ елемент $s_{j,k}$ є оператором з $\mathcal{H}_k$ в $\mathcal{H}_j$, так що для будь-яких $f, g \in \mathbf{l}_2$ маємо

$$(Sf)_j = \sum_{k=0}^{\infty} s_{j,k} f_k,\ j \in \mathbb{N}_0, \quad (Sf, g)_{\mathbf{l}_2} = \sum_{j,k=0}^{\infty} (s_{j,k} f_k, g_j)_{\mathcal{H}_j}. \tag{9}$$

Для обґрунтування (9) необхідно лише записати звичайну матрицю оператора A у просторі $\mathbf{l}_2$, використавши базис

$$(e_{0;0};\ e_{1;0}, e_{1;1}, e_{1;2};\ \ldots;\ e_{n;0}, e_{n;1}, \ldots, e_{n;2n};\ \ldots), \quad e_{0;0} = 1. \tag{10}$$

Тоді $s_{j,k}$ для кожних $j, k \in \mathbb{N}_0$ є оператором $\mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$, що має матричне зображення

$$s_{j,k;\alpha,\beta} = (Se_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{\mathbf{l}_2}, \tag{11}$$

де $\alpha = 0, 1, \ldots, 2j$, $\beta = 0, 1, \ldots, 2k$. Далі будемо писати $s_{j,k} = (a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$, врахувавши випадки $s_{0,0} = (a_{0,0;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{0,0} = a_{0,0;0,0}$, $s_{0,1} = (a_{0,1;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{0,2}$, $s_{1,0} = (a_{1,0;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2,0}$.

Зауважимо, що зображення (9) також виконується для довільного оператора S у просторі $\mathbf{l}_2$, визначеного на $\mathbf{l}_{\text{fin}} \subset \mathbf{l}_2$, де $\mathbf{l}_{\text{fin}}$ позначає множину скінченних векторів з $\mathbf{l}_2$. У цьому випадку перша з формул (9) виконується для $f \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$, а друга — для $f \in \mathbf{l}_{\text{fin}},\ g \in \mathbf{l}_2$.

Нехай $\hat{S} = ISI^{-1} \colon L_2 \longrightarrow L_2$ — образ оператора $S \colon \mathbf{l}_2 \longrightarrow \mathbf{l}_2$, розглянутого при перетворенні (8). Його матриця у базисі (3) залишається тією самою матрицею оператора S, як при розгляді оператора $l_2 \times l_2 \longrightarrow l_2 \times l_2$ у відповідному базисі (10). Використовуючи (11) і попередні міркування, отримуємо операторну матрицю $(s_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $S\colon l_2 \times l_2 \longrightarrow l_2 \times l_2$. Ця матриця також є операторною матрицею $\hat{S} \colon L_2 \longrightarrow L_2$.

Зрозуміло, що $\hat{S}$ може бути довільним лінійним оператором в L_2.

Лема 1. *Для поліномів $P_{n;\alpha}(x,y)$ і підпросторів $\mathcal{P}_{m,\beta}$, $n,m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha = 0,1,\ldots,2n$, $\beta = 0,1,\ldots,2m$, виконуються включення*

$$yP_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha+1}, \quad \alpha = 0,1,\ldots,2n, \tag{12}$$

$$xP_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha}, \quad \alpha = 0,1,\ldots,n, \tag{13}$$

$$xP_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;n}, \quad \alpha = n+1,n+2,\ldots,2n, \tag{14}$$

$$x^{-1}P_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha+2}, \quad \alpha = n,n+1,\ldots,2n, \tag{15}$$

$$x^{-1}P_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n;2n}, \quad \alpha = 0,1,\ldots,n-1. \tag{16}$$

Доведення. Згідно з (3) поліном $P_{n;\alpha}(x,y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, є лінійною комбінацією (5), тобто

$$\{1;\ x,y,x^{-1};\ \ldots;\ x^n, yx^{(n-1)},\ldots,y^{n-|\alpha-n|}x^{(n-\alpha)}\}.$$

Помноживши на „y” кожний елемент із (5), отримаємо

$$\{y;\ yx,y^2,yx^{-1};\ \ldots;\ yx^n, y^2x^{(n-1)},\ldots,y^{n-|\alpha-n|+1}x^{(n-\alpha)}\}.$$

Лінійна комбінація цих елементів належить до $\mathcal{P}_{n+1;\alpha+1}$ при $\alpha = 0,1,\ldots,2n$, оскільки для останнього елемента (згідно з порядком (2)) маємо

$$y^{n-|\alpha-n|+1}x^{(n-\alpha)} = y^{(n+1)-|(\alpha+1)-(n+1)|}x^{((n+1)-(\alpha+1))}.$$

Отже, (12) доведено.

Множення на „x” кожного елемента (5) дає

$$\{x;\ x^2,yx,1;\ \ldots;\ x^{(n+1)}, yx^{(n)},\ldots,y^{n-|\alpha-n|}x^{(n-\alpha+1)}\}. \tag{17}$$

Лінійна комбінація цих елементів належить до $\mathcal{P}_{n+1;\alpha}$ при $\alpha = 0,1,\ldots,n$, оскільки для останнього елемента (згідно з порядком (2)) маємо

$$y^{n-|\alpha-n|}x^{(n-\alpha+1)} = y^{(n+1)-|n-\alpha|-1}x^{((n+1)-\alpha)} = y^{(n+1)-|\alpha-(n+1)|}x^{((n+1)-\alpha)}.$$

Остання рівність виконується, оскільки $\alpha \le n$. Отже, (13) доведено.

Лінійна комбінація елементів (17) належить до $\mathcal{P}_{n+1;n}$, якщо $\alpha = n+1,\ldots,2n$, оскільки для останнього елемента (згідно з порядком (2)) маємо

$$y^{n-|\alpha-n|}x^{(n-\alpha+1)} = y^{(n+1)-|\alpha-(n+1)|}x^{((n+1)-\alpha)}.$$

Оскільки $P_{n;\alpha}(x,y)$ при $\alpha = n+1, n+2, \ldots, 2n$ містить елемент y^n, то $y^n x$ міститься в $xP_{n;\alpha}(x,y)$ і $y^n x \in \mathcal{P}_{n+1;n}$. Отже, (14) доведено.

Аналогічно, множення на „x^{-1}" кожного елемента з (5) дає множину

$$\{x^{-1};\ 1, yx^{-1}, x^{-2};\ \ldots;\ x^{(n-1)}, yx^{(n-2)}, \ldots, y^{n-|\alpha-n|}x^{(n-\alpha-1)}\}. \tag{18}$$

Лінійна комбінація цих елементів належить до $\mathcal{P}_{n+1;\alpha+2}$, якщо $\alpha = n, n+1, \ldots, 2n$, оскільки для останнього елемента (згідно з порядком (2)) маємо

$$y^{n-|\alpha-n|}x^{(n-\alpha-1)} = y^{(n+1)-|\alpha-n|-1}x^{(n-\alpha-1)} = y^{(n+1)-|(\alpha+1)-(n+1)|-1}x^{((n+1)-(\alpha+2))} =$$

$$= y^{(n+1)-|(\alpha+2)-(n+1)|}x^{((n+1)-(\alpha+2))}.$$

Отже, (15) доведено.

Лінійна комбінація елементів з (18) завжди належить до $\mathcal{P}_{n;2n}$, якщо $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$, оскільки $x^{-(n-1)}$ міститься в $P_{n;\alpha}(x,y)$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$. Отже, $x^{-1}P_{n;\alpha}(x,y)$ при $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$ містить x^{-n}. Таким чином, (16) доведено.

Лему 1 доведено.

Перейдемо до розгляду операторів множення на „y", „x" та „x^{-1}", тобто B, A та A^{-1}. В якості оператора $\hat{S}$ із (9) візьмемо оператор $\hat{B}$.

Лема 2. *Нехай $\hat{B}$ — самоспряжений оператор множення на „y" у просторі L_2:*

$$L_2 \ni \varphi(x,y) \longmapsto (\hat{B}\varphi)(x,y) = y\varphi(x,y) \in L_2.$$

Операторна матриця $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{B}$ (тобто $B = I^{-1}\hat{B}I$) має тридіагональну структуру: $b_{j,k} = 0$ при $|j-k| > 1$.

Доведення. Використовуючи (11) при $e_{n;\gamma} = I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y)$, $\gamma = 0, 1, \ldots, 2n$, $n \in \mathbb{N}_0$, маємо

$$b_{j,k;\alpha,\beta} = (Be_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{l_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} yP_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y) \quad \forall j,k \in \mathbb{N}_0, \tag{19}$$

де $\alpha = 0, 1, \ldots, 2j$, $\beta = 0, 1, \ldots, 2k$. З (12) випливає, що $yP_{k;\alpha}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{k+1;\alpha+1}$, якщо $\alpha = 0, 1, \ldots, 2j$. Згідно з (6) інтеграл у (19) дорівнює нулю при $j > k+1$.

З іншого боку, інтеграл у (19) має вигляд

$$b_{j,k;\alpha,\beta} = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} \bar{y}P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{k;\beta}(x,y)}\,d\rho(x,y)}. \tag{20}$$

З (12) також випливає, що $\bar{y}P_{j;\alpha}(x,y) = yP_{j;\alpha}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$. Згідно з (6) останній інтеграл дорівнює нулю при $k > j+1$ і для кожного $\alpha = 0, 1, \ldots, 2j$, $\beta = 0, 1, \ldots, 2k$.

Отже, інтеграл у (20), тобто коефіцієнти $a_{j,k;\alpha,\beta}$, $j,k \in \mathbb{N}_0$, дорівнюють нулю при $|j-k| > 1$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 2j$, $\beta = 0, 1, \ldots, 2k$. У попередньому розгляді слід враховувати, що $e_{0;0} = I^{-1}P_{0;0}(x,y)$, $P_{0;0}(x,y) = 1$.

Лему 2 доведено.

Таким чином, матриця $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{B}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Позначимо через $((b^*)_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ операторну матрицю оператора $(\hat{B})^*$, спряженого з $\hat{B}$. Зауважимо, що $(\hat{B})^* = \hat{B}$ і також є оператором множення на „y”, тому що $y = \bar{y}$. Враховуючи вираз (19) для $j, k \in \mathbb{N}_0$, маємо

$$(b^*)_{j,k;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \bar{y} P_{k;\beta}(x,y) \overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y) =$$

$$= \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} y P_{j;\alpha}(x,y) \overline{P_{k;\beta}(x,y)}\, d\rho(x,y)} = \bar{b}_{k,j;\beta,\alpha} = b_{k,j;\beta,\alpha},$$

де $\alpha = 0, 1, \ldots, 2j$, $\beta = 0, 1, \ldots, 2k$. Оскільки $\bar{y} = y$, то матриця (21) є ермітовою ($b_{j,k;\alpha,\beta} = \bar{b}_{k,j;\beta,\alpha}$).

Більш детальний аналіз виразу (19) дає можливість дізнатися про обов'язково нульові і ненульові елементи матриць $(b_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2j,2k}$ у кожному випадку при $|j-k| \leq 1$. Для цього використовується переставна властивість індексів j, k та α, β.

Лема 3. *Нехай $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ — операторна матриця оператора множення на „y” в L_2, де $b_{j,k} : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$; $b_{j,k} = (b_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2j,2k}$ є матрицями оператора $b_{j,k}$ у відповідному ортонормованому базисі. Тоді*

$$\begin{gathered} b_{j,j+1;\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 2j, \quad \beta = \alpha+2, \alpha+3, \ldots, 2j+2, \\ b_{j+1,j;\alpha,\beta} = 0, \quad \beta = 0, 1, \ldots, 2j, \quad \alpha = \beta+2, \beta+3, \ldots, 2j+2, \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{gathered} \tag{22}$$

Доведення. Згідно з (19) і (12) для будь-яких $\alpha = 0, 1, \ldots, 2j$ і $\beta = \alpha+2, \alpha+3, \ldots, 2j+2$, $j \in \mathbb{N}_0$, маємо

$$b_{j,j+1;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y P_{j+1,\beta}(x,y) \overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y) = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} y P_{j,\alpha}(x,y) \overline{P_{j+1;\beta}(x,y)}\, d\rho(x,y)},$$

де $yP_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$. Але, згідно з (6), $P_{j+1;\beta}(x,y)$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$ при $\beta > \alpha + 1$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Це дає першу рівність у (22).

Аналогічно, з (19) і (12) для будь-яких $\beta = 0, 1, \ldots, 2j$ і $\alpha = \beta+2, \beta+3, \ldots, 2j+2$ маємо

$$b_{j+1,j;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y P_{j,\beta}(x,y) \overline{P_{j+1;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y), \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

де $yP_{j;\beta}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\beta+1}$. Але, згідно з (6), $P_{j+1;\alpha}(x,y)$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\beta+1}$ при $\alpha > \beta + 1$ і, отже, останній інтеграл також дорівнює нулю. Це дає другу рівність в (22), яка, зокрема, випливає із симетричності матриці.

Лему 3 доведено.

Попередні дослідження показують, що в (21) для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ верхній правий кут кожної $((2j+1)\times(2j+3))$-матриці $b_{j,j+1}$, $j \in \mathbb{N}_0$ (починаючи із третьої діагоналі) і нижній лівий кут кожної $((2j+3)\times(2j+1))$-матриці $b_{j+1,j}$ (починаючи з третьої діагоналі) завжди мають нульові елементи. Враховуючи (21), можна говорити, що ермітова матриця оператора множення на „y" є багатодіагональною, як звичайна скалярна матриця у звичайному базисі l_2.

Лема 4. *Елементи*

$$b_{j,j+1;\alpha,\alpha+1},\ b_{j+1,j;\alpha+1,\alpha}, \quad \alpha = 0,1,\ldots,2j, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

матриці $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *з леми* 3 *є додатними.*

Доведення. Почнемо з $b_{0,1;0,1}$. Позначимо через $P'_{1;1}(x,y)$ ненормований вектор $P_{1;1}(x,y)$, отриманий при ортогоналізації за Шмідтом вектора y. Згідно з (2) і (3) маємо

$$P'_{1;1}(x,y) = y - (y, P_{1;0}(x,y))_{L^2} P_{1;0}(x,y) - (y,1)_{L_2},$$

де $1 = P_{0;0}(x,y)$. Отже, використовуючи (19), отримуємо

$$b_{0,1;0,1} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y P_{1;1}(x,y)\, d\rho(x,y) = \|P'_{1;1}(x,y)\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} y P'_{1;1}(x,y)\, d\rho(x,y) =$$

$$= \|P'_{1;1}(x,y)\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} y(y - (y, P_{1;0}(x,y))_{L_2} P_{1;0}(x,y) - (y,1)_{L_2})\, d\rho(x,y) =$$

$$= \|P'_{1;1}(x,y)\|_{L_2}^{-1} (\|y\|_{L_2}^2 - |(y, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 - |(y,1)_{L_2}|^2). \tag{23}$$

Останній вираз є додатним (див. (24)) і, отже, $b_{0,1;0,1} > 0$, оскільки (1) є тотальною множиною лінійно незалежних векторів у L_2. Елемент $b_{1,0;1,0}$ також додатний, оскільки матриця є ермітовою.

Додатність (23) випливає з рівності Парсеваля при розкладі функції $y \in L_2$ за ортонормованим базисом (3) простору L_2:

$$|(y,1)_{L_2}|^2 + |(y, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 + |(y, P_{1;1}(x,y))_{L_2}|^2 + \ldots = \|y\|_{L_2}^2. \tag{24}$$

Покажемо додатність $b_{j,j+1;\alpha,\alpha+1}$ при $\alpha = 0,1,\ldots,2j$, $j \in \mathbb{N}$. З (19) маємо

$$b_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y P_{j+1;\alpha+1}(x,y) \overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y). \tag{25}$$

Згідно з (4) і (6)

$$P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} y^{j-|\alpha-j|} x^{(j-\alpha)} + R_{j;\alpha}(x,y), \tag{26}$$

де $R_{j;\alpha}(x,y)$ — поліном з $\mathcal{P}_{j;\alpha-1}$ при $\alpha > 0$ або з $\mathcal{P}_{j-1;2j-2}$ при $\alpha = 0$. Отже, $yR_{j;\alpha}(x,y)$ — поліном з $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ (якщо $\alpha = 0$, то $yR_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j;2j-1}$ (див. (12)). Множення (26) на „y" дає

$$yP_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} y^{(j+1)-|\alpha-j|} x^{(j-\alpha)} + yR_{j;\alpha}(x,y), \tag{27}$$

де $yR_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ або $yR_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j;2j-2}$.

Вираз (26) у випадку $P_{j+1;\alpha}(x,y)$ має вигляд

$$P_{j+1;\alpha+1}(x,y)=k_{j+1;\alpha+1}y^{(j+1)-|(\alpha+1)-(j+1)|}x^{((j+1)-(\alpha+1))}+R_{j+1;\alpha+1}(x,y)=$$

$$=k_{j+1;\alpha+1}y^{(j+1)-|(\alpha-j)|}x^{(j-\alpha)}+R_{j+1;\alpha+1}(x,y), \tag{28}$$

де $R_{j+1;\alpha+1}(x,y)\in\mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$, оскільки $\alpha+1>0$.

Виразимо $y^{(j+1)-|(\alpha-j)|}x^{(j-\alpha)}$ з (28) і підставимо його у (27):

$$yP_{j;\alpha}(x,y)=\frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+1}}(P_{j+1;\alpha+1}(x,y)-R_{j+1;\alpha+1}(x,y))+yR_{j;\alpha}(x,y)=$$

$$=\frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+1}}P_{j+1;\alpha+1}(x,y)-\frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+1}}R_{j+1;\alpha+1}(x,y)+yR_{j;\alpha}(x,y). \tag{29}$$

У (29) два останніх доданки належать до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ та $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ або $\mathcal{P}_{j;2j-1}$ відповідно і завжди є ортогональними до $P_{j+1;\alpha+1}(x,y)$.

Отже, підстановка виразу (29) у (25) дає $b_{j+1,j;\alpha,\alpha}=\dfrac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+1}}>0$. Елементи $b_{j,j+1;\alpha,\alpha}$ також є додатними завдяки симетричності матриці, тобто $b_{j+1,j;\alpha,\alpha}=b_{j,j+1;\alpha,\alpha}$, $\alpha=0,1,\ldots,2j$, $j\in\mathbb{N}$.

Лему 4 доведено.

Далі перепозначимо елементи матриці $a_{j,k}$ таким чином:

$$p_n=b_{n+1,n}:\mathcal{H}_n\longrightarrow\mathcal{H}_{n+1},$$

$$q_n=b_{n,n}:\mathcal{H}_n\longrightarrow\mathcal{H}_n, \tag{30}$$

$$r_n=b_{n,n+1}:\mathcal{H}_{n+1}\longrightarrow\mathcal{H}_n,\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Наведені вище результати сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. *Обмежений ермітів оператор $\hat{B}$ множення на „y” у просторі L_2 в ортонормованому базисі* (3) *поліномів має форму тридіагональної блочної симетричної матриці типу Якобі $J_B=(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, яка діє у просторі* (7):

$$\mathrm{l}_2=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\ldots,\quad \mathcal{H}_n=\mathbb{C}^{2n+1},\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Норми операторів $b_{j,k}:\mathcal{H}_k\longrightarrow\mathcal{H}_j$, $j,k\in\mathbb{N}_0$, обмежені однією величиною.

У позначеннях (30) *симетрична матриця має блочну структуру*

$$J_B=\left[\begin{array}{cccccc} q_0 & r_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ p_0 & q_1 & r_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & p_1 & q_2 & r_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & p_2 & q_3 & r_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right], \tag{31}$$

а у скалярній формі

$$
J_B = \left[\begin{array}{c|ccc|ccccc|ccccccc}
* & * & + & 0 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
* & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
+ & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & & & & 0 & & & \\
0 & * & * & * & * & * & * & + & 0 & & & & & & & \\
\hline
 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 \\
\hline
 & & & & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & 0 & & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\
\hline
 & & & & & & \ddots & & & & & & \ddots & & & \ddots
\end{array}\right]. \tag{32}
$$

У (31) *для будь-якого* $n \in \mathbb{N}_0$ q_n — $((2n+1)\times(2n+1))$*-матриця*: $q_n = (q_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n,2n}$ ($q_0 = b_{0;0,0}$ — *скаляр*); p_n — $((2n+3)\times(2n+1))$*-матриця*: $p_n = (p_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n+2,2n}$; r_n — $((2n+1)\times(2n+3))$*-матриця*: $r_n = (r_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n,2n+2}$. *Деякі елементи матриць* p_n *і* r_n *завжди є нульовими*:

$$
\begin{gathered}
r_{n;\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 2n, \quad \beta = \alpha+2, \alpha+3, \ldots, 2n+2, \\
p_{n;\alpha,\beta} = 0, \quad \beta = 0, 1, \ldots, 2n, \quad \alpha = \beta+2, \beta+3, \ldots, 2n+2, \quad n \in \mathbb{N}_0.
\end{gathered} \tag{33}
$$

Деякі елементи завжди є додатними, тобто

$$
r_{n;\alpha,\alpha+1} > 0, \quad p_{n;\alpha+1,\alpha} > 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 2n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{34}
$$

Додатні елементи у (32) *позначено як „ $+$ ”. Через „ $*$ ” позначено довільні* (*можливо, і нульові*) *елементи матриць. Матриця* (32) *у скалярній формі має багатодіагональну структуру. Матриця* J_B *є симетричною в базисі* (3) *і, отже, задає самоспряжений оператор. Матриця* J_B *діє за правилом*

$$
(J_B f)_n = p_{n-1} f_{n-1} + q_n f_n + r_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad f_{-1} = 0. \tag{35}
$$

Далі в якості оператора $\hat{S}$ із (9) візьмемо оператор $\hat{A}$.

Лема 5. *Нехай* $\hat{A}$ — *оператор множення на „ x ” у просторі* L_2:

$$
L_2 \ni \varphi(x,y) \longmapsto (\hat{A}\varphi)(x,y) = x\varphi(x,y) \in L_2.
$$

Операторна матриця $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *оператора* $\hat{A}$ (*тобто* $A = I^{-1}\hat{A}I$) *має тридіагональну структуру, тобто* $a_{j,k} = 0$ *при* $|j-k| > 1$.

Доведення. Використовуючи (11), при $e_{n;\gamma} = I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y)$, $\gamma = 0, 1, \ldots, 2n$, $n \in \mathbb{N}_0$, отримуємо

$$a_{j,k;\alpha,\beta} = (Ae_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{l_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y) \quad \forall j,k \in \mathbb{N}_0, \tag{36}$$

де $\alpha = 0,1,\ldots,2j,\ \beta = 0,1,\ldots,2k$. З (13), (14) випливає, що $xP_{k;\beta}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{k+1;\beta}$ при $\beta = 0,1,\ldots,k$, а $xP_{k;\beta}(x,y)$ — до $\mathcal{P}_{k+1;k}$ при $\beta = k+1, k+2,\ldots,2k$. Згідно з (6) інтеграл у (36) дорівнює нулю при $j > k+1$ і всіх $\beta = 0,1,\ldots,2k$.

З іншого боку, інтеграл (36) має вигляд

$$a_{j,k;\alpha,\beta} = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} \bar{x}P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{k;\beta}(x,y)}\,d\rho(x,y)}. \tag{37}$$

З (13), (14) тепер випливає, що $xP_{j;\alpha}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ при $\alpha = 0,1,\ldots,j$, а $xP_{j;\alpha}(x,y)$ — до $\mathcal{P}_{j+1;j}$ при $\alpha = j+1, j+2,\ldots,2j$. Згідно з (6) останній інтеграл дорівнює нулю при $k > j+1$ і кожному $\alpha = 0,1,\ldots,2j$.

Як результат, інтеграл у (37), тобто коефіцієнти $a_{j,k;\alpha,\beta},\ j,k \in \mathbb{N}_0$, дорівнюють нулю при $|j-k| > 1,\ \alpha = 0,1,\ldots,2j,\ \beta = 0,1,\ldots,2k$. У попередньому розгляді враховано, що $e_{0;0} = I^{-1}P_{0;0}(x,y),\ P_{0;0}(x,y) = 1$.

Лему 5 доведено.

Таким чином, матриця $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{A}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Позначимо через $((a^*)_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ операторну матрицю спряженого з $\hat{A}$ оператора $(\hat{A})^*$. Оператор $(\hat{A})^*$ також є оператором множення на „x”, оскільки $x = \bar{x}$. Враховуючи вираз (36) для $j,k \in \mathbb{N}_0$, маємо

$$(a^*)_{j,k;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \bar{x}P_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\,d\rho(x,y) =$$

$$= \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{k;\beta}(x,y)}\,d\rho(x,y)} = \bar{a}_{k,j;\beta,\alpha} = a_{k,j;\beta,\alpha},$$

де $\alpha = 0,1,\ldots,2j$ і $\beta = 0,1,\ldots,2k$.

Детальний аналіз виразів (36) дає інформацію про нульові і ненульові елементи матриць $(a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2j,2k}$ при $|j-k| \le 1$. Також будемо використовувати переставні властивості індексів j,k, та α,β.

Лема 6. *Нехай $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ — операторна матриця множення на „x” в L_2, де $a_{j,k} : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$; $a_{j,k} = (a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2j,2k}$ — матриці операторів $a_{j,k}$ у відповідному ортонормованому базисі. Тоді маємо*

$$a_{j,j+1;\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha = 0,1,\ldots,j, \quad \beta = \alpha+1, \alpha+2,\ldots,2j+2, \tag{39}$$

$$a_{j,j+1;\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha = j+1,\ldots,2j, \quad \beta = j+1, j+2,\ldots,2j+2, \tag{40}$$

$$a_{j+1,j;\alpha,\beta} = 0, \quad \beta = 0,1,\ldots,j, \quad \alpha = \beta+1,\beta+2,\ldots,2j+2, \tag{41}$$

$$a_{j+1,j;\alpha,\beta} = 0, \quad \beta = j+1,j+1,\ldots,2j, \quad \alpha = j+1,j+2,\ldots,2j+2, \quad j \in \mathbb{N}_0. \tag{42}$$

Доведення. Згідно з (36) і (13), (14) для $a_{j,j+1;\alpha,\beta}$ з $\alpha = 0,1,\ldots,2j$, $\beta = 0,1,\ldots,2k$ маємо

$$a_{j,j+1;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{j+1,\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\,d\rho(x,y) = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} \bar{x}P_{j,\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\beta}(x,y)}\,d\rho(x,y)}, \quad j \in \mathbb{N},$$

де $\bar{x}P_{j;\alpha}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ при $\alpha = 0,1,\ldots,j$. Але, згідно з (6), $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\beta}$ при $\beta > \alpha$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Це дає рівність (39). І $\bar{x}P_{j;\alpha}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{j+1;j}$ при $\alpha = j+1,j+2,\ldots,2j$. Але, згідно з (6), $\mathcal{P}_{j+1;j}$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\beta}$ при $\beta = j+1,j+2,\ldots,2j+2$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Це дає рівність (39).

Аналогічно, з (36) і (13), (14) для $\alpha = 0,1,\ldots,2j+2$, $\beta = 0,1,\ldots,2j$ маємо

$$a_{j+1,j;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} xP_{j,\beta}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha}(x,y)}\,d\rho(x,y), \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

де $xP_{j;\beta}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{j+1;\beta}$ при $\beta = 0,1,\ldots,j$. Але, згідно з (6), $\mathcal{P}_{j+1;\beta}$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ при $\beta < \alpha$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю при $\alpha = \beta+1,\beta+2,\ldots,2j+2$. Це дає рівність в (41). І $xP_{j;\alpha}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{j+1;j}$ при $\beta = j+1,j+2,\ldots,2j$. Але, згідно з (6), $\mathcal{P}_{j+1;j}$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ при $\alpha > j$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю при $\alpha = j+1,j+2,\ldots,2j+2$. Це дає рівність (42). Зокрема, (41) і (42) можна отримати з (39) і (40), врахувавши симетричність матриці.

Лему 6 доведено.

Таким чином, після досліджень можна говорити, що у (38) для будь-якого $j \in \mathbb{N}_0$ кожний нижній кут матриці $a_{j+1,j}$ (починаючи з другої діагоналі) і $j+2$ останніх рядки, а також кожний верхній правий кут матриці $a_{j,j+1}$ (починаючи з другої діагоналі) і $j+2$ останніх рядки містять нульові елементи. З огляду на (38) зауважимо, що матриця множення на „x” є багатодіагональною скалярною, тобто у звичайному базисі простору l_2.

Лема 7. *Елементи*

$$a_{j,j+1;\alpha,\alpha}, \quad a_{j+1,j;\alpha,\alpha}, \quad \alpha = 0,1,\ldots,j, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

матриць $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *з леми* 6 *є додатними.*

Доведення. Почнемо з $a_{1,0;0,0}$. Використавши (36), позначимо через $P'_{1;0}(x,y) = x-(x,1)_{L_2}$ $(1 = P_{0;0}(x,y))$ ненормований вектор $P_{1;0}(x,y)$, отриманий завдяки ортогоналізації за Шмідтом вектора x. Отже,

$$a_{1,0;0,0} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x\overline{P_{1;0}(x,y)}\,d\rho(x,y) = \|P'_{1;0}(x,y)\|^{-1}_{L_2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} x\overline{(x-(x,1)_{L_2})}\,d\rho(x,y) =$$

$$= \|P'_{1;0}(x,y)\|^{-1}_{L_2}(\|x\|^2_{L_2} - |(x^{-1},1)_{L_2}|^2). \tag{43}$$

Остання різниця є додатною (див. (44)), отже, $a_{1,0;0,0} > 0$. Оскільки $a_{0,1;0,0} = a_{1,0;0,0}$, то також $a_{0,1;0,0} > 0$.

Додатність (43) випливає з рівності Парсеваля, застосованої до розкладу функції $x \in L_2$ за ортонормованим базисом (3) простору L_2:

$$|(x,1)_{L_2}|^2 + |(x, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 + |(x, P_{1;1}(x,y))_{L_2}|^2 + \ldots = \|x\|^2_{L_2}. \tag{44}$$

Покажемо додатність $a_{j+1,j;\alpha,\alpha}$, де $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, j$. З (36) маємо

$$a_{j+1,j;\alpha,\alpha} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y). \tag{45}$$

Згідно з (4) і (6)

$$P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} y^{j-|\alpha-j|} x^{(j-\alpha)} + R_{j;\alpha}(x,y), \tag{46}$$

де $R_{j;\alpha}(x,y)$ — деякий поліном з $\mathcal{P}_{j;\alpha-1}$ при $\alpha > 0$ або з $\mathcal{P}_{j-1;2(j-1)}$ при $\alpha = 0$. Отже, $xR_{j;\alpha}(x,y)$ — поліном з $\mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}$ при $\alpha = 1, 2, \ldots, j$, або з $\mathcal{P}_{j+1;j}$ при $\alpha = j+1, j+2, \ldots, 2j$, або з $\mathcal{P}_{j;2(j-1)}$ при $\alpha = 0$ (див. (13), (14) і (6)). Помноживши (46) на „x”, отримаємо

$$\begin{gathered} xP_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} y^{j-|\alpha-j)|} x^{(j-\alpha+1)} + xR_{j;\alpha}(x,y) = \\ = k_{j;\alpha} y^{j+1-|\alpha-(j+1))|} x^{(j+1-\alpha)} + xR_{j;\alpha}(x,y), \\ xR_{j;\alpha}(x,y) \in \begin{cases} \mathcal{P}_{j;2(j-1)}, & \alpha = 0, \\ \mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}, & \alpha = 1, 2, \ldots, j, \\ \mathcal{P}_{j+1;j}, & \alpha = j+1, j+2, \ldots, 2j. \end{cases} \end{gathered} \tag{47}$$

З іншого боку, вираз (46) у випадку $P_{j+1;\alpha}(x,y)$ має вигляд

$$\begin{gathered} P_{j+1;\alpha}(x,y) = k_{j+1;\alpha} y^{j+1-|\alpha-(j+1)|} x^{(j+1-\alpha)} + R_{j+1;\alpha}(x,y), \\ R_{j+1;\alpha}(x,y) \in \begin{cases} \mathcal{P}_{j;2j}, & \alpha = 0, \\ \mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}, & \alpha = 1, 2, \ldots, 2j. \end{cases} \end{gathered} \tag{48}$$

Виразимо $y^{j+1-|\alpha-(j+1)|} x^{(j+1-\alpha)}$ з (48) і підставимо його у (47):

$$\begin{gathered} xP_{j;\alpha}(x,y) = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}} (P_{j+1;\alpha}(x,y) - R_{j+1;\alpha}(x,y)) + xR_{j;\alpha}(x,y) = \\ = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}} P_{j+1;\alpha}(x,y) - \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}} R_{j+1;\alpha}(x,y) + xR_{j;\alpha}(x,y), \end{gathered} \tag{49}$$

де другий доданок належить до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}$ $(\alpha \neq 0)$ або до $\mathcal{P}_{j;2j}$ $(\alpha = 0)$, а третій доданок належить до $\mathcal{P}_{j;2(j-1)}$ при $\alpha = 0$, $\mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}$ при $\alpha = 1, 2, \ldots, j$, $\mathcal{P}_{j+1;j}$ при $\alpha = j+1, j+ + 2, \ldots, 2j$ і ортогональний до $P_{j+1;\alpha}(x,y)$ при $\alpha \leq j$. Отже, після підстановки виразу (49) в (45) отримуємо $a_{j+1,j;\alpha,\alpha} = \dfrac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}} > 0$.

Елементи $a_{j,j+1;\alpha,\alpha}$, де $\alpha = j+1, j+2, \ldots, 2j$, $j \in \mathbb{N}$, також є додатними завдяки симетричності матриці, тобто $a_{j,j+1;\alpha,\alpha} = a_{j+1,j;\alpha,\alpha}$.

Лему 7 доведено.

Далі перепозначимо елементи матриць $a_{j,k}$:

$$a_n = a_{n+1,n} : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1},$$

$$b_n = a_{n,n} : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \tag{50}$$

$$c_n = u_{a,n+1} : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Наведені вище результати сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2. *Обмежений ермітів оператор $\hat{A}$ множення на „x” у просторі L_2 в ортонормованому базисі* (3) *поліномів має форму тридіагональної блочної симетричної матриці типу Якобі $J_A = (a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, яка діє у просторі* (7):

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Норми операторів $a_{j,k} : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j,\ j,k \in \mathbb{N}_0$, обмежені однією величиною.

У позначеннях (50) *симетрична матриця має блочну структуру*

$$J_A = \left[\begin{array}{cccccc} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 & c_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right], \tag{51}$$

а у скалярній формі

$$J_A = \left[\begin{array}{c|ccc|ccccc|ccccccc} * & + & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\ \hline + & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & & & & 0 & & & \\ 0 & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \hline & + & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ \hline & & \ddots & & & & & \ddots & & & & & & & \ddots & \end{array}\right]. \tag{52}$$

У (51) *для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$ b_n — $((2n+1)\times(2n+1))$-матриця: $b_n = (b_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n,2n}$* ($b_0 = b_{0;0,0}$ *— скаляр*); *a_n — $((2n+3)\times(2n+1))$-матриця: $a_n = (a_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n+2,2n}$; c_n — $((2n+1)\times(2n+3))$-матриця: $c_n = (c_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n,2n+2}$. Деякі елементи матриць a_n і c_n є нульовими:*

$$\begin{gathered}
a_{n;\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha = 0,1,\ldots,n, \quad \beta = \alpha+1,\alpha+2,\ldots,2n+2, \\
a_{n;\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha = n+1,\ldots,2n, \quad \beta = n+1,n+2,\ldots,2n+2, \\
c_{n;\alpha,\beta} = 0, \quad \beta = 0,1,\ldots,n, \quad \alpha = \beta+1,\beta+2,\ldots,2n+2, \\
c_{n;\alpha,\beta} = 0, \quad \beta = n+1,n+2,\ldots,2n, \quad \alpha = n+1,n+2,\ldots,2n+2, \quad n \in \mathbb{N}_0.
\end{gathered} \tag{53}$$

Деякі елементи завжди є додатними, тобто

$$c_{n;\alpha,\alpha+2} > 0, \quad a_{n;\alpha,\alpha} > 0, \quad \alpha = 0,1,\ldots,n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{54}$$

Додатні елементи в (52) *позначено через „$+$". Через „$*$" позначено довільні* (*можливо, і нульові*) *елементи матриць. Матриця* (52) *у скалярній формі має багатодіагональну структуру. Матриця J_A є симетричною в базисі* (3) *і, отже, задає самоспряжений оператор. Матриця J_A, діє за правилом*: $\forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{l}_2$

$$(J_A f)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad f_{-1} = 0. \tag{55}$$

Далі в якості оператора $\hat{S}$ із (9) візьмемо оператор $\hat{A}^{-1}$.

Лема 8. *Нехай $\hat{A}^{-1}$ — оператор множення на „x^{-1}" у просторі L_2*:

$$L_2 \ni \varphi(x,y) \longmapsto (\hat{A}^{-1}\varphi)(x,y) = x^{-1}\varphi(x,y) \in L_2.$$

Операторна матриця $(u_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{A}^{-1}$ (*тобто $A^{-1} = I^{-1}\hat{A}^{-1}I$*) *має тридіагональну структуру, тобто $u_{j,k} = 0$ при $|j-k| > 1$.*

Доведення. Використовуючи (11), при $e_{n;\gamma} = I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y)$, $\gamma = 0,1,\ldots,2n$, $n \in \mathbb{N}_0$, маємо

$$u_{j,k;\alpha,\beta} = (A^{-1}e_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{l_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}P_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y) \quad \forall j,k \in \mathbb{N}_0, \tag{56}$$

де $\alpha = 0,1,\ldots,2j$, $\beta = 0,1,\ldots,2k$. З (15), (16) випливає, що $x^{-1}P_{k;\beta}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{k+1;\beta+2}$ при $\beta = k,k+1,\ldots,2k$, а $x^{-1}P_{k;\beta}(x,y)$ — до $\mathcal{P}_{k;2k}$ при $\beta = 0,1,\ldots,k-1$. Згідно з (6) інтеграл у (56) дорівнює нулю при $j > k+1$ для всіх $\beta = 0,1,\ldots,2k$.

З іншого боку, інтеграл (56) має вигляд

$$u_{j,k;\alpha,\beta} = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} \bar{x}^{-1}P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{k;\beta}(x,y)}\,d\rho(x,y)}. \tag{57}$$

З (15), (16) тепер випливає, що $x^{-1}P_{j;\alpha}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+2}$ при $\alpha = j,j+1,\ldots,2j$, а $x^{-1}P_{j;\alpha}(x,y)$ — до $\mathcal{P}_{j;2j}$ при $\alpha = 0,1,\ldots,j-1$. Згідно з (6) останній інтеграл дорівнює нулю при $k > j+1$ і кожному $\alpha = 0,1,\ldots,2j$.

Як результат, інтеграл у (57), тобто коефіцієнти $u_{j,k;\alpha,\beta}$, $j,k \in \mathbb{N}_0$, дорівнюють нулю при $|j-k| > 1$, $\alpha = 0,1,\ldots,2j$, $\beta = 0,1,\ldots,2k$. У попередньому розгляді враховано, що $e_{0;0} = I^{-1}P_{0;0}(x,y) = 1$, де $P_{0;0}(x,y) = 1$.

Лему 8 доведено.

Таким чином, матриця $(u_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{A}^{-1}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Позначимо через $((u^*)_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ операторну матрицю спряженого з $\hat{A}^{-1}$ оператора $(\hat{A}^{-1})^*$. Оператор $(\hat{A}^{-1})^*$ також є оператором множення на „x^{-1}”. Враховуючи вираз (56), для $j,k \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$(u^*)_{j,k;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \bar{x}^{-1} P_{k;\beta}(x,y) \overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y) =$$

$$= \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1} P_{j;\alpha}(x,y) \overline{P_{k;\beta}(x,y)}\, d\rho(x,y)} = \bar{u}_{k,j;\beta,\alpha} = u_{k,j;\beta,\alpha},$$

де $\alpha = 0,1,\dots,2j$ і $\beta = 0,1,\dots,2k$.

Детальний аналіз виразу (56) дає інформацію про нульові і ненульові елементи матриць $(u_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2j,2k}$ при $|j-k| \le 1$. Також будемо використовувати переставні властивості індексів j,k, та α,β.

Лема 9. *Нехай* $(u_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *— операторна матриця множення на „*x^{-1}*” в* L_2*, де* $u_{j,k}\colon \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j$; $u_{j,k} = (u_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2j,2k}$ *— матриці операторів* $u_{j,k}$ *у відповідному ортонормованому базисі. Тоді маємо*

$$u_{j,j+1;\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha = 0,1,\dots,j-1, \quad \beta = 0,1,\dots,2j+2, \tag{59}$$

$$u_{j,j+1;\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha = j,j+1,\dots,2j-1, \quad \beta = \alpha+3,\alpha+4,\dots,2j+2, \tag{60}$$

$$u_{j+1,j;\alpha,\beta} = 0, \quad \beta = 0,1,\dots,j-1, \quad \alpha = 0,1,\dots,2j+2, \tag{61}$$

$$u_{j+1,j;\alpha,\beta} = 0, \quad \beta = j,j+1,j+1,\dots,2j-1, \quad \alpha = j+3,j+4,\dots,2j+2; \quad j \in \mathbb{N}_0. \tag{62}$$

Доведення. Згідно з (56) і (15), (16) для $u_{j,j+1;\alpha,\beta}$, $\alpha = 0,1,\dots,2j$, $\beta = 0,1,\dots,2k$, $j \in \mathbb{N}_0$, маємо

$$u_{j,j+1;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1} P_{j+1,\beta}(x,y) \overline{P_{j;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y) = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^2} \bar{x}^{-1} P_{j,\alpha}(x,y) \overline{P_{j+1;\beta}(x,y)}\, d\rho(x,y)},$$

де $\bar{x}^{-1}P_{j;\alpha}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+2}$ при $\alpha = j,j+1,\dots,2j$. Але, згідно з (6), $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+2}$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\beta}$ при $\beta > \alpha+2$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Це дає рівність (60). І $\bar{x}^{-1}P_{j;\alpha}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{j;2j}$ при $\alpha = 0,1,\dots,j-1$. Але, згідно з (6), $\mathcal{P}_{j;2j}$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\beta}$ при $\beta = 0,1,\dots,2j+2$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Це дає рівність (59).

Аналогічно, з (56) і (14), (15) при $\alpha = 0,1,\dots,2j+2$, $\beta = 0,1,\dots,2j$, $j \in \mathbb{N}_0$, маємо

$$u_{j+1,j;\alpha,\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1} P_{j,\beta}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha}(x,y)}\, d\rho(x,y),$$

де $x^{-1}P_{j;\beta}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{j+1;\beta+2}$ при $\beta = j, j+1, \ldots, 2j$. Але, згідно з (6), $\mathcal{P}_{j+1;\beta+2}$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ при $\beta + 2 < \alpha$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю при $\alpha = j+3, j+4, \ldots, 2j+2$. Це дає рівність у (62). І $x^{-1}P_{j;\beta}(x,y)$ належить до $\mathcal{P}_{j+1;2j}$ при $\beta = 0, 1, \ldots, 2j-1$. Але, згідно з (6), $\mathcal{P}_{j+1;2j}$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ при $\alpha < 2j$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю при $\alpha = 0, 1, \ldots, 2j-1$. Це дає рівність (61). Зокрема, (61) і (62) можна отримати з (59) і (60), враховувавши симетричність матриці.

Лему 9 доведено.

Таким чином, після досліджень можна говорити, що в (58) для будь-якого $j \in \mathbb{N}_0$ кожний нижній кут матриці $u_{j+1,j}$ ($2j$ діагоналей) та j перших стовпців і кожний верхній правий кут матриці $u_{j,j+1}$ ($2j$ діагоналей) та j перших рядків містять нульові елементи. Враховуючи (58), приходимо до висновку, що матриця множення на „x^{-1}” є багатодіагональною скалярною у звичайному базисі простору l_2.

Лема 10. *Елементи*

$$u_{j,j+1;\alpha,\alpha+2}, \quad u_{j+1,j;\alpha+2,\alpha}, \quad \alpha = j, j+1, \ldots, 2j, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

матриці $(u_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *з леми* 9 *є додатними.*

Доведення. Розглянемо $u_{0,1;0,2}$. Позначимо через $P'_{1;2}(x,y)$ ненормований вектор $P_{1;2}(x,y)$, отриманий при ортогоналізації за Шмідтом вектора x^{-1}. Згідно з (2) і (3) маємо

$$P'_{1;2}(x,y) = x^{-1} - (x^{-1}, P_{1;1}(x,y))_{L_2} P_{1;1}(x,y) - (x^{-1}, P_{1;0}(x,y))_{L_2} P_{1;0}(x,y) - (x^{-1}, 1)_{L_2}.$$

Отже, використовуючи (56), одержуємо

$$u_{0,1;0,2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1} P_{1;2}(x,y)\, d\rho(x,y) = \|P'_{1;2}(x,y)\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1} P'_{1;2}(x,y)\, d\rho(x,y) =$$

$$= \|P'_{1;2}(x,y)\|_{L_2}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}(x^{-1} - (x^{-1}, P_{1;1}(x,y))_{L_2} P_{1;1}(x,y) -$$

$$-(x^{-1}, P_{1;0}(x,y))_{L_2} P_{1;0}(x,y) - (x^{-1}, 1)_{L_2})\, d\rho(x,y) =$$

$$= \|P'_{1;2}(x,y)\|_{L_2}^{-1} (\|x^{-1}\|_{L_2}^2 - |(x^{-1}, P_{1;1}(x,y))_{L_2}|^2 -$$

$$-|(x^{-1}, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 - |(x^{-1}, 1)_{L_2}|^2). \tag{63}$$

Також використовуючи (64), переконуємося, що останній вираз є додатним і, отже, $a_{0,1;0,2} > 0$.

Додатність (63) випливає з рівності Парсеваля, застосованої до розкладу функції $x^{-1} \in L_2$ за ортонормованим базисом (3) простору L_2:

$$|(x^{-1}, 1)_{L_2}|^2 + |(x^{-1}, P_{1;0}(x,y))_{L_2}|^2 + |(x^{-1}, P_{1;1}(x,y))_{L_2}|^2 + \ldots = \|x^{-1}\|_{L_2}^2. \tag{64}$$

Покажемо додатність $u_{j+1,j;\alpha+2,\alpha}$, де $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = j, j+1, \ldots, 2j$. З (56) маємо

$$u_{j+1,j;\alpha+2,\alpha} = \int_{\mathbb{R}^2} x^{-1} P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha+2}(x,y)}\, d\rho(x,y). \tag{65}$$

Згідно з (4) і (6)

$$P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} y^{j-|\alpha-j|} x^{(j-\alpha)} + R_{j;\alpha}(x,y), \tag{66}$$

де $R_{j;\alpha}(x,y)$ — деякий поліном з $\mathcal{P}_{j;\alpha-1}$ при $\alpha > 0$ або з $\mathcal{P}_{j-1;2(j-1)}$ при $\alpha = 0$. Отже, $x^{-1}R_{j;\alpha}(x,y)$ — поліном з $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+2}$ при $\alpha = j, j+1, , \ldots, 2j$, або з $\mathcal{P}_{j;2j}$ при $\alpha = 0, 1, \ldots, j-1$, або з $\mathcal{P}_{j;2(j-1)}$ при $\alpha = 0$ (див. (15), (16) і (6)). Помноживши (66) на „x^{-1}”, отримаємо

$$\begin{gathered} x^{-1}P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha} y^{j-|\alpha-j)|} x^{(j-\alpha-1)} + x^{-1}R_{j;\alpha}(x,y) = \\ = k_{j;\alpha} y^{j+1-|\alpha+2-(j+1))|} x^{(j+1-(\alpha+2))} + x^{-1}R_{j;\alpha}(x,y), \\ x^{-1}R_{j;\alpha}(x,y) \in \begin{cases} \mathcal{P}_{j;2(j-1)}, & \alpha = 0, \\ \mathcal{P}_{j+1;\alpha+2}, & \alpha = j, j+1, \ldots, 2j, \\ \mathcal{P}_{j;2j}, & \alpha = 0, 1, \ldots, j-1. \end{cases} \end{gathered} \tag{67}$$

Вираз (66) у випадку $P_{j+1;\alpha+2}(x,y)$ набирає вигляду

$$\begin{gathered} P_{j+1;\alpha+2}(x,y) = k_{j+1;\alpha} y^{j+1-|\alpha+2-(j+1)|} x^{(j+1-(\alpha+2))} + R_{j+1;\alpha+2}(x,y), \\ R_{j+1;\alpha+2}(x,y) \in \begin{cases} \mathcal{P}_{j;2j}, & \alpha = 0, \\ \mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}, & \alpha = j, j+1, \ldots, 2j. \end{cases} \end{gathered} \tag{68}$$

Виразимо $y^{j+1-|\alpha+2-(j+1)|} x^{(j+1-(\alpha+2))}$ з (68) і підставимо його в (67):

$$\begin{gathered} x^{-1}P_{j;\alpha}(x,y) = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+2}} (P_{j+1;\alpha+2}(x,y) - R_{j+1;\alpha+2}(x,y)) + x^{-1}R_{j;\alpha}(x,y) = \\ = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+2}} P_{j+1;\alpha+2}(x,y) - \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+2}} R_{j+1;\alpha+2}(x,y) + x^{-1}R_{j;\alpha}(x,y), \end{gathered} \tag{69}$$

де другий доданок належить до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}$ ($\alpha \neq 0$) або до $\mathcal{P}_{j;2j}$ ($\alpha = 0$), а третій доданок належить до $\mathcal{P}_{j;2(j-1)}$ при $\alpha = 0$, $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$ при $\alpha = j, j+1, \ldots, 2j$, $\mathcal{P}_{j;2j}$ при $\alpha = 0, 1, \ldots, j - 1$ і ортогональний до $P_{j+1;\alpha}(x,y)$. Отже, після підстановки виразу (69) у (65) отримуємо $u_{j+1,j;\alpha+2,\alpha} = \dfrac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+2}} > 0$.

Елемент $u_{j,j+1;\alpha,\alpha+2}$ також є додатним, оскільки матриця $(u_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ є симетричною, тобто $u_{j,j+1;\alpha,\alpha+2} = u_{j+1,j;\alpha+2,\alpha} > 0$.

Лему 10 доведено.

Далі перепозначимо елементи матриці $u_{j,k}$:

$$u_n = u_{n+1,n} : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1},$$

$$w_n = u_{n,n} : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \tag{70}$$

$$v_n = u_{a,n+1} : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Наведені вище результати сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 3. *Обмежений ермітів оператор $\hat{A}^{-1}$ множення на „x^{-1}" у просторі L_2 в ортонормованому базисі* (3) *поліномів має форму тридіагональної блочної симетричної матриці типу Якобі $J_{A^{-1}} = (u_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, яка діє у просторі* (7):

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Норми операторів $a_{j,k} : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j,\ j,k \in \mathbb{N}_0$, обмежені однією величиною.

У позначеннях (70) *симетрична матриця має блочну структуру*

$$J_{A^{-1}} = \left[\begin{array}{cccccc} w_0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & u_2 & w_3 & v_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right], \tag{71}$$

а у скалярній формі

$$J_{A^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc|ccccc|ccccccc} * & * & * & + & & & & & & & & & & & & \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ * & * & * & * & * & * & * & + & 0 & & & & 0 & & & \\ + & * & * & * & * & * & * & * & + & & & & & & & \\ & 0 & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 \\ & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 \\ & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & + \\ & & & & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & 0 & & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & 0 & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & \ddots & & & & & \ddots & & & & & & & \ddots \end{array}\right]. \tag{72}$$

У (71) *для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$ w_n — $((2n+1) \times (2n+1))$-матриця*: $w_n = (w_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n,2n}$ ($w_0 = w_{0;0,0}$ — *скаляр*); u_n — $((2n+3) \times (2n+1))$-*матриця*: $u_n = (u_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n+2,2n}$; v_n — $((2n+1) \times (2n+3))$-*матриця*: $v_n = (v_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2n,2n+2}$. *Деякі елементи матриць u_n і v_n є нульовими*:

$$
\begin{gathered}
u_{n;\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \beta = 0, 1, \ldots, 2n+2, \\
u_{n;\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha = n, n+1, \ldots, 2n-1, \quad \beta = \alpha+3, \alpha+4, \ldots, 2n+2, \\
v_{n;\alpha,\beta} = 0, \quad \beta = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 2n+2, \\
v_{n;\alpha,\beta} = 0, \quad \beta = n, n+1, \ldots, 2n-1, \quad \alpha = n+3, n+4, \ldots, 2n+1, \quad n \in \mathbb{N}_0.
\end{gathered} \tag{73}
$$

Деякі елементи завжди є додатними, тобто

$$v_{n;\alpha,\alpha+2} > 0, \quad u_{n;\alpha+2,\alpha} > 0, \quad \alpha = n, n+1, \ldots, 2n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{74}$$

Додатні елементи в (72) *позначено через „$+$”. Через „$*$” позначено довільні* (*можливо, і нульові*) *елементи матриць. Матриця* (72) *у скалярній формі має багатодіагональну структуру. Матриця $J_{A^{-1}}$ є симетричною в базисі* (3) *і, отже, задає самоспряжений оператор. Матриця $J_{A^{-1}}$ діє за правилом*: $\forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{l}_2$

$$(J_{A^{-1}} f)_n = u_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad f_{-1} = 0. \tag{75}$$

Зауважимо, що якби ми вибрали у кожному напрямку „в лінії із кутом”

$$\{x^n, yx^{(n-1)}, y^2 x^{(n-2)}, \ldots, y^n, \ldots, yx^{-(n-1)}, x^{-n}\}$$

(див. порядок ортогоналізації за Шмідтом і коментарі після (2)) інший порядок (зберігаючи лінії), то леми 3, 6, 9 також би виконувалися і можна було б описати нулі матриць $(b_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2j,2k}$, $(a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2j,2k}$, $(u_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{2j,2k}$. Ці матриці також би мали тридіагональну блочну структуру, але з нульовими елементами на інших місцях.

Пряма й обернена спектральна задачі для блочних матриць, що відповідають напівсильній дійсній проблемі моментів. Розглянемо оператори у просторі $\mathbf{l}_2$ вигляду (7) та його оснащення

$$(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})' \supset \mathbf{l}_2(p^{-1}) \supset \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_2(p) \supset \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}, \tag{76}$$

де $\mathbf{l}_2(p)$ — зважений простір $\mathbf{l}_2$ із вагою $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$, де $p_n \geq 1$, і $p^{-1} = (p_n^{-1})_{n=0}^{\infty}$. У цьому випадку $\mathbf{l}_2(p)$ — гільбертів простір послідовностей $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{H}_n$, для яких

$$\|f\|_{\mathbf{l}_2(p)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 p_n, \quad (f, g)_{\mathbf{l}_2(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{\mathcal{H}_n} p_n.$$

Простір $\mathbf{l}_2(p^{-1})$ визначається аналогічно. Нагадаємо, що $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ — простір скінченних послідовностей, а $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ — простір, спряжений до $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ відносно $\mathbf{l}_2$. Відомо, що вкладення $\mathbf{l}_2(p) \hookrightarrow \mathbf{l}_2$ є квазіядерним, якщо $\sum_{n=0}^{\infty} n p_n^{-1} < \infty$ (див., наприклад, [1], розділ 7, і [3], розділ 15).

Нехай B та A і A^{-1} — комутуючі у сильному резольвентному сенсі обмежені самоспряжені оператори, стандартно пов’язані з оснащенням (25) з [9], роль якого зараз відіграє (76). Згідно з проєкційною спектральною теоремою (див. теорему 1 з [9], теорему 2.7 із [2], розділ 3, [1], розділ 5, і [3], розділ 15), ці оператори мають зображення

$$Bf = \int_{\mathbb{R}^2} y \Phi(x, y)\, d\sigma(x, y) f, \quad Af = \int_{\mathbb{R}^2} x \Phi(x, y)\, d\sigma(x, y) f,$$

$$A^{-1}f = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}\Phi(x,y)\,d\sigma(x,y)f, \quad f \in \mathbf{l}_2,$$

де $\Phi(x,y) : \mathbf{l}_2(p) \longrightarrow \mathbf{l}_2(p^{-1})$ — оператор узагальненого проєктування і $d\sigma(x,y)$ — спектральна міра. Для кожного $f \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ проєкція $\Phi(x,y)f \in \mathbf{l}_2(p^{-1})$ є узагальненим власним вектором операторів B та A і A^{-1} із відповідними власними значеннями y та x і x^{-1}. Для всіх $f, g \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ справджується рівність Парсеваля

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\Phi(x,y)f,g)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y), \tag{77}$$

яка після замикання за неперервністю є справедливою для будь-яких $f, g \in \mathbf{l}_2$.

Позначимо через π_n оператор ортогонального проєктування в $\mathbf{l}_2$ на $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Отже, для будь-якого $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{l}_2$ маємо $f_n = \pi_n f$. Цей оператор діє аналогічно і у просторах $\mathbf{l}_2(p)$ та $\mathbf{l}_2(p^{-1})$, але можливо має неодиничну норму.

Розглянемо операторну матрицю $(\Phi_{j,k}(x,y))_{j,k=0}^{\infty}$, де

$$\Phi_{j,k}(x,y) = \pi_j \Phi(x,y)\pi_k : \mathbf{l}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_j \quad (\text{або } \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j). \tag{78}$$

Тепер рівність Парсеваля (77) можна записати у вигляді

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\Phi(x,y)\pi_k f, \pi_j g)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\pi_j\Phi(x,y)\pi_k f, g)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y) =$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\Phi_{j,k}(x,y)f_k, g_j)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y) \quad \forall f, g \in \mathbf{l}_2. \tag{79}$$

Тепер візьмемо в якості обмежених самоспряжених операторів B та A і A^{-1}, що діють у просторі $\mathbf{l}_2$, оператори, породжені матрицями J_B та J_A і $J_{A^{-1}}$, які мають блочну тридіагональну структуру вигляду (31) та (51) і (71) відповідно. Оператори B та A і A^{-1} задано матрицями (31), (51), (71) та дією (35), (55), (75). Зауважимо, що норми елементів p_n, q_n, r_n та a_n, b_n, c_n і u_n, w_n, v_n обмежені однією величиною при всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

Для подальшого також припускаємо, що умови (33), (34) та (53), (54) і (73), (74) виконуються, а оператори, породжені матрицями, комутують у $\mathbf{l}_2$.

Для того щоб записати рівність Парсеваля (79) у термінах узагальнених власних векторів операторів B та A і A^{-1}, доведемо таку лему.

Лема 11. *Нехай* $\varphi(x,y) = (\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n(x,y) \in \mathcal{H}_n$, $\{x,y\} \in \mathbb{R}^2$, — *узагальнений власний вектор з* $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ *комутуючих самоспряжених операторів, породжених матрицями* J_B *та* J_A *і* $J_{A^{-1}}$ *із власними значеннями „y” та „x” і „x^{-1}” відповідно. І нехай* $\varphi(x,y)$ *є розв'язком з* $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ *системи різницевих рівнянь* (*див.* (35), (55), (75))

$$
\begin{gathered}
(J_B\varphi(x,y))_n := p_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + q_n\varphi_n(x,y) + r_n\varphi_{n+1}(x,y) = y\varphi_n(x,y), \\
(J_A\varphi(x,y))_n := a_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + b_n\varphi_n(x,y) + c_n\varphi_{n+1}(x,y) = x\varphi_n(x,y), \\
(J_{A^{-1}}\varphi(x,y))_n := u_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + w_n\varphi_n(x,y) + v_n\varphi_{n+1}(x,y) = x^{-1}\varphi_n(x,y), \\
n \in \mathbb{N}_0, \quad \varphi_{-1}(x,y) = 0,
\end{gathered} \tag{80}
$$

із початковою умовою $\varphi_0 := \varphi_0(x,y) \in \mathbb{R}$.

Тоді розв'язок має вигляд

$$
\varphi_n(x,y) = Q_n(x,y)\varphi_0 = (Q_{n;0}, Q_{n;1}, \ldots, Q_{n;2n},)\varphi_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{81}
$$

де $Q_{n;\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 2n$, *— поліноми зі змінними* y, x, x^{-1}, *які мають вигляд*

$$
Q_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha} y^{n-|\alpha-n|} x^{(n-\alpha)} + R_{n;\alpha}(x,y), \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 2n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{82}
$$

Тут $k_{n;\alpha} > 0$ *і* $R_{n;\alpha}(x,y)$ *— лінійна комбінація* y, x, x^{-1} (*згідно з порядком* (2) *ортогоналізації за Шмідтом*).

Доведення. При $n = 0$ система (80) набирає вигляду (у зручному порядку):

$$
J_A\varphi_0 = x\varphi_0, \quad J_B\varphi_0 = y\varphi_0, \quad J_{A^{-1}}\varphi_0 = x^{-1}\varphi_0, \tag{83}
$$

тобто

$$
\begin{gathered}
b_{0;0,0}\varphi_{0;0} + c_{0;0,0}\varphi_{1;0} = x\varphi_{0;0}, \\
q_{0;0,0}\varphi_{0;0} + r_{0;0,0}\varphi_{1;0} + r_{0;0,1}\varphi_{1;1} = y\varphi_{0;0}, \\
w_{0;0,0}\varphi_{0;0} + v_{0;0,0}\varphi_{1;0} + v_{0;0,1}\varphi_{1;1} + v_{0;0,2}\varphi_{1;2} = x^{-1}\varphi_{0;0},
\end{gathered}
$$

або

$$
\begin{gathered}
c_{0;0,0}\varphi_{1;0} = (x - b_{0;0,0})\varphi_{0;0}, \\
r_{0;0,0}\varphi_{1;0} + r_{0;0,1}\varphi_{1;1} = (y - q_{0;0,0})\varphi_{0;0}, \\
v_{0;0,0}\varphi_{1;0} + v_{0;0,1}\varphi_{1;1} + v_{0;0,2}\varphi_{1;2} = (x^{-1} - w_{0;0,0})\varphi_{0;0}.
\end{gathered} \tag{84}
$$

Далі будемо позначати

$$
\varphi_0 = \varphi_{0;0} := Q_{0;0}, \quad \varphi_n(x,y) = (\varphi_{n;0}(x,y), \varphi_{n;1}(x,y), \ldots, \varphi_{n;2n}(x,y)) \in \mathcal{H}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.
$$

Систему (83) можна записати у вигляді

$$
\begin{gathered}
\Delta_0\varphi_1(x,y) = \big((x - b_{0;0,0})\varphi_0), (y - q_{0;0,0})\varphi_0, (x^{-1} - w_{0;0,0})\varphi_0\big), \\
\Delta_0 = \begin{bmatrix} c_{0;0,0} & 0 & 0 \\ r_{0;0,0} & r_{0;0,1} & 0 \\ v_{0;0,0} & v_{0;0,1} & v_{0;0,2} \end{bmatrix},
\end{gathered} \tag{85}
$$

де завдяки умовам (34), (54), (74) $c_{0;0,0} > 0$, $r_{0;0,1} > 0$, $v_{0;0,2} > 0$. Отже, $\Delta_0 > 0$. З (84) послідовно отримуємо

$$\varphi_{1;0}(x,y) = -\frac{b_{0;0,0}-x}{c_{0;0,0}}\varphi_0 =: Q_{1;0}(x,y)\varphi_0,$$

$$\varphi_{1;1}(x,y) = -\left(\frac{q_{0;0,0}-y}{r_{0;0,1}} + \frac{r_{0;0,0}}{r_{0;0,1}}\frac{x-b_{0;0,0}}{c_{0;0,0}}\right)\varphi_0 =: Q_{1;1}(x,y)\varphi_0,$$

$$\varphi_{1;2}(x,y) = -\left(\frac{w_{0;0,0}-x^{-1}}{v_{0;0,2}} - \frac{v_{0;0,0}}{v_{0;0,2}}\left[\frac{b_{0;0,0}-x}{c_{0;0,0}}\right] - \frac{v_{0;0,1}}{v_{0;0,2}}\left[\frac{q_{0;0,0}-y}{r_{0;0,1}} + \frac{r_{0;0,0}}{r_{0;0,1}}\frac{x-b_{0;0,0}}{c_{0;0,0}}\right]\right)\varphi_0 =:$$

$$=: Q_{1;2}(x,y)\varphi_0,$$

тобто розв'язок $\varphi_n(x,y)$ системи (80) при $n=1$ має вигляд (81), (82).

З метою використання методу математичної індукції припустимо, що для $n \in \mathbb{N}$ координати $\varphi_{n-1}(x,y)$ і $\varphi_n(x,y)$ узагальненого власного вектора $\varphi(x,y) = (\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$ мають вигляд (81), (82), і покажемо, що $\varphi_{n+1}(x,y)$ також має вигляд (81), (82).

Власний вектор $\varphi_{n+1}(x,y)$ задовольняє систему рівнянь (80). Але система є перевизначеною, тобто вона містить $3(2n+3)$ лінійних рівнянь із лише $2n+3$ невідомими $\varphi_{n+1;0}$, $\varphi_{n+1;1}, \ldots, \varphi_{n+1;2(n+1)}$. Як початкові дані $2n+1$ використовуються значення $\varphi_{n;0}, \varphi_{n;1}, \ldots$ $\ldots, \varphi_{n;2n}$ координат вектора $\varphi_n(x,y)$. Аналогічно, з (83) при $j = 0, 1, \ldots, 2n$ маємо

$$J_A\varphi_{n;j} = x\varphi_{n;j}, \quad J_B\varphi_{n;j} = y\varphi_{n;j}, \quad J_{A^{-1}}\varphi_{n;j} = x^{-1}\varphi_{n;j}.$$

Згідно з теоремами 1 – 3 (а саме (33), (34), (53), (54), (73), (74)), $((2n+3)\times(2n+1))$-матриці c_n, r_n, v_n діють на вектор $\varphi_{n+1} \in \mathcal{H}_n$ за правилом

$$c_n\varphi_{n+1}(x,y) = \begin{bmatrix} c_{n;0,0} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{n;1,0} & c_{n;1,1} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n;n,0} & c_{n;n,1} & \ldots & c_{n;n,n} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n;2n-1,0} & c_{n;2n-1,1} & \ldots & c_{n;2n-1,n} & 0 & \ldots & 0 \\ c_{n;2n,0} & c_{n;2n,1} & \ldots & c_{n;2n,n} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}\varphi_{n+1}(x,y), \qquad (86)$$

$$r_n\varphi_{n+1}(x,y) = \begin{bmatrix} r_{n;0,0} & r_{n;0,1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ r_{n;1,0} & r_{n;1,1} & r_{n;1,2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{n;2n-1,0} & r_{n;2n-1,1} & r_{n;2n-1,2} & \ldots & 0 & 0 \\ r_{n;2n,0} & r_{n;2n,1} & r_{n;2n,2} & \ldots & r_{n;2n,2n+1} & 0 \end{bmatrix}\varphi_{n+1}(x,y), \qquad (87)$$

$$v_n\varphi_{n+1}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ v_{n;n,0} & \ldots & v_{n;n,n+2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n;2n-1,0} & \ldots & v_{n;2n-1,n+2} & \ldots & v_{n;2n-1,2n+1} & 0 \\ v_{n;2n,0} & \ldots & v_{n;2n,n+2} & \ldots & v_{n;2n,2n+1} & v_{n;2n,2n+2} \end{bmatrix}\varphi_{n+1}(x,y), \qquad (88)$$

де $\varphi_{n+1}(x,y) = (\varphi_{n+1;0}(x,y), \varphi_{n+1;1}(x,y), \ldots, \varphi_{n+1;2n+2}(x,y))$.

Побудуємо аналогічно до (85) $((2n+2)\times(2n+2))$-матрицю, використавши певні рядки матриць (86) – (88), а саме перші $n+1$ рядки матриці з (86), $(n+1)$-й рядок матриці (87) і останні $n+1$ рядки матриці (88):

$$\Delta_n \varphi_{n+1}(x,y) =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{n;0,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{n;1,0} & c_{n;1,1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n;n,0} & c_{n;n,1} & c_{n;n,2} & \ldots & c_{n;n,n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ r_{n;n,0} & r_{n;n,1} & r_{n;n,2} & \ldots & r_{n;n,n} & r_{n;n,n+1} & 0 & \ldots & 0 \\ v_{n;n,0} & v_{n;n,1} & v_{n;n,2} & \ldots & v_{n;n,n} & v_{n;n,n+1} & v_{n;n,n+2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n;2n,0} & v_{n;2n,1} & v_{n;2n,2} & \ldots & v_{n;2n,n} & v_{n;2n,n+1} & v_{n;2n,n+2} & \ldots & v_{n;2n,2n+2} \end{bmatrix} \varphi_{n+1}(x,y), \tag{89}$$

де $\varphi_{n+1}(x,y) = (\varphi_{n+1;0}(x,y), \varphi_{n+1;1}(x,y), \ldots, \varphi_{n+1;2n+2}(x,y))$.

Матриця (89) має обернену, тому що всі її елементи на головній діагоналі додатні (див. (33), (34), (53), (54), (73), (74)). Запишемо (80) у вигляді

$$c_n\varphi_{n+1}(x,y) = x\varphi_n(x,y) - a_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) - b_n\varphi_n(x,y),$$

$$r_n\varphi_{n+1}(x,y) = y\varphi_n(x,y) - p_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) - q_n\varphi_n(x,y),$$

$$v_n\varphi_{n+1}(x,y) = x^{-1}\varphi_n(x,y) - u_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) - w_n\varphi_n(x,y), \quad n \in \mathbb{N},$$

тобто

$$c_n\varphi_{n+1}(x,y) = (x - b_n)\varphi_n(x,y) - a_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y),$$

$$r_n\varphi_{n+1}(x,y) = (y - q_n)\varphi_n(x,y) - p_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y), \tag{90}$$

$$v_n\varphi_{n+1}(x,y) = (x^{-1} - w_n)\varphi_n(x,y) - u_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Перше рівняння з (90) має скалярний вигляд

$$c_{n;0,0}\varphi_{n+1,0}(x,y) = \left\{(x\mathbb{I} - b_n)Q_n(x,y) - a_{n-1}Q_{n-1}(x,y)\right\}_{n;j},$$

де $\mathbb{I}$ — одинична $((2n+2)\times(2n+2))$-матриця. Тепер при $j=0$ маємо

$$Q_{n+1,0}(x,y) := \varphi_{n+1,0}(x,y) = \frac{1}{c_{n;0,0}}\left\{(x\mathbb{I} - b_n)Q_n(x,y) - a_{n-1}Q_{n-1}(x,y)\right\}_{n;0}.$$

Отже, $Q_{n+1,0}(x,y) = k_{n+1,0}x^{(n+1)} + \ldots$. При $j=1$ отримуємо

$$c_{n;1,0}\varphi_{n+1,0}(x,y) + c_{n;1,1}\varphi_{n+1,1}(x,y) = \left\{(x\mathbb{I} - b_n)Q_n(x,y) - a_{n-1}Q_{n-1}(x,y)\right\}_{n;1},$$

$$Q_{n+1,1}(x,y) := \varphi_{n+1,1}(x,y) =$$

$$= \frac{1}{c_{n;1,1}} \{-c_{n;1,0} Q_{n+1,0}(x,y) + (x\mathbb{I} - b_n) Q_n(x,y) - a_{n-1} Q_{n-1}(x,y)\}_{n;1} .$$

Отже, $Q_{n+1,1}(x,y) = k_{n+1,1} y x^n + \ldots$. При $j = 2, 3, \ldots, n$ маємо

$$c_{n;j,0}\varphi_{n+1,0}(x,y) + c_{n;j,1}\varphi_{n+1,1}(x,y) + \ldots + c_{n;j,j+1}\varphi_{n+1,j}(x,y) =$$

$$= \{(x\mathbb{I} - b_n) Q_n(x,y) - a_{n-1} Q_{n-1}(x,y)\}_{n;j} ,$$

$$Q_{n+1,j}(x,y) := \varphi_{n+1,j}(x,y) = \frac{1}{c_{n;j,j+1}} \{-c_{n;j,0}\varphi_{n+1,0}(x,y) - c_{n;j,1}\varphi_{n+1,1}(x,y) - \ldots$$

$$\ldots - c_{n;j,j}\varphi_{n+1,j-1}(x,y) + (x\mathbb{I} - b_n) Q_n(x,y) - a_{n-1} Q_{n-1}(x,y)\}_{n;j} .$$

Отже, $Q_{n+1,j}(x,y) = k_{n+1,j} y^{n+1-|j-(n+1)|} x^{(n+1-j)} + \ldots$. При $j = n+1$ окремо одержуємо

$$r_{n;n,0}\varphi_{n+1,0}(x,y) + r_{n;n,1}\varphi_{n+1,1}(x,y) + \ldots + r_{n;n,n+1}\varphi_{n+1,n+1}(x,y) =$$

$$= \{(y\mathbb{I} - q_n) Q_n(x,y) - p_{n-1} Q_{n-1}(x,y)\}_{n;n+1} ,$$

$$Q_{n+1,n+1}(x,y) := \varphi_{n+1,n+1}(x,y) = \frac{1}{r_{n;n,n+1}} \{-r_{n;n+1,0}\varphi_{n+1,0}(x,y) - r_{n;n+1,1}\varphi_{n+1,1}(x,y) - \ldots$$

$$\ldots - r_{n;n,n}\varphi_{n+1,n}(x,y) + (y\mathbb{I} - q_n) Q_n(x,y) - a_{n-1} Q_{n-1}(x,y)\}_{n;n+1} .$$

Отже, $Q_{n+1,n+1j}(x,y) = k_{n+1,n+1} y^{n+1} + \ldots$.

При $j = n+2, n+3, \ldots, 2n+2$ маємо

$$v_{n;2n,0}\varphi_{n+1,0}(x,y) + v_{n;2n,1}\varphi_{n+1,1}(x,y) + \ldots + v_{n;2n,2n+2}\varphi_{n+1,j}(x,y) =$$

$$= \left\{(x^{-1}\mathbb{I} - w_n) Q_n(x,y) - u_{n-1} Q_{n-1}(x,y)\right\}_{n;j} ,$$

$$Q_{n+1,j}(x,y) := \varphi_{n+1,j}(x,y) = \frac{1}{v_{n;2n,j}} \{-v_{n;j,0}\varphi_{n+1,0}(x,y) -$$

$$-v_{n;j,1}\varphi_{n+1,1}(x,y) - \ldots - v_{n;2n,2n+1}\varphi_{n+1,j-1}(x,y) +$$

$$+(x\mathbb{I} - w_n) Q_n(x,y) - u_{n-1} Q_{n-1}(x,y)\}_{n;j} .$$

Отже, $Q_{n+1,j}(x,y) = k_{n+1,j} y^{n+1-|j-(n+1)|} x^{(n+1)-j)} + \ldots$.

В останніх міркуваннях слід лише взяти до уваги, що елементи на головній діагоналі матриці Δ_n з (89), тобто $c_{n;0,0}, c_{n;1,1}, \ldots, c_{n;n,n}, r_{n;n,n+1}, v_{n;n,n+2}, \ldots, v_{n;2n,2n+2}$, є додатними завдяки умовам (34), (54) та (74).

Лему 11 доведено.

Зауважимо, що у лемі не стверджується існування розв'язку переозначеної системи (80) для довільної початкової умови $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, а лише показано, що узагальнений власний вектор з $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ операторів B та A і A^{-1} є розв'язком (80) і має вигляд (81), (82).

Далі зручно розглядати $Q_n(x,y)$ із фіксованими x,y як лінійний оператор, що діє з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_n$, тобто $\mathcal{H}_0 \ni \varphi_0 \longmapsto Q_n(x,y)\varphi_0 \in \mathcal{H}_n$. Також $Q_n(x,y)$ розглядається як операторнозначний поліном зі змінними $\{x,y\} \in \mathbb{R}^2$. Тоді спряжений оператор $Q_n^*(x,y) = (Q_n(x,y))^* \colon \mathcal{H}_n \longrightarrow \longrightarrow \mathcal{H}_0$. Використавши поліноми $Q_n(x,y)$, побудуємо зображення для $\Phi_{j,k}(x,y)$.

Лема 12. *Оператор* $\Phi_{j,k}(x,y)$ $\forall\{x,y\} \in \mathbb{R}^2$ *має зображення*

$$\Phi_{j,k}(x,y) = Q_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y)Q_k^*(x,y) \colon \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j, \quad j,k \in \mathbb{N}_0, \tag{91}$$

де $\Phi_{0,0}(x,y) \geq 0$ — *скаляр.*

Доведення. Для кожного фіксованого $k \in \mathbb{N}_0$ вектор $\varphi = \varphi(x,y) = (\varphi_j(x,y))_{j=0}^{\infty}$, де

$$\varphi_j(x,y) = \Phi_{j,k}(x,y) = \pi_j \Phi(x,y) \pi_k \in \mathcal{H}_j, \quad \{x,y\} \in \mathbb{R}^2,$$

є узагальненим розв'язком з $(\mathbf{l}_{\text{fin}})'$ системи рівнянь

$$J_A\varphi = x\varphi, \quad J_B\varphi = y\varphi, \quad J_{A^{-1}}\varphi = x^{-1}\varphi, \tag{92}$$

оскільки $\Phi(x,y)$ — проєктор на узагальнений власний вектор операторів B та A і A^{-1} із відповідними узагальненими власними значеннями y та x і x^{-1}. Таким чином, для будь-якого $g \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$ маємо

$$(\varphi, J_A g)_{\mathbf{l}_2} = x(\varphi, g)_{\mathbf{l}_2}, \quad (\varphi, J_B g)_{\mathbf{l}_2} = y(\varphi, g)_{\mathbf{l}_2}, \quad (\varphi, J_{A^{-1}} g)_{\mathbf{l}_2} = x^{-1}(\varphi, g)_{\mathbf{l}_2}.$$

Отже, $\varphi = \varphi(x,y) \in \mathbf{l}_2(p^{-1})$ існує, як звичайний розв'язок рівнянь (92) з початковими даними $\varphi_0 = \pi_0\Phi(x,y)\pi_k \in \mathcal{H}_0$.

За лемою 11 з урахуванням (81) отримуємо

$$\Phi_{j,k}(x,y) = Q_j(x,y)(\Phi_{0,k}(x,y)), \quad j \in \mathbb{N}_0. \tag{93}$$

Оператор $\Phi(x,y) \colon \mathbf{l}_2(p) \longrightarrow \mathbf{l}_2(p^{-1})$ є істотно самоспряженим на $\mathbf{l}_2$, як похідна розкладу одиниці операторів B та A і (A^{-1}) на $\mathbf{l}_2$ відносно спектральної міри. Отже, згідно з (91) отримуємо

$$(\Phi_{j,k}(x,y))^* = (\pi_j\Phi(x,y)\pi_k)^* = \pi_k\Phi(x,y)\pi_j = \Phi_{k,j}(x,y), \quad j,k \in \mathbb{N}_0. \tag{94}$$

Для фіксованого $j \in \mathbb{N}_0$ з (94) і попередніх міркувань випливає, що вектор

$$\psi = \psi(x,y) = (\psi_k(x,y))_{k=0}^{\infty}, \quad \psi_k(x,y) = \Phi_{k,j}(x,y) = (\Phi_{j,k}(x,y))^*,$$

є звичайним розв'язком рівнянь (92) із початковою умовою $\psi_0 = \Phi_{0,j}(x,y) = (\Phi_{j,0}(x,y))^*$.

Знову використовуючи лему 11, отримуємо зображення типу (93):

$$\Phi_{k,j}(x,y) = Q_k(x,y)(\Phi_{0,j}(x,y)), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{95}$$

Враховуючи (94) і (95), одержуємо

$$\Phi_{0,k}(x,y) = (\Phi_{k,0}(x,y))^* = (Q_k(x,y)\Phi_{0,0}(x,y))^* = \Phi_{0,0}(x,y)(Q_k(x,y))^*, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{96}$$

де використано нерівність $\Phi_{0,0}(x,y) \geq 0$, яка випливає з (77) і (78). Підставляючи (96) у (93), отримуємо (91).

Лему 12 доведено.

Тепер можна записати рівність Парсеваля (79) у більш зручній формі. Для цього підставимо (91) з $\Phi_{j,k}(x,y)$ в (79):

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\Phi_{j,k}(x,y) f_k, g_j)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y) =$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (Q_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y)Q_k^*(x,y) f_k, g_j)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y) =$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (Q_k^*(x,y) f_k, Q_j^*(x,y) g_j)_{\mathbf{l}_2} d\rho(x,y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(x,y) f_k \right) \overline{\left(\sum_{j=0}^{\infty} Q_j^*(x,y) g_j \right)} d\rho(x,y), \tag{97}$$

$$d\rho(x,y) = \Phi_{0,0}(x,y)\, d\sigma(x,y) \quad \forall f,g \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}.$$

Введемо перетворення Фур'є (позначення $\widehat{\ }$), породжене обмеженими самоспряженими комутуючими операторами B та A і A^{-1} в $\mathbf{l}_2$:

$$\mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\mathrm{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^*(x,y) f_n \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)) \quad \forall f \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}. \tag{98}$$

Отже, (97) приводить до рівності Парсеваля в остаточній формі

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y) \overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y) \quad \forall f,g \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}. \tag{99}$$

Перетворення (99) розширюється за неперервністю для будь-яких $f,g \in \mathbf{l}_2$.

Ортогональність поліномів $Q_n^*(x,y)$ випливає з (98) і (99). Дійсно, достатньо взяти $f = (0,\ldots,0,f_k,0,\ldots),\ f_k \in \mathcal{H}_k,\ g = (0,\ldots,0,g_j,0,\ldots),\ g_j \in \mathcal{H}_j$ в (98) і (99) . Тоді

$$\int_{\mathbb{R}^2} (Q_k^*(x,y) f_k) \overline{(Q_j^*(x,y) g_j)}\, d\rho(x,y) = \delta_{j,k} (f_j, g_j)_{\mathcal{H}_j} \quad \forall k,j \in \mathbb{N}_0. \tag{100}$$

Використавши зображення (81) для цих поліномів, запишемо рівняння (100) у класичній формі. Для цього зауважимо, що $Q_0^*(x,y) = \bar{Q}_0(x,y)$ і для $n \in \mathbb{N}$, згідно з (81),

$$Q_n(x,y) = (Q_{n;0}(x,y), Q_{n;1}(x,y), \ldots, Q_{n;2n}(x,y)) \colon \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_n.$$

Отже, для спряженого оператора $Q_n^*(x,y) \colon \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_0$ маємо

$$(Q_n(x,y)\xi, \eta)_{\mathcal{H}_n} = ((Q_{n;0}(x,y)\xi, Q_{n;1}(x,y)\xi, \ldots, Q_{n;2n}(x,y)\xi), (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{2n}))_{\mathcal{H}_n} =$$

$$= Q_{n;0}(x,y)\xi\bar{\eta}_0 + Q_{n;1}(x,y)\xi\bar{\eta}_1 + \ldots + Q_{n;2n}(x,y)\xi\bar{\eta}_{2n} =$$

$$= \xi\overline{(\overline{Q_{n;0}(x,y)}\eta_0 + \overline{Q_{n;1}(x,y)}\eta_1 + \ldots + \overline{Q_{n;2n}(x,y)}\eta_{2n})} = (\xi, Q_n^*(x,y)\eta)_{\mathcal{H}_0}$$

$$\forall \xi \in \mathcal{H}_0, \quad \eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{2n}) \in \mathcal{H}_n,$$

тобто $Q_n^*(x,y)\eta = \overline{Q_{n;0}(x,y)}\eta_0 + \overline{Q_{n;1}(x,y)}\eta_1 + \ldots + \overline{Q_{n;2n}(x,y)}\eta_{2n}$. Завдяки останній рівності для $n \in \mathbb{N}$ і $f_n = (f_{n,0}, f_{n,1}, \ldots, f_{n,2n}) \in \mathcal{H}_n$, $\{x, y\} \in \mathbb{R}^2$ отримуємо

$$Q_n^*(x,y)f_n = \overline{Q_{n;0}(x,y)}f_{n;0} + \overline{Q_{n;1}(x,y)}f_{n;1} + \ldots + \overline{Q_{n;2n}(x,y)}f_{n;2n}, \quad Q_0^*(x,y) = 1. \tag{101}$$

Таким чином, (100) набирає вигляду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{\alpha=0}^{2k} \overline{Q_{k;\alpha}(x,y)} f_{k;\alpha} \right) \overline{\left(\sum_{\beta=0}^{2j} \overline{Q_{j;\beta}(x,y)} f_{j;\beta} \right)} d\rho(x,y) = \delta_{j,k} \sum_{\alpha=0}^{2j} f_{j;\alpha} \bar{g}_{j;\alpha}$$

$$\forall f_{k;0}, f_{k;1}, \ldots, f_{k;2k},\ g_{j;0}, g_{j;1}, \ldots, g_{j;2j}, \quad j,k \in \mathbb{N}_0.$$

Ця рівність є еквівалентною співвідношенню ортогональності у звичайній класичній формі:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \overline{Q_{k;\beta}^*(x,y)} Q_{j;\alpha} d\rho(x,y) = \delta_{j,k}\delta_{\alpha,\beta} \quad (Q_{0;0} = Q_0(x,y))$$

$$\forall j,k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall \alpha = 0,1,\ldots,2j, \quad \beta = 0,1,\ldots,2k. \tag{102}$$

Завдяки (101) перетворення Фур'є (98) можна записати у вигляді

$$\hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{2n} \overline{Q_{n;\alpha}(x,y)} f_{n;\alpha} \quad \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{l}_2, \quad \{x,y\} \in \mathbb{R}^2.$$

Використовуючи наведені вище результати, можемо сформулювати спектральну теорему для комутуючих обмежених самоспряжених операторів B та A і A^{-1}.

Теорема 4. *Нехай у просторі* (7)

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

задано комутуючі обмежені самоспряжені оператори B та A і A^{-1} на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ блочними тридіагональними матрицями типу Якобі J_B вигляду (31) *та J_A і $J_{A^{-1}}$ вигляду* (51) *і* (71) *із дією* (35) *та* (55) *і* (75) *відповідно. Припускається, що коефіцієнти a_n, b_n, c_n та p_n, q_n, r_n і u_n, w_n, v_n обмежені однією величиною для $n \in \mathbb{N}_0$, деякі елементи цих матриць обов'язково є нульовими, а деякі — додатними згідно з* (33), (34) *та* (53), (54) *і* (73), (74).

Розклад за узагальненими власними векторами для B та A і A^{-1} полягає у такому. Згідно з лемою 11, *введемо, використавши початкові дані $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, розв'язок $\varphi(x,y) = (\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n(x,y) \in \mathcal{H}_n$, рівнянь* (80) (*який існує завдяки спектральній проєкційній теоремі*) *для $\{x,y\} \in \in \mathbb{R}^2$:*

$$\varphi_n(x,y) = Q_n(x,y)\varphi_0 = (Q_{n;0}(x,y), Q_{n;1}(x,y), \ldots, Q_{n;2n}(x,y))\varphi_0,$$

де $Q_{n;\alpha}(x,y)$, $\alpha = 0,1,\ldots,2n$, — поліноми за змінними y та „x" і „x^{-1}".

Тоді перетворення Фур'є має вигляд

$$\mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^*(x,y) f_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{2n} \overline{Q_{n;\alpha}(x,y)} f_{n;\alpha} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)). \tag{103}$$

Тут $Q_n^*(x,y)\colon \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_0$ *— спряжений оператор до* $Q_n(x,y)\colon \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_n$, $d\rho(x,y)$ *— імовірнісна спектральна міра* B *та* A *і* A^{-1}.

При цьому рівність Парсеваля для будь-яких $f, g \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$ *має вигляд*

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y), \quad (J_B f, g)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} y\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y),$$

$$(J_A f, g)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y), \quad (J_{A^{-1}} f, g)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y). \tag{104}$$

Рівності (103) *і* (104) *розширюються за неперервністю для будь-яких* $f, g \in \mathbf{l}_2$, *перетворюючи відображення* (103) *в унітарний оператор, який відображає весь простір* $\mathbf{l}_2$ *у весь* $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$.

Множина поліномів $\overline{Q_{n;\alpha}(x,y)}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 2n$, *і* $Q_{0;0}(x,y) = 1$, *є тотальною в* $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$, *і вони утворюють у ньому ортонормовану систему в сенсі* (102).

Доведення. Залишилося лише показати, що ортогональні поліноми $\overline{Q_{n;\alpha}(x,y)}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 2n$ і $Q_{0;0}(x,y) = 1$, утворюють тотальну множину у просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$. З цією метою зауважимо, що завдяки компактності носія міри $d\rho(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$ елементи $y^t x^j$, $t \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$, утворюють тотальну множину в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$.

Припустимо протилежне, тобто система не є тотальною. Тоді існує ненульова функція $h(x,y) \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$, яка є ортогональною до всіх поліномів і, отже, згідно з (82) до всіх $y^t x^j$, $t \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$. Таким чином, $h(x,y) = 0$.

Теорему доведено.

Остання теорема розв'язує пряму спектральну задачу для комутуючих обмежених самоспряжених операторів B та A і A^{-1}, породжених у просторі $\mathbf{l}_2$ матрицями J_B та J_A і $J_{A^{-1}}$ вигляду (31) та (51) і (71) відповідно.

Обернена спектральна задача полягає у побудові за заданою мірою $d\rho(x,y)$ із компактним носієм на $\mathbb{R}^2$ обмежених комутуючих ермітових матриць J_B та J_A і $J_{A^{-1}}$ вигляду (31) та (51) і (71), у яких спектральна міра збігається з $d\rho(x,y)$.

Твердження. *Побудова проводиться згідно з теоремами* 1 – 3 *із використанням процедури ортогоналізації за Шмідтом системи* (2). *Для матриць* J_B *та* J_A *і* $J_{A^{-1}}$ *вигляду* (31) *та* (51) *і* (71), *побудованих за мірою* $d\rho(x,y)$, *спектральна міра відповідних самоспряжених операторів* B *та* A *і* A^{-1} *збігається із початковою.*

Доведення. Твердження є правильним, оскільки множина поліномів $\overline{Q_{n,\alpha}(x,y)}$, $\alpha = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 2n$, $n \in \mathbb{N}_0$, пов'язаних із B та A і A^{-1}, є ортонормованою в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ і, згідно з лемою 11, є побудованою за множиною $y^t x^j,\ t \in \mathbb{N}_0,\ j \in \mathbb{Z}$, а також тією ж самою, що і система (3), побудована по $y^t x^j,\ t \in \mathbb{N}_0,\ j \in \mathbb{Z}$. Отже,

$$Q_0(x,y) = 1 = P_0(x,y), \quad \overline{Q_{n,\alpha}(x,y)} = P_{n;\alpha}(x,y) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha = 0, 1 \ldots, 2n. \tag{105}$$

Оскільки обидві системи поліномів є тотальними в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$, то з (105) видно, що спектральна міра, яка побудована за операторами, і початкова збігаються.

Зауважимо, що вирази (19) та (36) і (56) (як і у класичному випадку) відновлюють елементи матриць (31) та (51) і (71) за заданою мірою $d\rho(x,y)$ операторів, побудованих по J_B та J_A і $J_{A^{-1}}$.

4. Блочні матриці типу Якобі, описані в теоремах 1 – 3. Задача внутрішнього опису матриць J_B та J_A і $J_{A^{-1}}$ вигляду (31) та (51) і (71) є досить складною. Під описом розуміється параметризація, як для тригонометричної проблеми моментів CMV-матриці [4, 6, 7] або сильної (дійсної одновимірної) проблеми моментів [8]. Складність полягає навіть у описі матриць J_A і $J_{A^{-1}}$, для яких виконується рівність $J_A J_{A^{-1}} - J_{A^{-1}} J_A = 0$ на фінітних векторах. А крім цього необхідні ще і рівності $J_B J_{A^{-1}} - J_{A^{-1}} J_B = 0$ та $J_B J_A - J_A J_B = 0$ на фінітних векторах. Також нерозв'язаною складною задачею залишається пошук умов на коефіцієнти матриць J_B та J_A і $J_{A^{-1}}$, за яких матриці породжують необмежені, але істотно самоспряжені оператори.

Враховуючи комплекс зазначених проблем, наведемо лише приклад матриць J_B та J_A і $J_{A^{-1}}$, які повністю відповідають теоремам 1 – 3.

***Приклад*.** Покладемо

$$J_B = \left[\begin{array}{c|ccc|ccccc|ccccccc}
0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & & & \ddots & & & & & \ddots & & & & & & & \ddots
\end{array}\right]$$

і далі $p_{n;\alpha,\alpha+1} = 1,\ \alpha = 0, 1, \ldots, 2n;\ r_n$ симетричні до $p_n;\ q_n$ — нульові матриці, $n \in \mathbb{N}$;

$$J_A = \left[\begin{array}{c|ccc|ccccc|ccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & 0 & & & \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & & & \ddots & & & & & \ddots & & & & & & & \ddots
\end{array}\right]$$

і далі $a_{n;\alpha,\alpha} = 1,\ a_{n;\alpha,2n-\alpha} = (-1)^{\alpha},\ \alpha = 0,1,\ldots,n,\ b_{n;\alpha,\alpha} = 1,\ c_{n;\alpha,2n-\alpha} = (-1)^{\alpha},\ \alpha = = 0,1,\ldots,2n\ ((-1)^0 =: 1),\ n \in \mathbb{N}$;

$$J_{A^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc|ccccc|ccccccc}
0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & 0 & & & \\
1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\
\hline
 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & \ddots & & & & & \ddots & & & & & & & \ddots
\end{array}\right]$$

і далі $u_{n;2n-\alpha,2n+2-\alpha} = 1$, $u_{n;2n-\alpha,\alpha} = (-1)^{\alpha}$, $\alpha = 0,1,\ldots,n$, $w_{n;\alpha,\alpha} = -1$, $v_{n;\alpha,2n-\alpha} = (-1)^{\alpha}$, $\alpha = 0,1,\ldots,2n\ ((-1)^0 =: 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Неважко переконатися, що наведені матриці J_B та J_A і $J_{A^{-1}}$ комутують між собою у звичайному сенсі та $J_A J_{A^{-1}} = I$.

Висловлюємо щиру подяку професору Деркачу В. О. за ретельний перегляд рукопису та вкрай важливі зауваження, які покращили роботу.

Література

1. Ю. М. Березанский, *Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наук. думка, Киев (1965); *English translation*: Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1968).
2. Ю. М. Березанский, Ю. Г. Кондратьев, *Спектральные методы в бесконечномерном анализе*, Наук. думка, Киев (1988).
3. Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель, *Функциональный анализ: Курс лекций*, Вища шк., Київ (1990).
4. Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin, *The direct and inverce spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices*, Methods Funct. Anal. and Topology, **11**, № 4, 327 – 345 (2005).
5. Ю. М. Березанський, М. Є. Дудкін, *Якобієві матриці і проблема моментів*, Праці Ін-ту математики НАН України, **105** (2019).
6. M. J. Cantero, L. Moral, L. Velázquez, *Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle*, Linear Algebra and Appl., **362**, 29 – 56 (2003).
7. M. E. Dudkin, *The exact inner structure of the block Jacobi type unitary matrices connected with the corresponding direct and inverse spectral problems matrices*, Methods Funct. Anal. and Topology, **14**, № 2, 168 – 176 (2008).
8. M. E. Dudkin, *The inner structure of the Jacobi – Laurent matrix related to the strong Hamburger moment problem*, Methods Funct. Anal. and Topology, **19**, № 2, 97 – 107 (2013).
9. М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова, *Двовимірна дійсна напівсильна проблема мементів та відповідні блочні матриці*, I, Укр. мат. журн., **72**, № 8, 1047 – 1063 (2020).

Одержано 05.04.20