DOI: 10.37863/umzh.v72i12.6261

УДК 517.928

$\boxed{\text{А. М. Самойленко}}$ (Ін-т математики НАН України, Київ),
**П. Ф. Самусенко** (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ)

# АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКАМИ ПОВОРОТУ. I

This paper deals with the problem of finding asymptotic solutions for singular perturbed linear differential algebraic equations with simple turning point. Technique of constructing the asymptotic solutions is developed.

Розроблено алгоритм знаходження асимптотичних розв'язків сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи з простою точкою повороту.

**Вступ.** Систематичні дослідження диференціальних рівнянь з точками повороту було розпочато в середині XX століття. Так, у працях Р. Лангера лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\lambda^2 q(t) + r(t)\right) x = 0,$$
$$q(t) = (t - \widetilde{t})^i \widetilde{q}(t), \quad i \in N, \quad \widetilde{q}(t) \neq 0, \quad t \in [0;T], \tag{1}$$

з великим параметром $\lambda$ зводилось до рівняння, коефіцієнти якого для великих значень параметра $\lambda$ мало відрізнялись від відповідних коефіцієнтів деякого еталонного рівняння (у даному випадку — рівняння Ейрі). Це дозволило побудувати два формальні лінійно незалежні розв'язки рівняння (1) та довести їх асимптотичний характер [1].

Т. Черрі, на відміну від Р. Лангера, використовуючи переважно перетворення незалежної змінної, побудував загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді лінійної комбінації функцій Бесселя [2].

Подальшого розвитку метод еталонного рівняння набув у працях А. О. Дородніцина, де було обґрунтовано вибір еталонного рівняння для рівняння типу (1), знайдено загальний розв'язок заданого рівняння та досліджено асимптотичні властивості власних значень відповідної задачі Штурма – Ліувілля [3].

Синтезуючи результати Р. Лангера, Т. Черрі та А. О. Дородніцина, В. Вазов розробив метод асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \quad t \in [0;T], \tag{2}$$

де $A(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця порядку 2, $A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ і $\frac{d}{dt}(\det A(t,0))_{|t=0} \neq 0$, $\varepsilon$ — малий параметр. При цьому система (2) за допомогою лінійного перетворення $x = P(t,\varepsilon)y$ зводилась до системи

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = B(t)y, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix},$$

фундаментальна матриця якої відома і записується через функції Ейрі [4]. Аналогічні результати для системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + A_1(t)y,$$

$$\varepsilon\,\frac{dy}{dt} = (B(t) + \varepsilon B_1(t))y + \varepsilon B_2(t)x$$

з визначеною раніше матрицею $B(t)$ отримав А. М. Самойленко [5].

Іншим, більш загальним, методом асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем із точками повороту є метод зрощування, згідно з яким асимптотичні розвинення розв'язків будуються окремо на двох різних відрізках: на відрізку, що містить точку повороту (внутрішнє розвинення), і на відрізку, що її не містить (зовнішнє розвинення). Якщо області застосування двох зазначених асимптотик розв'язків для малих $\varepsilon$ перекриваються, то можна провести зрощування самих розв'язків, тобто побудувати розв'язок системи на заданому відрізку. Так, у працях В. Вазова для системи (2) з нільпотентною жордановою клітиною $A(0,0)$ на відрізках $\left[0; c_1\varepsilon^{\frac{n}{n+2}}\right]$ і $\left[c_2\varepsilon^{\frac{n}{n+1}}; T\right]$ побудовано фундаментальні матриці, наведено їхні асимптотичні розвинення та проведено зрощування знайдених асимптотик розв'язків [6].

Асимптотичне розщеплення систем лінійних диференціальних рівнянь з особливою точкою та точкою повороту, яке ґрунтувалось на теоремі про існування такої неособливої достатньо гладкої матриці $T(t,\varepsilon)$, що $T^{-1}(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)T(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon)$, де $\Omega(t,\varepsilon)$ — пряма сума квадратних матриць $\Omega_i(t,\varepsilon)$ порядку $m_i$, матриця $\Omega_i(0,0)$ має одне власне значення $\lambda_i$ кратності $m_i$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu = n$ і $\lambda_i \neq \lambda_j$, коли $i \neq j$, $i,j = \overline{1,\nu}$, [7], проводилось М. Івано [8, 9], Д. Расселлом і Й. Сибуєю [10, 11]. Таким чином, достатньо було дослідити випадок, коли матриця $A(0,0)$ має лише одне власне значення.

Оригінальний підхід до асимптотичного аналізу сингулярно збурених задач із точками повороту запропонував С. О. Ломов [12]. У розробленому ним методі регуляризації сингулярно збурена задача шляхом переходу до простору більшого виміру стає регулярно збуреною, що дає змогу шукати її розв'язок у вигляді ряду за степенями малого параметра. Зазначимо, що С. О. Ломову вдалось знайти достатні умови збіжності асимптотичних розвинень розв'язків деяких сингулярно збурених задач.

Класичним методом побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених нелінійних задач, що ґрунтується на теоремах А. М. Тихонова [13] про залежність між відповідними розв'язками вихідної (невиродженої) задачі та розв'язками виродженої задачі (вважаємо, що малий параметр дорівнює нулю), є метод примежових функцій [14], який у випадку, коли дійсні частини власних значень матриці $A(0,0)$ відмінні від нуля, можна застосовувати для побудови формальних розв'язків системи (2) і при наявності точок повороту.

Систему диференціальних рівнянь (2) можна вважати частинним випадком деякої системи диференціально-алгебраїчних рівнянь (ДАР). Інтерес до вивчення ДАР пов'язаний з використанням їх у задачах теорії диференціальних рівнянь [15 – 20], оптимального керування [15, 17, 18], теорії електричних кіл [15, 19, 21], хімічної кінетики [22, 23] тощо.

Важливим типом ДАР є сингулярно збурені системи

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\,\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \quad t \in [0;T], \tag{3}$$

де

$$A(t,\varepsilon)=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_k(t),\quad B(t,\varepsilon)=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k B_k(t).$$

Незважаючи на те, що системи (3) почали досліджувати ще в 70-х роках минулого століття, на даний час, взагалі кажучи, не існує зручних для практики методів їхнього розв'язання. Винятком є лише системи зі сталими коефіцієнтами, для яких побудовано фундаментальну матрицю у вигляді збіжного ряду за параметром $\varepsilon$ [24].

У працях А. М. Самойленка, М. І. Шкіля і В. П. Яковця було з'ясовано, що за певних умов, накладених на збурювальні матриці $A_k(t),\ B_k(t),\ k\in N$, система (3) має два типи формальних розв'язків. Розв'язки першого типу відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $A_0(t)-\lambda B_0(t)$, а розв'язки другого типу — нескінченним. При цьому зазначені розв'язки зображуються асимптотичними розвиненнями за дробовими степенями параметра $\varepsilon$, показники яких залежать як від кратності коренів відповідного характеристичного рівняння

$$\det(A_0(t)-\lambda B_0(t))=0$$

та елементарних дільників, що їм відповідають, так і від поведінки збурювальних коефіцієнтів системи [16]. При цьому випадок точок повороту не розглядався.

У даній статті досліджується сингулярно збурена диференціально-алгебраїчна система (3) з точкою повороту. Узагальнюючи результати В. Вазова, розв'язки системи (3) автори побудували на двох відрізках $[0;k_0'\varepsilon^{\kappa}]$, $[k_0\varepsilon^{\kappa},t_0]$, $t_0\leq T$, де $k_0'>k_0$. Проведено зрощування знайдених асимптотичних розвинень.

Врахування впливу збурювальних членів дозволило звести поставлену задачу на відрізку $[k_0\varepsilon^{\kappa};t_0]$ до задачі про побудову асимптотичних розв'язків системи (2) за умови простих коренів характеристичного рівняння $\det(A(t,0)-\lambda E)=0$ [25–28]. Такий підхід у лінійних задачах без точок повороту можна використати для знаходження формального розв'язку, обмежившись випадком простих коренів відповідного характеристичного рівняння. Це значно спрощує відомі алгоритми побудови асимптотичних розв'язків систем (2), (3) за умови більш складної структури елементарних дільників матриць $A(t,0)-\lambda E$ або $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ [27, 16]. Для нелінійних систем врахування збурювальних членів також може суттєво спростити поставлену задачу і звести її до класичного випадку [28, 29].

Члени внутрішнього розвинення побудовано за допомогою зміни масштабу незалежної змінної [6, 14].

**Сингулярно збурені системи з точками повороту.** Побудову асимптотичних розв'язків системи (3) проведено окремо на двох відрізках — $\left[k_0\varepsilon^{\frac{p}{p+1}};t_0\right]$, $t_0\leq T$, і $\left[0;k_0'\varepsilon^{\frac{p}{p+1}}\right]$, числа $k_0,\ k_0',\ t_0,\ p$ визначено нижче. Здійснено зрощування побудованих асимптотичних розвинень та визначено фундаментальну матрицю системи (3) на відрізку $[0;t_0]$.

Алгоритм знаходження членів внутрішнього розвинення розв'язків системи (3) і зрощування знайдених асимптотик буде наведено у другій частині роботи.

Отже, нехай виконуються такі умови:

1) $A(0,0)=\operatorname{diag}\{E_q,J_p\},\ B(0,0)=\operatorname{diag},\{J_q,E_p\},\ p+q=n$, де $E_q$ — одинична матриця порядку $q$, $J_q$ — квадратна матриця порядку $q$, елементи верхньої наддіагоналі якої дорівнюють 1, решта елементів — нулю; аналогічно визначаються матриці $E_p$ і $J_p$;

2) $\left.\dfrac{d}{dt}(\det\, A(t,0))\right|_{t=0} \neq 0,\ \left.\dfrac{d}{dt}(\det\, B(t,0))\right|_{t=0} \neq 0.$

**Зовнішнє розвинення.** Згідно з результатами [7, 30, 31] існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $P(t,\varepsilon),\ Q(t,\varepsilon),\ (t,\varepsilon)\in[0;t_1]\times[0;\varepsilon_1],\ t_1\le T,\ \varepsilon_1\le\varepsilon_0$, для яких мають місце рівності

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\Omega(t,\varepsilon)\equiv\operatorname{diag}\{E_q(t,\varepsilon),J_p(t,\varepsilon)\}, \tag{4}$$

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=H(t,\varepsilon)\equiv\operatorname{diag}\{J_q(t,\varepsilon),E_p(t,\varepsilon)\}, \tag{5}$$

де

$$\Omega(t,0)=\Omega(t)\equiv\operatorname{diag}\{E_q,J_p(t)\},\quad H(t,0)=H(t)\equiv\operatorname{diag}\{J_q(t),E_p\},$$

$$J_q(t)=\begin{pmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&1\\b_q(t)&b_{q-1}(t)&b_{q-2}(t)&\ldots&b_1(t)\end{pmatrix},$$

$$J_p(t)=\begin{pmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&1\\a_p(t)&a_{p-1}(t)&a_{p-2}(t)&\ldots&a_1(t)\end{pmatrix},$$

функції $b_i(t)=t\widetilde{b}_i(t),\ i=\overline{1,q}$, і $a_i(t)=t\widetilde{a}_i(t),\ i=\overline{1,p}$, визначаються відповідно характеристичними многочленами матриць $B(t,0)$ і $A(t,0)$ [31]. При цьому з умови 2 випливає, що $\widetilde{b}_q(0)\neq 0$ і $\widetilde{a}_p(0)\neq 0$.

Покладемо

$$x(t,\varepsilon)=Q(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon).$$

Тоді система (3) набере вигляду

$$\varepsilon H(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt}=C(t,\varepsilon)y, \tag{6}$$

де $C(t,\varepsilon)=\Omega(t,\varepsilon)-\varepsilon H(t,\varepsilon)Q^{-1}(t,\varepsilon)Q'(t,\varepsilon)$. За побудовою $Q'(t,0)=0$ [30].

Нехай

$$H(t,\varepsilon)=\sum_{k\ge0}\varepsilon^kH_k(t),\quad C(t,\varepsilon)=\sum_{k\ge0}\varepsilon^kC_k(t),$$

де $H_0(t)=H(t),\ C_0(t)=\Omega(t)$.

Покладаючи

$$y(t,\varepsilon)=U(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon),\quad U(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^kU_k(t,\varepsilon),$$

у системі (6), отримуємо

$$\varepsilon H(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)\frac{dz}{dt} = \big(C(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon) - \varepsilon H(t,\varepsilon)U'(t,\varepsilon)\big)\,z. \tag{7}$$

Матрицю $U(t,\varepsilon)$ побудуємо так, щоб справджувалась рівність

$$C(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon) - \varepsilon H(t,\varepsilon)U'(t,\varepsilon) = H(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)\left(\Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\Delta(t,\varepsilon)\right), \tag{8}$$

де

$$\Lambda(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\,\{\lambda_1(t,\varepsilon), \lambda_2(t,\varepsilon), ..., \lambda_n(t,\varepsilon)\} \equiv \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \Lambda_k(t,\varepsilon),$$

а $\Delta(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця порядку $n$, що також підлягає визначенню.

Запишемо рівність (8) таким чином:

$$(C_0(t) + \varepsilon C_1(t))\,U(t,\varepsilon) - (H_0(t) + \varepsilon H_1(t))\,U(t,\varepsilon)\Lambda(t,\varepsilon) = \varepsilon H(t,\varepsilon)U'(t,\varepsilon) -$$
$$- \sum_{k\ge 2} \varepsilon^k C_k(t)U(t,\varepsilon) + \sum_{k\ge 2} \varepsilon^k H_k(t)U(t,\varepsilon)\Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} H(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)\Delta(t,\varepsilon). \tag{9}$$

За побудовою

$$C_1(t) = \operatorname{diag}\{C_{1q}(t), C_{1p}(t)\}, \quad H_1(t) = \operatorname{diag}\{H_{1q}(t), H_{1p}(t)\},$$

де $C_{1q}(t),\ H_{1q}(t)$ — квадратні матриці порядку $q$.

Нехай $K(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{E_q + \varepsilon C_{1q}(t), E_p + \varepsilon H_{1p}(t)\}$ і

$$K^{-1}(t,\varepsilon) = \sum_{k\ge 0} \varepsilon^k M_k(t) \equiv \operatorname{diag}\left\{E_q + \sum_{k\ge 1} \varepsilon^k M_{kq}(t), E_p + \sum_{k\ge 1} \varepsilon^k M_{kp}(t)\right\}.$$

Тоді $M_1(t) = \operatorname{diag}\{-C_{1q}(t), -H_{1p}(t)\}$.

Домножаючи зліва обидві частини рівності (9) на матрицю $K^{-1}(t,\varepsilon)$, отримуємо

$$(C_0(t) + \varepsilon D_1(t))\,U(t,\varepsilon) - (H_0(t) + \varepsilon G_1(t))\,U(t,\varepsilon)\Lambda(t,\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon \sum_{k\ge 0} \varepsilon^k G_k(t)U'(t,\varepsilon) - \sum_{k\ge 2} \varepsilon^k D_k(t)U(t,\varepsilon) +$$
$$+ \sum_{k\ge 2} \varepsilon^k G_k(t)U(t,\varepsilon)\Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} K^{-1}(t,\varepsilon)H(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)\Delta(t,\varepsilon), \tag{10}$$

де

$$D_1(t) = \operatorname{diag}\{0, D_{1p}(t)\} \equiv \operatorname{diag}\{0, C_{1p}(t) - H_{1p}(t)J_p(t)\},$$

$$D_2(t) = C_2(t) + \operatorname{diag}\{0, M_{2p}(t)J_p(t) - H_{1p}(t)C_{1p}(t)\},$$

$$D_k(t) = \sum_{i=0}^{k-2} M_i(t)C_{k-i}(t) + \operatorname{diag}\{0, M_{kp}(t)J_p(t) + M_{k-1,p}C_{1p}(t)\}, \quad k \ge 3,$$

$$G_0(t) = H_0(t),$$

$$G_1(t) = \operatorname{diag}\{G_{1q}(t), 0\} \equiv \operatorname{diag}\{H_{1q}(t) - C_{1q}(t)J_q(t), 0\},$$

$$G_2(t) = H_2(t) + \operatorname{diag}\{M_{2q}(t)J_q(t) - C_{1q}(t)H_{1q}(t), 0\},$$

$$G_k(t) = \sum_{i=0}^{k-2} M_i(t)H_{k-i}(t) + \operatorname{diag}\{M_{kq}(t)J_q(t) + M_{k-1,q}H_{1q}(t), 0\}, \quad k \geq 3.$$

Позначимо через $u_i(t,\varepsilon),\ i = \overline{1,n}$, і $\delta_i(t,\varepsilon),\ i = \overline{1,n}$, стовпці відповідно матриць $U(t,\varepsilon)$ і $\Delta(t,\varepsilon)$. Тоді рівність (10) набере вигляду

$$(C_0(t) + \varepsilon D_1(t))\, u_i(t,\varepsilon) - (H_0(t) + \varepsilon G_1(t))\, u_i(t,\varepsilon)\lambda_i(t,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k G_k(t) u_i'(t,\varepsilon) - \sum_{k\geq 2} \varepsilon^k D_k(t) u_i(t,\varepsilon) + \sum_{k\geq 2} \varepsilon^k G_k(t) u_i(t,\varepsilon)\lambda_i(t,\varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon^{m+1} K^{-1}(t,\varepsilon) H(t,\varepsilon) U(t,\varepsilon) \delta_i(t,\varepsilon), \quad i = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Нехай

$$u_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k u_i^{(k)}(t,\varepsilon), \quad \lambda_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \lambda_i^{(k)}(t,\varepsilon), \quad i = \overline{1,n}.$$

Модифікуємо стандартну процедуру визначення функцій $u_i^{(k)}(t,\varepsilon)$ і $\lambda_i^{(k)}(t,\varepsilon)$. А саме, зрівнюючи у рівності (11) коефіцієнти при $\varepsilon^k,\ k = \overline{1,m}$, враховуємо також члени вищого порядку $D_1(t)u_i^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^{k+1},\ \lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)G_1(t)u_i^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^{k+1}$, тобто

$$\Big(C_0(t) + \varepsilon D_1(t) - \lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)(H_0(t) + \varepsilon G_1(t))\Big)\, u_i^{(0)}(t,\varepsilon) = 0, \tag{12}$$

$$\Big(C_0(t) + \varepsilon D_1(t) - \lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)\,(H_0(t) + \varepsilon G_1(t))\Big)\, u_i^{(k)}(t,\varepsilon) = d_i^{(k)}(t,\varepsilon), \quad k \in N, \tag{13}$$

де

$$d_i^{(k)}(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{k-1} G_s(t) \left(u_i^{(k-s-1)}(t,\varepsilon)\right)' - \sum_{s=2}^{k} D_s(t) u_i^{(k-s)}(t,\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{k} \sum_{j=0}^{s} G_s(t) u_i^{(j)}(t,\varepsilon) \lambda_i^{(k-s-j)}(t,\varepsilon) + (H_0(t) + \varepsilon G_1(t)) \sum_{s=0}^{k-1} u_i^{(s)}(t,\varepsilon) \lambda_i^{(k-s)}(t,\varepsilon).$$

Запишемо рівняння (12) таким чином:

$$\Big(E_q - \lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)(J_q(t) + \varepsilon G_{1q}(t))\Big)\, u_{i1}^{(0)}(t,\varepsilon) = 0, \tag{14}$$

$$\Big(J_p(t) + \varepsilon D_{1p}(t) - \lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon) E_p\Big)\, u_{i2}^{(0)}(t,\varepsilon) = 0, \tag{15}$$

де $u_{i1}^{(0)}(t,\varepsilon)$ — $q$-вимірний вектор, що містить $q$ перших компонент вектора $u_i^{(0)}(t,\varepsilon)$, $u_{i2}^{(0)}(t,\varepsilon)$ — $p$-вимірний вектор, що містить решту компонент $u_i^{(0)}(t,\varepsilon)$.

Матриця $J_q(t) + \varepsilon G_{1q}(t)$ на відрізку $\left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_2\right]$, $\beta = \dfrac{1}{p+1}$, $t_2 \leq t_1$ (сталу $k_0$ визначимо нижче) має різні власні значення. Справді, розглянемо її характеристичне рівняння

$$\det(J_q(t) + \varepsilon G_{1q}(t) - wE_q) = 0, \tag{16}$$

або

$$w^q - \gamma_1(t,\varepsilon)w^{q-1} - \ldots - \gamma_{q-1}(t,\varepsilon)w - \gamma_q(t,\varepsilon) = 0,$$

де

$$\gamma_j(t,\varepsilon) = O(t) + O(\varepsilon), \quad (t,\varepsilon) \to (0,0), \quad j = \overline{1,q},$$

причому $\gamma_q(t,\varepsilon) = t\widetilde{b}_q(t) + \varepsilon\{G_{1q}(t)\}_{q1} + O(\varepsilon t)$.

Як відомо [16], розв'язки рівняння

$$\lambda^q - \gamma_1(t,0)\lambda^{q-1} - \ldots - \gamma_{q-1}(t,0)\lambda - \gamma_q(t,0) = 0$$

мають вигляд

$$\lambda_j(t) = \sqrt[q]{\widetilde{b}_q(t)}\, t^{\frac{1}{q}} + O\left(t^{\frac{2}{q}}\right), \quad j = \overline{1,q}.$$

Тоді згідно з результатами [32]

$$w_j(t,\varepsilon) = \lambda_j(t) + \varepsilon^{\frac{1}{q}} \sqrt[q]{\{G_{1q}(t)\}_{q1}} + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{q}} t^{\frac{1}{q^2}}\right), \quad j = \overline{1,q},$$

де $w_j(t,\varepsilon)$ — відповідні розв'язки рівняння (16).

У рівнянні (14) покладемо

$$u_{i1}^{(0)}(t,\varepsilon) = T_q(t,\varepsilon)p_{i1}^{(0)}(t,\varepsilon), \tag{17}$$

де

$$T_q^{-1}(t,\varepsilon)\left(J_q(t) + \varepsilon G_{1q}(t)\right)T_q(t,\varepsilon) = W_q(t,\varepsilon) \equiv \operatorname{diag}\left\{w_1(t,\varepsilon), w_2(t,\varepsilon), \ldots, w_q(t,\varepsilon)\right\}.$$

Позначимо через $\varphi_j(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,q}$, стовпці матриці $T_q(t,\varepsilon)$,

$$\widehat{b}_j(t) = \sqrt[q]{\left|\widetilde{b}_q(t)\right|}\left(\cos\frac{\arg\widetilde{b}_q(t) + 2\pi(j-1)}{q} + i\sin\frac{\arg\widetilde{b}_q(t) + 2\pi(j-1)}{q}\right), \quad j = \overline{1,q}.$$

Тоді, вважаючи компонентами векторів $\varphi_j(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,q}$, алгебраїчні доповнення елементів $q$-го рядка матриці $J_q(t) + \varepsilon G_{1q}(t) - w_j(t,\varepsilon)E_q$, отримуємо

$$\varphi_j(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 + O(\varepsilon) \\ \widehat{b}_j(t)t^{\frac{1}{q}} + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{q}}\right) \\ \widehat{b}_j^2(t)t^{\frac{2}{q}} + O\left(t^{\frac{1}{q}}\varepsilon^{\frac{1}{q}}\right) \\ \ldots \\ \widehat{b}_j^{q-1}(t)t^{\frac{q-1}{q}} + O\left(t^{\frac{q-2}{q}}\varepsilon^{\frac{1}{q}}\right) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,q}, \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; \sqrt{\varepsilon}\right],$$

і

$$\varphi_j(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 + O(\varepsilon) \\ \widehat{b}_j(t)t^{\frac{1}{q}} + O\left(t^{\frac{2}{q}}\right) \\ \widehat{b}_j^2(t)t^{\frac{2}{q}} + O\left(t^{\frac{3}{q}}\right) \\ \ldots \\ \widehat{b}_j^{q-1}(t)t^{\frac{q-1}{q}} + O(t) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,q}, \quad t \in \left[\sqrt{\varepsilon}; t_2\right].$$

При цьому

$$T_q^{-1}(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O\left(t^{-\frac{1}{q}}\right) & \ldots & O\left(t^{-\frac{q-1}{q}}\right) \\ O(1) & O\left(t^{-\frac{1}{q}}\right) & \ldots & O\left(t^{-\frac{q-1}{q}}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O(1) & O\left(t^{-\frac{1}{q}}\right) & \ldots & O\left(t^{-\frac{q-1}{q}}\right) \end{pmatrix}, \quad t\in\left[k_0\varepsilon^{1-\beta};t_2\right].$$

Після заміни (17) рівняння (14) набере вигляду

$$\left(E_q-\lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)W_q(t,\varepsilon)\right)p_{i1}^{(0)}(t,\varepsilon)=0. \tag{18}$$

Покладемо

$$\lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{w_i(t,\varepsilon)},$$

$$\left\{p_{i1}^{(0)}(t,\varepsilon)\right\}_i=1, \quad \left\{p_{i1}^{(0)}(t,\varepsilon)\right\}_j=0, \quad t\in\left[k_0\varepsilon^{1-\beta};t_2\right], \quad i\neq j, \quad i,j=\overline{1,q},$$

де $\left\{p_{i1}^{(0)}(t,\varepsilon)\right\}_j$ — $j$-та компонента вектора $p_{i1}^{(0)}(t,\varepsilon)$.

Аналогічним чином показуємо, що матриця $J_p(t)+\varepsilon D_{1p}(t)$ на відрізку $\left[k_0\varepsilon^{1-\beta};t_3\right]$, $t_3\le t_1$, має різні власні значення. При цьому розв'язки рівняння

$$\det(J_p(t)+\varepsilon D_{1p}(t)-wE_p)=0 \tag{19}$$

можна записати таким чином:

$$w_j(t,\varepsilon)=\sqrt[p]{\widetilde{a}_p(t)}\,t^{\frac{1}{p}}+O\left(t^{\frac{2}{p}}\right)+O\left(\varepsilon^{\frac{1}{p}}\right), \quad j=\overline{q+1,n},$$

або

$$w_j(t,\varepsilon)=\widehat{a}_j(t)\,t^{\frac{1}{p}}+O\left(t^{\frac{2}{p}}\right)+O\left(\varepsilon^{\frac{1}{p}}\right), \quad j=\overline{q+1,n},$$

де

$$\widehat{a}_{q+j}(t)=\sqrt[p]{|\widetilde{a}_p(t)|}\left(\cos\frac{\arg\widetilde{a}_p(t)+2\pi(j-1)}{p}+i\sin\frac{\arg\widetilde{a}_p(t)+2\pi(j-1)}{p}\right), \quad j=\overline{1,p}.$$

Покладаючи у рівнянні (15)

$$u_{i2}^{(0)}(t,\varepsilon)=T_p(t,\varepsilon)p_{i2}^{(0)}(t,\varepsilon),$$

де

$$T_p^{-1}(t,\varepsilon)\left(J_p(t)+\varepsilon D_{1p}(t)\right)T_p(t,\varepsilon)=W_p(t,\varepsilon)\equiv\operatorname{diag}\left\{w_{q+1}(t,\varepsilon),w_{q+2}(t,\varepsilon),\ldots,w_n(t,\varepsilon)\right\},$$

одержуємо

$$\left(W_p(t,\varepsilon)-\lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)E_p\right)p_{i2}^{(0)}(t,\varepsilon)=0, \tag{20}$$

звідки

$$\lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)=w_i(t,\varepsilon),$$

$$\left\{p_{i2}^{(0)}(t,\varepsilon)\right\}_i = 1, \quad \left\{p_{i2}^{(0)}(t,\varepsilon)\right\}_j = 0, \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_3\right], \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{q+1,n}.$$

Нехай $t_4 = \min\{t_2, t_3\}$. Покладемо

$$p_{i1}^{(0)}(t,\varepsilon) = 0, \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_4\right], \quad i = \overline{q+1,n},$$

$$p_{i2}^{(0)}(t,\varepsilon) = 0, \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_4\right], \quad i = \overline{1,q}.$$

Запишемо систему (13) при $k=1$ таким чином:

$$\left(E_q - \lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)(J_q(t) + \varepsilon G_{1q}(t))\right) u_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon) = d_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{21}$$

$$\left(J_p(t) + \varepsilon D_{1p}(t) - \lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)E_p\right) u_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon) = d_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{22}$$

де $u_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon)$, $d_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon)$ — $q$-вимірні вектори, що містять $q$ перших компонент векторів $u_i^{(1)}(t,\varepsilon)$, $d_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ відповідно; $u_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon)$, $d_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon)$ — $p$-вимірні вектори, що містять решту компонент векторів $u_i^{(1)}(t,\varepsilon)$, $d_i^{(1)}(t,\varepsilon)$.

Покладаючи $u_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon) = T_q(t,\varepsilon)p_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon)$ і $u_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon) = T_p(t,\varepsilon)p_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon)$ у рівняннях (21), (22), отримуємо

$$\left(E_q - \lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)W_q(t,\varepsilon)\right) p_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon) = h_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{23}$$

$$\left(W_p(t,\varepsilon) - \lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)E_p\right) p_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon) = h_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{24}$$

де

$$h_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon) = T_q^{-1}(t,\varepsilon)d_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon) \equiv T_q^{-1}(t,\varepsilon)J_q(t)T_q'(t,\varepsilon)p_{i1}^{(0)} + W_q(t,\varepsilon)p_{i1}^{(0)}\lambda_i^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$h_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon) = T_p^{-1}(t,\varepsilon)d_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon) \equiv T_p^{-1}(t,\varepsilon)T_p'(t,\varepsilon)p_{i2}^{(0)} + p_{i2}^{(0)}\lambda_i^{(1)}(t,\varepsilon).$$

Тоді

$$\lambda_i^{(1)}(t,\varepsilon) = -\frac{\left\{f_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon)\right\}_i}{w_i(t,\varepsilon)},$$

$$\left\{p_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon)\right\}_i = 0, \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_4\right],$$

$$\left\{p_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon)\right\}_j = \frac{\left\{h_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon)\right\}_j w_i(t,\varepsilon)}{w_i(t,\varepsilon) - w_j(t,\varepsilon)}, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,q},$$

$$p_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon) = \left(W_p(t,\varepsilon) - \lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)E_p\right)^{-1} h_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad i = \overline{1,q},$$

де $f_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon) = T_q^{-1}(t,\varepsilon)J_q(t)T_q'(t,\varepsilon)p_{i1}^{(0)}$;

$$\lambda_i^{(1)}(t,\varepsilon) = -\left\{f_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon)\right\}_i,$$

$$\left\{p_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon)\right\}_j = \frac{\{h_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon)\}_j}{w_j(t,\varepsilon) - w_i(t,\varepsilon)}, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{q+1,n},$$

$$p_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \left(E_q - \lambda_i^{(0)}(t,\varepsilon)W_q(t,\varepsilon)\right)^{-1} h_{i1}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad i = \overline{q+1,n},$$

де $f_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon) = T_p^{-1}(t,\varepsilon)T_p'(t,\varepsilon)p_{i2}^{(0)}$. Компоненти $\left\{p_{i2}^{(1)}(t,\varepsilon)\right\}_i$, $t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_4\right]$, $i = \overline{q+1,n}$, визначимо нижче.

Аналогічно знаходимо вектори $u_i^{(k)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{2,m}$, і функції $\lambda_i^{(k)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{2,m}$.

За побудовою

$$u_i^{(k)}(t,\varepsilon) = O\left(t^{-k\left(1-\frac{1}{q}\right)}\right), \quad \lambda_i^{(k)}(t,\varepsilon) = O\left(t^{-k\left(1-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{q}}\right), \quad i = \overline{1,q},$$

$$u_i^{(k)}(t,\varepsilon) = O\left(t^{-k\left(1+\frac{1}{p}\right)}\right), \quad \lambda_i^{(k)}(t,\varepsilon) = O\left(t^{-k\left(1+\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}}\right), \quad i = \overline{q+1,n}, \tag{25}$$

$$k = \overline{1,m}, \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_4\right].$$

Довільні елементи функцій $\{p_{i2}^{(k)}(t,\varepsilon)\}_i$, $i = \overline{q+1,n}$, $k = \overline{1,m}$, підберемо так, щоб $\det U(t,\varepsilon) \neq 0$, $t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_4\right]$. Тоді, враховуючи, що $\det H(t,\varepsilon) \neq 0$, $t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_4\right]$, отримуємо

$$\Delta(t,\varepsilon) = U^{-1}(t,\varepsilon)H^{-1}(t,\varepsilon)K(t,\varepsilon)F(t,\varepsilon),$$

де

$$F(t,\varepsilon) = \sum_{k=2}^{m+1} D_k(t)U_{m+1-k}(t,\varepsilon) + \sum_{k\geq 1}\varepsilon^k \sum_{s=k+1}^{m+k+1} D_s(t)U_{m+1+k-s}(t,\varepsilon) -$$

$$-\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k \sum_{s=k}^{m+k} G_s(t)(U_{m+k-s}(t,\varepsilon))' - \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k \sum_{s\geq 2} G_s(t)\sum_{j\geq 0} U_j(t,\varepsilon)\Lambda_{m+1+k-s-j}(t,\varepsilon) -$$

$$-(H_0(t) + \varepsilon G_1(t))\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon^k \sum_{s=k+1}^{m} U_s(t,\varepsilon)\Lambda_{m+1+k-s}(t,\varepsilon),$$

$$U_s(t,\varepsilon) \equiv 0, \quad \Lambda_s(t,\varepsilon) \equiv 0, \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_4\right], \quad s < 0, \quad s > m.$$

Таким чином, система (7) набере вигляду

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = \left(\Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\Delta(t,\varepsilon)\right)z. \tag{26}$$

Зазначимо, що

$$\varepsilon^{m+1}\Delta(t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{m+1}t^{-m\left(1+\frac{1}{p}\right)-1}\right), \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_4\right], \quad \varepsilon \to 0+.$$

Нехай виконується умова 3): $\mathrm{Re}\sqrt[p]{\widetilde{a}_p(0)} \neq 0$, $\mathrm{Re}\sqrt[q]{\widetilde{b}_q(0)} \neq 0$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що функції $\mathrm{Re}\,\widehat{b}_j(t)$, $\mathrm{Re}\,w_j(t,\varepsilon)$, $\mathrm{Re}\,\lambda_j(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,q}$, і $\mathrm{Re}\,\widehat{a}_j(t)$, $\mathrm{Re}\,w_j(t,\varepsilon)$, $\mathrm{Re}\,\lambda_j(t,\varepsilon)$, $j = \overline{q+1,n}$, на відрізку $\left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_5\right]$, $t_5 \leq t_4$, мають однаковий знак.

У системі (26) виконаємо підстановку

$$z(t,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{a_j}^{t}\lambda_j(\tau,\varepsilon)d\tau\right) r_j(t,\varepsilon), \quad j=\overline{1,n},$$

де

$$a_j = \begin{cases} k_0\varepsilon^{1-\beta}, & \operatorname{Re}\lambda_j(t,\varepsilon)<0, \\ t_5, & \operatorname{Re}\lambda_j(t,\varepsilon)>0, \quad t\in\left[k_0\varepsilon^{1-\beta};t_5\right], \quad \varepsilon\in(0;\varepsilon_0]. \end{cases}$$

В результаті одержимо

$$\varepsilon\,\frac{dr_j}{dt} = \left(\Lambda(t,\varepsilon)-\lambda_j(t,\varepsilon)E+\varepsilon^{m+1}\Delta(t,\varepsilon)\right)r_j. \tag{27}$$

З умови 3 випливає, що функції $\operatorname{Re}(\lambda_i(t,\varepsilon)-\lambda_j(t,\varepsilon))$ для фіксованих $i,j=\overline{1,n}$ не змінюють знак на відрізку $\left[k_0\varepsilon^{1-\beta};t_6\right],\ t_6\le t_5$.

Еквівалентна система інтегральних рівнянь до системи (27) з початковою умовою

$$r_j(b,\varepsilon)=e_j$$

має вигляд

$$r_j(t,\varepsilon) = e_j + \varepsilon^m\int\limits_{b}^{t} Z(t,s,\varepsilon)\Delta(s,\varepsilon)r_j(s,\varepsilon)ds, \tag{28}$$

де

$$Z(t,s,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{s}^{t}(\Lambda(\tau,\varepsilon)-\lambda_j(\tau,\varepsilon)E)d\tau\right),$$

$b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$; нижня межа інтегрування в інтегралі, що міститься у $i$-му рядку системи (28), дорівнює $b_i,\ i=\overline{1,n}$,

$$b_i = \begin{cases} k_0\varepsilon^{1-\beta}, & \operatorname{Re}(\lambda_i(t,\varepsilon)-\lambda_j(t,\varepsilon))<0, \quad i\in I, \\ t_6, & \operatorname{Re}(\lambda_i(t,\varepsilon)-\lambda_j(t,\varepsilon))\ge 0, \quad i\in II, \end{cases}$$

$e_j$ — $n$-вимірний вектор, $j$-та координата якого дорівнює 1, а решта дорівнюють 0.

Позначимо

$$Z_{ij}(t,s,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{s}^{t}\left(\lambda_i(\tau,\varepsilon)-\lambda_j(\tau,\varepsilon)\right)d\tau\right).$$

Тоді за побудовою як для $i\in I\ \left(k_0\varepsilon^{1-\beta}\le s\le t\right)$, так і для $i\in II\ (t\le s\le t_6)$

$$|Z_{ij}(t,s,\varepsilon)|\le 1.$$

Нехай

$$\varepsilon^{m+1}\left\|\Delta(t,\varepsilon)\right\| \le d\varepsilon^{m+1}t^{-m\left(1+\frac{1}{p}\right)-1}, \quad t\in\left[k_0\varepsilon^{1-\beta};t_6\right].$$

Тоді якщо сталу $k_0$ вважати такою, що

$$\frac{dp}{m(p+1)}\,k_0^{-m\left(1+\frac{1}{p}\right)} < \frac{1}{2},$$

то оператор

$$A\varphi = e_j + \varepsilon^m \int\limits_b^t Z(t,s,\varepsilon)\Delta(s,\varepsilon)\varphi\,ds$$

відображає множину $\overline{P}$, $\overline{P} = \left\{\varphi(t,\varepsilon) \in C\left(\left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_6\right] \times [0;\varepsilon_0]\right) \,:\, \|\varphi(t,\varepsilon)\| \le 2\right\}$, в себе і є оператором стиску. Таким чином, система (28) на множині $\overline{P}$ має єдиний розв'язок $r_j = r_j(t,\varepsilon)$, причому

$$r_j(t,\varepsilon) = e_j + \varepsilon^m \chi_j(t,\varepsilon),$$

де

$$\varepsilon^m \left\|\chi_j(t,\varepsilon)\right\| \le \frac{2dp}{m(p+1)}\,k_0^{-m\left(1+\frac{1}{p}\right)}, \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_6\right].$$

Сталу $k_0$ підберемо так, щоб вектори $r_j(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,n}$, були лінійно незалежними на відрізку $\left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_6\right]$.

**Теорема.** *Нехай* $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon) \in C^{m+1}\left(\overline{K}\right)$, *де* $\overline{K} = \{(t,\varepsilon)\colon 0 \le t \le T, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}$, *і виконуються умови* 1 – 3. *Тоді існує таке* $\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, *що система* (3) *на відрізку* $\left[k_0\varepsilon^{1-\beta}; t_0\right]$, $t_0 \le T$, $\beta = \dfrac{1}{p+1}$, *має* $n$ *лінійно незалежних розв'язків* $x_j = x_j(t,\varepsilon)$, *причому*

$$x_j(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)\left(e_j + O\left(m^{-1}k_0^{-m\left(1+\frac{1}{p}\right)}\right)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{a_j}^t \lambda_j(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \quad j = \overline{1,n}.$$

***Зауваження.*** Доведена теорема узагальнює результати В. Вазова на випадок лінійних сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем [6].

## Література


1. R. E. Langer, *The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to a turning point*, Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 461 – 490 (1949).
2. T. M. Cherry, *Uniform asymptotic formulae for functions with transition points*, Trans. Amer. Math. Soc., **68**, 224 – 257 (1950).
3. А. А. Дородницын, *Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка*, Успехи мат. наук, **7**, вып. 6 (52), 3 – 96 (1952).
4. W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Intersci. Publ., New York (1965).
5. А. М. Самойленко, *Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных*, Укр. мат. журн., **54**, № 11, 1505 – 1517 (2002).
6. W. Wasow, *The central connection problem at turning points of linear differential equations*, Comment. Math. Helv., **46**, № 1, 65 – 86 (1971).
7. Y. Sibuya, *Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point*, Funkcial. Ekvac., **4**, 29 – 56 (1962).
8. M. Iwano, *Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, I*, Funkcial. Ekvac., **5**, 71 – 134 (1963).

9. M. Iwano, *Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, II*, Funkcial. Ekvac., **6**, 89 – 141 (1964).
10. D. L. Russell, Y. Sibuya, *The problem of singular perturbations of linear ordinary differential equations at regular singular points, I*, Funkcial. Ekvac., **9**, 207 – 218 (1966).
11. D. L. Russell, Y. Sibuya, *The problem of singular perturbations of linear ordinary differential equations at regular singular points, II*, Funkcial. Ekvac., **11**, 175 – 184 (1968).
12. С. А. Ломов, *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*, Наука, Москва (1981).
13. А. Н. Тихонов, *Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных*, Мат. сб., **31 (73)**, № 3, 575 – 586 (1952).
14. A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, L. V. Kalachev, *The boundary function method for singular perturbation problems*, Soc. Industrial and Appl. Math., Philadelphia (1995).
15. S. L. Campbell, *Singular systems of differential equations II.*, Pitman, San-Francisco (1982).
16. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).
17. В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова, *Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем*, Наука, Новосибирск (2003).
18. P. Kunkel, V. Mehrmann, *Differential-algebraic equations. Analysis and numerical solution*, Eur. Math. Soc., Zürich (2006).
19. R. Riaza, *Differential-algebraic systems. Analytical aspects and circuit applications*, World Sci. (2008).
20. E. Hairer, G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. II. Stiff and differential-algebraic problems*, Springer-Verlag, Berlin (2010).
21. C. Tischendorf, *Coupled systems of differential algebraic and partial differential equations in circuit and device simulation*, Model. and Numer. Anal. (2003).
22. J. D. Murray, *Mathematical biology: biomathematics*, Vol. 19, Springer-Verlag (1989).
23. R. E. Beardmore, *The singularity-induced bifurcation and its Kronecker normal form*, SIAM J. Matrix Anal. and Appl., **23**, № 1, 126 – 137 (2001).
24. S. L. Campbell, *Singular systems of differential equations*, Pitman, San-Francisco (1980).
25. G. D. Birkhoff, *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter*, Trans. Amer. Math. Soc., **9**, № 2, 219 – 231 (1908).
26. J. Tamarkin, *Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions*, Math. Z., **27**, № 1, 1 – 54 (1928).
27. С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко, *Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений*, Наук. думка, Київ (1966).
28. В. Ф. Бутузов, *Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения*, Мат. заметки, **94**, № 1, 68 – 80 (2013).
29. V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, L. Recke, K. R. Schneider, *On a singularly perturbed initial value problem in the case of a double root of the degenerate equation*, Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl., **83**, 1 – 11 (2013).
30. П. Ф. Самусенко, *Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціально-функціональних рівнянь з виродженнями*, Вид-во Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, Київ (2011).
31. W. Wasow, *Linear turning point theory*, Springer-Verlag, New York (1985).
32. A. Ostrowski, *Solution of equations in Euclidean and Banach spaces*, Acad. Press, New York (1973).


Одержано 10.08.20