DOI: 10.37863/umzh.v74i3.6270

УДК 517.986.5

С. В. Спічак (Ін-т математики НАН України, Київ)

КЛАСИФІКАЦІЯ РЕАЛІЗАЦІЙ АЛГЕБР ЛІ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ НА КОЛІ

The realizations of finite-dimensional Lie algebras of smooth tangent vector fields on circle are described. The "canonical" realizations of two-dimensional noncommutative algebra, as well as the algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ are constructed. It is shown that any realization of these algebras by smooth vector fields is reduced to one of a "canonical" realization by piecewise-smooth global transformations of circle onto itself. Formulas for calculating the number of non-equivalent realizations are obtained.

Описано реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторних полів на колі. Побудовано „канонічні" реалізації двовимірної некомутативної алгебри, а також алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Показано, що будь-яка реалізація цих алгебр гладких векторних полів зводиться до однією із „канонічних" за допомогою кусково-гладких глобальних перетворень кола на себе, а також отримано формули для розрахунку кількості нееквівалентних реалізацій.

1. Вступ. Проблема опису реалізацій алгебр Лі векторними полями має широке застосування, зокрема, для побудови диференціальних рівнянь з частинними похідними з відповідною алгеброю інваріантності, для пошуку точних розв'язків. Однак ця проблема недостатньо досліджена систематично. Вперше реалізації алгебри Лі на прямій і площині розглянув С. Лі [1, с. 1 – 121]. І тільки майже через століття після досліджень Лі дослідження з цієї тематики відновилися на регулярній основі. Різні напрями цієї проблеми представлені, зокрема, в роботах [2] (вивчені реалізації диференціальних операторів першого порядку спеціальної форми), в [3 – 5], де розглядалися реалізації фізичних алгебр (Галілея, Пуанкаре та Евкліда). Систематичне дослідження нееквівалентних реалізацій дійсних алгебр Лі розмірності не більше чотирьох векторними полями у просторі з довільною кількістю змінних було проведено в роботі [6], де можна знайти більш повний огляд даної проблеми та список посилань.

У представлених роботах дослідження реалізацій алгебр Лі векторних полів розглядаються з точністю до локальних перетворень еквівалентності. Класифікація реалізацій алгебр на деякому многовиді з точністю до глобальних перетворень еквівалентності (на всьому многовиді) є більш складною проблемою, яка, на відміну від локальної теорії, вимагає інших методів досліджень. Лише в декількох роботах (див. [7 – 9]) були зроблені спроби класифікувати реалізації алгебри Лі векторних полів на деякому многовиді в „цілому". У цих роботах доведено, що існують три алгебри, а саме одновимірні, некомутативні двовимірні і тривимірна алгебра $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, які можна реалізувати аналітичними векторними полями на колі.

Мета цієї роботи — побудувати в явному вигляді всі нееквівалентні реалізації на колі скінченновимірних алгебр з ненульовим фактором Леві, а також описати реалізації відомих розв'язних алгебр (розмірності не вище п'яти) в класі векторних полів, який не обмежується вимогою аналітичності, як це розглядалося в [7 – 9]. Деякі визначення і попередні результати були отримані в роботі [10], де була проведена класифікація алгебр розмірності не вище двох.

На колі S^1 вводимо параметр $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \le \theta < 2\pi$. Будемо вважати, що при збільшенні параметра θ відповідна точка на колі рухається за годинниковою стрілкою. Векторне поле на S^1 можна представити як векторне поле $v(\theta)\partial_\theta$, де $v(\theta)$ — гладка дійсна функція на колі [11]. Також, можна вважати, що $\theta \in \mathbb{R}$, а $v(\theta)$ є гладкою 2π-періодичною функцією на прямій.

Точку θ_0 будемо й надалі називати *особою точкою* векторного поля $v(\theta)\partial_\theta$, якщо $v(\theta_0) = 0$. Позначимо через $\mathcal{C}$ клас векторних полів $v(\theta)\partial_\theta$, таких що:

– не існують інтервалів на яких $v(\theta) = 0$, тобто інтервалів з особливих точок;

– функції $v(\theta)$ є неперервно-диференційовними, що природно вимагати при обчисленні комутаторів двох векторних полів.

Також, ведемо клас перетворень $f\colon S^1 \to S^1$ кола на себе, які визначаються наступними властивостями:

– це є взаємно-однозначне відображення кола на себе;

– $f(\theta)$ є неперервним в будь-якої точці $\theta \in S^1$;

– воно є неперервно-диференційоване в усіх точках окрім скінченого їх числа;

– похідна $f'(\theta)$ прямує до $-\infty$ або $+\infty$ в усіх точках її розриву;

– при зміни координати $\tilde{\theta} = f(\theta)$ векторне поле із класу C^1 перетворюється в векторне поле того самого класу.

Клас перетворень із зазначеними властивостями визначає *перетворення еквівалентності* векторних полів. Позначимо його через $\mathcal{F}$. Будемо називати дві реалізації алгебри векторних полів *нееквівалентними*, якщо неможливо перетворити реалізацію з однієї в іншу шляхом композиції перетворень еквівалентності з класу $\mathcal{F}$. Отже, нас цікавлять усі нееквівалентні відносно перетворень $\mathcal{F}$ реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторних полів з класу $\mathcal{C}$.

Ступінь відображення, яке відповідає функції f, є $\deg f = \pm 1$ (див. [12]). Визначимо наступні підкласи перетворень $\mathcal{F}$:

– $\mathcal{F}_0^+$ — перетворення, які мають нерухому нульову точку $f(0) = 0$, і $\deg f = 1$;

– O_φ — поворот кола на кут φ (в напрямку годинникової стрілки);

– T — дзеркальне відображення кола відносно осі, що проходить через центр кола і нульову точку на ньому.

Нескладно побачити, що будь-яке перетворення з класу $\mathcal{F}$ є композицією перетворень з цих трьох підкласів. Очевидно, що якщо перетворення $f(\theta) \in \mathcal{F}_0^+$, то воно є монотонним на всьому відкритому проміжку $0 \le \theta < 2\pi$. Якщо $f(\theta) \in T$, то $\deg f = -1$, а якщо $f(\theta) \in O_\varphi$, то $\deg f = 1$.

У параграфі 2 розглядається двовимірні алгебри, а також доводяться допоміжні леми, які необхідні для класифікації реалізацій некомутативної алгебри. У параграфах 3 і 4 виконано класифікацію реалізацій, нееквівалентних відносно перетворень з класу $\mathcal{F}_0^+$. У параграфі 5 завершено класифікацію реалізацій двовимірної некомутативної алгебри і алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ відносно перетворень O_φ і T, а також представлено комбінаторні формули для обчислення кількості відповідних нееквівалентних реалізацій.

2. Двовимірні алгебри: допоміжні леми. *A) Комутативна алгебра* $A_{2.1} = A_1 \bigoplus A_1$ (див. і далі позначення алгебр в [13]).

Позначимо і надалі векторні поля $v(\theta)\partial_\theta$ і $w(\theta)\partial_\theta$ відповідно як $V, W \in \mathcal{C}$. Нехай вони комутують. Особливу точку θ_0 векторного поля V назвемо *виродженою*, якщо $v'(\theta_0) = 0$. Легко показати, що якщо $0 \le \theta_0 < \theta_1 < 2\pi$ дві вироджені точки, такі, що інтервал (θ_0, θ_1) не містить вироджених точок, то $w(\theta) = \lambda v(\theta)$ на (θ_0, θ_1), де $\lambda \ne 0$ — довільна константа. Це випливає з того, що $W \in \mathcal{C}$ (неперервність похідних функцій $v(\theta)$ і $w(\theta)$). Зокрема, якщо немає вироджених точок, або є лише одна вироджена точка, то $w(\theta) = \lambda v(\theta)$ на S^1. У цьому випадку векторні поля V і W лінійно залежні, і тоді немає реалізації двовимірної комутативної алгебри Лі (див. [7–9]).

Припустимо, що є більше однієї виродженої точки для функції $v(\theta)$. Без втрати загальності, можна вважати, що точка 0 (і відповідно 2π) є виродженою. Тоді функція $w(\theta)$ може бути описана наступним чином. Візьмемо довільну точку $\theta \in S^1$. Якщо вона невироджена для функції $v(\theta)$, то, очевидно, існує максимальний відрізок $[\theta_0, \theta_1]$ з двома виродженими кінцевими точками на ньому, так, що $0 \le \theta_0 < \theta < \theta_1 < 2\pi$. Тому $w(\theta) = \lambda v(\theta)$ на цьому відрізку.

Далі, розглянемо точку $\theta' \notin [\theta_0, \theta_1]$, і, якщо вона не вироджена, повторюємо процедуру. Знову маємо співвідношення $w(\theta) = \lambda' v(\theta)$ на деякому відрізку (не на $[\theta_0, \theta_1]$). Причому, коефіцієнти λ і λ' можуть бути неоднаковими. Якщо точка θ' є виродженою, то в силу того, що $V \in \mathcal{C}$, можна знайти будь як близько від неї невироджену точку $\theta'' \notin [\theta_0, \theta_1]$. Отже, повторюємо наведену вище процедуру для θ''. Таким чином, весь відрізок $[0, 2\pi]$ розбивається на відрізки (можливо на нескінченну кількість) з кінцевими виродженими точками. На цих відрізках функція $w(\theta)$ пропорційна функції $v(\theta)$ з ненульовими різними коефіцієнтами пропорційності.

Б) Некомутативна алгебра $A_{2.2}$. Нехай векторні поля V і W генерують некомутативну алгебру. Можна припустити (з точністю до їх лінійної комбінації), що вони задовольняють комутаційне співвідношення $[V, W] = W$, що еквівалентно такій умові для функцій $v(\theta)$ і $w(\theta)$:

$$v(\theta)w'(\theta) - v'(\theta)w(\theta) = w(\theta). \tag{1}$$

Лема 1. *Існує особлива точка для векторного поля W.*

Доведення. Припустимо, що векторне поле W не має особливих точок, тобто $w(\theta) > 0$ (або $w(\theta) < 0$) для всіх значень $0 \le \theta < 2\pi$. Тоді з (1) можна отримати розв'язок для функції $v(\theta)$ на всьому відкритому проміжку $[0, 2\pi)$:

$$v(\theta) = \left(-\int\limits_0^\theta \frac{d\vartheta}{w(\vartheta)} + \lambda \right) w(\theta), \tag{2}$$

де λ — деяка константа. Функція $w(\theta)$ є 2π-періодичною на прямій. Оскільки підінтегральна функція в (2) є додатною, маємо $v(0) \ne v(2\pi)$. Це суперечить періодичності функції $v(\theta)$.

Лема 2. *Особливі точки векторного поля W є також особливими точками векторного поля V.*

Доведення. Припустимо, що $w(\theta_0) = 0$. Нехай $v(\theta_0) \ne 0$. Тоді існує деякий окіл U_{θ_0} цієї точки, де $v(\theta) \ne 0$. У цьому околі рівняння (1) може бути переписано як

$$w'(\theta) = \frac{1 + v'(\theta)}{v(\theta)}\, w(\theta). \tag{3}$$

Оскільки $w(\theta_0) = 0$ і права частина рівняння (3) задовольняє умовам Ліпшиця щодо функції w рівномірно по θ, то в силу теореми Пікара [14] диференціальне рівняння (3) має єдиний розв'язок в околі U_{θ_0}. Очевидно, таким розв'язком є $w \equiv 0$, що суперечить тому, що $W \in \mathcal{C}$.

Лема 3. *Кількість особливих точок векторного поля W є скінченою.*

Доведення. Припустимо, що кількість особливих точок є нескінченною. Оскільки S^1 — компактний многовид, то існує монотонно зростаюча (або спадна) послідовність $\{\theta_n\}$, яка збігається до деякої точки θ_0 і така, що $w(\theta_n) = 0$. Легко показати, що для будь-якого n існує регулярна (неособлива) точка $\hat{\theta}_n \in (\theta_n, \theta_{n+1})$, така що задовольняє умові $w'(\hat{\theta}_n) = 0$. Тоді з рівняння (1) випливає, що $v'(\hat{\theta}_n) = -1$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n = \theta_0$, то, в силу неперервної диференційованості функції $v(\theta)$, маємо $\lim_{n\to\infty} v'(\hat{\theta}_n) = v'(\theta_0) = -1$. З іншого боку, з леми 2 випливає, що $v(\theta_n) = v(\theta_{n+1}) = 0$. Звідси випливає, що існує точка така, що $\tilde{\theta}_n \in (\theta_n, \theta_{n+1})$

така, що $v'(\tilde{\theta}_n) = 0$. А оскільки $\lim_{n\to\infty}\tilde{\theta}_n = \theta_0$, то $\lim_{n\to\infty} v'(\tilde{\theta}_n) = v'(\theta_0) = 0$. Тому є суперечність.

Лема 4. *Якщо θ_0 є особливою точкою векторного поля W, то вона є виродженою для цього поля* (*тобто* $w'(\theta_0) = 0$).

Доведення. Оскільки $v(\theta_0) = 0$ (див. лему 2), то

$$v(\theta) = v'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + h(\theta), \qquad w(\theta) = w'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + g(\theta),$$

де $h,\ g$ — неперервно-диференційовні функції і

$$h(\theta_0) = g(\theta_0) = h'(\theta_0) = g'(\theta_0) = 0. \tag{4}$$

Крім того, враховуючи рівняння (1), маємо

$$\begin{aligned}\big[v(\theta)\partial_\theta, w(\theta)\partial_\theta\big] = \big[(\theta - \theta_0)(v'(\theta_0)g'(\theta) - w'(\theta_0)h'(\theta)) + \\ + h(\theta)(w'(\theta_0) + g'(\theta)) - g(\theta)(v'(\theta_0) + h'(\theta))\big]\partial_\theta \\ = \big[w'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + g(\theta)\big]\partial_\theta.\end{aligned}$$

Розподілимо обидві сторони цього рівняння на $\theta - \theta_0$ і розглянемо границю $\theta \to \theta_0$. Тоді зі співвідношення (4) та теореми Лопіталя, легко отримати, що $w'(\theta_0) = 0$.

Лема 5. *При перетворенні еквівалентності $\tilde{\theta} = f(\theta)$ (з класу $\mathcal{F}$) особлива* (*відповідно регулярна*) *точка векторного поля W відображається в особливу точку* (*відповідно регулярну*) *векторного поля $\tilde{W} = \tilde{w}(\tilde{\theta})\partial_{\tilde{\theta}}$.*

Доведення. а) Нехай $w(\theta_0) \neq 0$. Тоді $f'(\theta)$ — неперервна в точці θ_0. Припустимо, що це не так. Тоді, існує окіл цієї точки, де $f'(\theta)$ неперервна, окрім θ_0, і $\lim_{\theta\to\theta_0} f'(\theta) = \pm\infty$ (знак залежить від $\deg f$). Для перетвореного векторного поля $\tilde{W}$ маємо співвідношення $\tilde{w}\big(f(\theta)\big) = w(\theta)f'(\theta)$. Оскільки $w(\theta) \neq 0$ у вищезгаданому околі, то

$$f'(\theta) = \frac{\tilde{w}\big(f(\theta)\big)}{w(\theta)}, \tag{5}$$

і з неперервності функцій f і $\tilde{w}$ випливає, що $\lim_{\theta\to\theta_0} f'(\theta)$ є скінченим, тобто є суперечність. Нагадаємо, що неперервність функції $\tilde{w}$ випливає з властивості, що будь-яке перетворення еквівалентності $f \in \mathcal{F}$ відображає векторне поле з класу C^1 в векторне поле того ж класу.

Тепер припустимо, що $\tilde{w}(f(\theta_0)) = 0$ (тобто $f(\theta_0)$ є особливою). Оскільки права частина диференціального рівняння (5) задовольняє умовам Ліпшица відносно аргументу $f(\theta)$ рівномірно по θ (функція $\tilde{w}$ є неперервно-диференційовною), то в околі точки θ_0 існує єдиний розв'язок $f(\theta)$. Постійна функція $f(\theta) = f(\theta_0) = \mathrm{const}$ задовольняє рівнянню (5), тому вона і є розв'язком в цьому околі. Але тоді відображення $f(\theta)$ не є взаємно-однозначним, що суперечить визначенню цієї властивості перетворення еквівалентності. Тобто $\tilde{\theta}_0 = f(\theta_0)$ є регулярною точкою.

б) Нехай θ_0 — особлива точка і припустимо, що $\tilde{w}(f(\theta_0)) \neq 0$ (тобто $f(\theta_0)$ регулярна). Згідно леми 3 існує окіл точки θ_0, в якому всі точки регулярні (окрім θ_0). З попередньої частини доведення отримуємо (див. (5)) співвідношення для регулярних точок околу: $f'(\theta) > 0$ (або $f'(\theta) < 0$), якщо $\deg f > 0$ (або $\deg f < 0$), і $\lim_{\theta\to\theta_0} f'(\theta) = \pm\infty$. Тому легко показати, що обернене перетворення $\theta = f^{-1}(\tilde{\theta})$ є неперервно-диференційовним у всьому околі точки $\tilde{\theta}_0 = f(\theta_0)$ $(f^{-1}(\tilde{\theta}_0) = \theta_0)$. Застосовуючи аргументи попередньої частини доведення (п. а)), бачимо, що регулярна точка $\tilde{\theta}_0$ відображається в особливу точку θ_0 при відображенні f^{-1}. Отже, маємо суперечність.

***Наслідок* 1.** *Кількість особливих точок векторного поля є інваріантною відносно будь-якого перетворення еквівалентності.*

3. Реалізації розв'язних алгебр. Реалізації алгебри $A_{2.1} = V \oplus W$ описані в попередньому розділі. А саме, якщо $V = \langle e_1 \rangle = v(\theta)\partial_\theta$, $W = \langle e_2 \rangle = w(\theta)\partial_\theta$, то реалізація алгебри описується так: $w(\theta) = \lambda v(\theta)$ на відрізках $[\theta', \theta'']$, де λ — константи, θ', θ'' — вироджені точки, і всі точки інтервалу є невиродженими. Будемо і далі таке співвідношення реалізацій двох одновимірних комутативних алгебр позначати як $\langle e_1 \rangle \sim \langle e_2 \rangle$.

А) Реалізації алгебри $A_{2.2}$

Враховуючи леми 1 і 3, вважаємо, що існує векторне поле W з $n \geq 1$ особливими точками θ_k. Згідно леми 4 вони також є виродженими. Легко показати, що за допомогою перетворень еквівалентності, а також враховуючи лему 5, можна покласти $\theta_k = \dfrac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Розглянемо інтервал $\triangle_k = (\theta_k, \theta_{k+1})$ і позначимо

$$\bar{\theta}_k = \frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2} = \frac{\pi(2k+1)}{n}.$$

Побудуємо наступне неперервно-диференційоване перетворення f на $\triangle_k$, що задовольняє умовам

$$f(\theta_k) = \theta_k, \qquad f(\theta_{k+1}) = \theta_{k+1}, \qquad f(\bar{\theta}_k) = \bar{\theta}_k. \tag{6}$$

Припустимо, що $w(\theta) > 0$, $\theta \in \triangle_k$. Розглянемо задачу Коші для цього інтервалу:

$$w(\theta) f'(\theta) = 1 - \cos(n f(\theta)), \qquad f(\bar{\theta}_k) = \bar{\theta}_k. \tag{7}$$

Його розв'язок є

$$f(\theta) = \frac{2}{n} \operatorname{arctg}\big(-nI(\theta)\big) + \bar{\theta}_k, \quad \text{де} \quad I(\theta) = \int\limits_{\bar{\theta}_k}^{\theta} \frac{d\theta}{w(\theta)}, \quad \theta \in \triangle_k. \tag{8}$$

Очевидно, що інтеграл $I(\theta)$ збігається для будь-якої точки з інтервалу $\triangle_k$. У силу леми 4 інтеграл не збігається на кінцях цього інтервалу:

$$\lim_{\theta \to \theta_k + 0} I(\theta) = -\infty, \qquad \lim_{\theta \to \theta_{k+1} - 0} I(\theta) = +\infty.$$

Враховуючі ці співвідношення легко показати, що перетворення (8) задовольняє умовам (6) і перетворює векторне поле $w(\theta)\partial_\theta$ в векторне поле $\big(1 - \cos(n\tilde{\theta})\big)\partial_{\tilde{\theta}}$.

Якщо $w(\theta) < 0$ для $\theta \in \triangle_k$, то, аналогічно, можна отримати перетворення еквівалентності, що відображає векторне поле $w(\theta)\partial_\theta$ у векторне поле $\big(\cos(n\tilde{\theta}) - 1\big)\partial_{\tilde{\theta}}$.

Таким чином, на кожному інтервалі $\triangle_k$ отримуємо векторне поле $W = \pm\big(1 - \cos(n\theta)\big)\partial_\theta$ (опускаючи знак тильди). Підставивши функцію $w(\theta) = \pm\big(\cos(n\theta) - 1\big)$ у рівнянні (1), легко знайти розв'язок для функції $v(\theta)$ на цьому інтервалі $\triangle_k$:

$$v(\theta) = \frac{1}{n}\sin(n\theta) + \lambda_k\big(1 - \cos(n\theta)\big), \quad \lambda_k \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Далі, можна покласти константи λ_k в (9) рівними нулю. Для цього, розглянемо перетворення f кола на себе такого вигляду:

$$f(\theta) = \frac{2}{n}\,\mathrm{arcctg}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{n\theta}{2} + \lambda_k n\right) + \frac{2\pi k}{n}, \quad \text{якщо} \quad \theta \in \triangle_k.$$

Легко показати, що таке перетворення $\overline{\theta} = f(\theta)$ належить вищезазначеному класу $\mathcal{F}_0^+$, має нерухомі точки θ_k, не змінює вигляд векторного поля: $\overline{W} = \pm(1 - \cos(n\overline{\theta}))\partial_{\overline{\theta}}$, і змінює вигляд векторного поля, так що $\overline{V} = \overline{v}(\overline{\theta})\partial_{\overline{\theta}}$, де функція $\overline{v}(\overline{\theta})$ має вигляд (9) і всі $\lambda_k = 0$.

У результаті, маємо наступне твердження.

Теорема 1. *Будь-яка реалізація двовимірної некомутативної алгебри $A_{2.2}$ векторних полів на колі еквівалентна*

$$A_{2.2}^n = \left\langle \sigma^n(\theta)(1 - \cos(n\theta))\partial_\theta,\ \frac{1}{n}\sin(n\theta)\partial_\theta \right\rangle, \tag{10}$$

де $n \in \mathbb{N}$, функція $\sigma^n(\theta)$ дорівнює або 1 або -1 на відрізках $\left[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n}\right]$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Б) Реалізації алгебр $A_{k.i}$ розмірності більше ніж два

Відомо, що задача класифікації неізоморфних розв'язних алгебр Лі розв'язана лише для дійсних алгебр Лі до шостого порядку включно (див., наприклад, [15 – 18]). Тут наводимо реалізації розв'язних алгебр Лі на колі над полем $\mathbb{R}$, розмірність яких не перевищує п'яти. Будемо користуватися позначеннями [13]. Там описані комутаційні співвідношення як нерозкладних алгебр $A_{k.i}$ розмірності k (i — порядковий номер), так і розкладних в пряму суму алгебр. Нехай серед базисних елементів алгебри є такі $e_l,\ e_m,\ e_n$, що $[e_l, e_m] \neq 0$, $[e_l, e_n] = [e_m, e_n] = 0$. Очевидно, що реалізацій на колі таких алгебр не існує. Дійсно, з останніх умов випливає, що $e_l \sim e_n$, $e_m \sim e_n$, і тоді $e_l \sim e_m$ і $[e_l, e_m] = 0$, що суперечить першій умові. Це твердження виключає можливі реалізації на колі багатьох розв'язних алгебр, наприклад усіх розкладних.

Також, нескладно переконатися, що майже всі нерозкладні алгебри також виключаються. Наприклад, нехай існує реалізація на колі алгебри $A_{3.9}$ з ненульовими комутаційними співвідношеннями

$$[e_1, e_3] = qe_1 - e_2, \qquad [e_2, e_3] = e_1 + qe_2, \quad q > 0.$$

З цих співвідношень випливає, що $e_1 \sim e_2$, тобто локально на деякому інтервалі виконуються умови $e_2 = \lambda e_1$, $[e_1, e_3] = (q - \lambda)e_1$, $[\lambda e_1, e_3] = (1 + q\lambda)e_1$ звідки отримуємо, що $\lambda(q - \lambda) = (1 + q\lambda)$, що неможливо, якщо $\lambda \in \mathbb{R}$.

Аналогічний аналіз, стосовно інших розв'язних алгебр призводить до такого результату.

Теорема 2. *Існують наступні реалізації розв'язних алгебр Лі $A_{k.i} = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ векторних полів на колі ($k \leq 5$):*

- $A_{3.1} = 3A_1$, *де* $e_1 \sim e_2 \sim e_3$;
- $A_{3.5}$, *де* $e_2 \sim e_1$, $\langle e_1, e_3 \rangle$ *утворюють реалізації* $A_{2.2}^n$ *алгебри* $A_{2.2}$ *в теоремі* 1 ;
- $4A_1$, *де* $e_1 \sim e_2 \sim e_3 \sim e_4$;
- $A_{4.5}$ $(q = p = 1)$, *де* $e_2 \sim e_1$, $e_3 \sim e_1$, $\langle e_1, e_4 \rangle = A_{2.2}^n$;
- $5A_1$, *де* $e_1 \sim e_2 \sim e_3 \sim e_4 \sim e_5$;
- $A_{5.7}$ $(q = p = r = 1)$, *де* $e_2 \sim e_1$, $e_3 \sim e_1$, $e_4 \sim e_1$, $\langle e_1, e_5 \rangle = A_{2.2}^n$.

4. Алгебри з ненульовим фактором Леві. Як відомо, довільна алгебра Лі може бути представлена напівпрямою сумою розв'язної і напівпростої підалгебр (див. наприклад, [19, с. 170 – 172]. Якщо ця напівпроста підалгебра (фактор Леві) ненульова, то алгебра містить просту підалгебру. Доведемо таку теорему.

Теорема 3. *Якщо розмірність простої алгебри векторних полів більше трьох, то для неї не існує її реалізації на колі.*

Доведення. Нехай існує така реалізація алгебри $L = \langle e_1, e_2, \ldots, e_s\rangle = \langle \varphi_1\partial_\theta, \varphi_2\partial_\theta, \ldots, \varphi_s\partial_\theta\rangle$, де $s > 3$, $\varphi_i(\theta)\partial_\theta \in \mathcal{C}$. Очевидно, існує такий інтервал $\mathcal{I}$ на якому $\varphi_1(\theta) \neq 0$ і таке перетворення еквівалентності $\mathcal{F}$, що в реалізації алгебри можна вважати $\varphi_1(\theta) = 1$ на цьому інтервалі, а також, що 0 належить $\mathcal{I}$. За визначенням алгебри Лі маємо співвідношення $[e_1, e_i] = C_i^k\varphi_k$ (де $C_i^k = C_{1i}^k$ — структурні сталі для алгебри), звідки випливає, що $\varphi_i' = C_i^k\varphi_k$, $i = 2, \ldots, s$ (тут і далі по повторюваним індексам виконується сумування). Звідси маємо, що функції φ_i є нескінченно-диференційованими. Також можна вважати, що $\varphi_i(0) = 0$, $i = 2, \ldots, s$ (за допомогою зміни базису алгебри).

Будемо називати $l \in \mathbb{N}$ порядком функції $\varphi(\theta)$, якщо $\varphi^{(k)}(0) = 0$ для $0 \leq ka\varphi^{(l)}(0) \neq 0$. Якщо не існує такого l, то порядок функції $\varphi(\theta)$ будемо вважати нескінченним. Далі, якщо всі функції $\varphi_i(\theta)$, $i = 2, \ldots, s$, мають нескінчений порядок, то неважко переконатися, що $\langle e_2, \ldots, e_s\rangle$ є ідеалом алгебри L, що суперечить тому, що алгебра проста. Тоді існує таке $l \in \mathbb{N}$, яке є мінімальним порядком серед цих функції. Без обмеження загальності можна вважати, що l — порядок функції $\varphi_2(\theta)$, а порядки для інших функцій більше, ніж l (за допомогою зміни базису). Нехай $l > 1$. Оскільки порядок функції $\varphi_2'(\theta)$ є $l - 1 > 0$, то, очевидно, що комутатор $[e_1, e_2] = \varphi_2'(\theta)\partial_\theta$ не може бути лінійною комбінацією базисних операторів алгебри. Тому $l = 1$.

Аналогічно, розглядаючи базисні елементи $\langle e_3, \ldots, e_s\rangle$ можна довести, що порядок функції $\varphi_3(\theta)$ є 2, а порядки решти функцій $\varphi_i(\theta)$ $(i > 3)$ більш ніж 2 і є скінченними. Причому, можна змінити базис таким чином, що відповідні порядки m_i $i > 3$ можна упорядкувати: 2 де функція $\chi(\theta)$ має порядок $m_s + 1$, то враховуючі останні нерівності, неважко переконатися, що цей комутатор не може бути лінійною комбінацією базисних операторів алгебри. Тому s може дорівнювати тільки 3.

Як відомо, існує лише дві простих алгебри розмірності не вище ніж 3: $\mathfrak{so}(3)$ і $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Реалізацій алгебри $\mathfrak{so}(3)$ векторних полів на прямій (а тому і на колі) не існує (див. наприклад, [1, 8]). Розглянемо алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Неважко отримати наступну теорему.

Теорема 4. *Будь-яка реалізація алгебри* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ *векторних полів на колі еквівалентна*

$$\left\langle \sigma^n(\theta)(1 - \cos(n\theta))\partial_\theta,\ \frac{1}{n}\sin(n\theta)\partial_\theta,\ \frac{\sigma^n(\theta)}{n^2}\big(1 + \cos(n\theta)\big)\partial_\theta \right\rangle, \tag{11}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^n(\theta) = \pm 1$ *на відрізках* $\left[\dfrac{2\pi k}{n}, \dfrac{2\pi(k+1)}{n}\right]$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Доведення. Нехай алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$. Як підалгебру вона містить алгебру $A_{2.2} = \langle e_1, e_2\rangle$, всі нееквівалентні реалізації $A_{2.2}^n$ якої описані в теоремі 1. Тому, можна покласти, що для нееквівалентних реалізацій алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ базисні векторні поля e_1 і e_2 мають вигляд (10). Враховуючи комутаційні співвідношення між усіма операторами e_1, e_2 і e_3 неважко отримати, що оператор e_3 має вигляд $\dfrac{\sigma^n(\theta)}{n^2}\big(1 + \cos(n\theta)\big)\partial_\theta$.

Далі, якщо фактор Леві є напівпростою алгеброю, тобто прямою сумою простих алгебр, то реалізацій таких алгебр не існує, як було показано в попередньому параграфі перед теоремою 2.

Нарешті, якщо розглядати напівпрямі суми алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (як фактора Леві) і розв'язаних алгебр (тих, які відомі на сьогодні), то можна довести, що відповідних алгебр в одновимірному випадку, і, зокрема, на колі, не існує. Для цього достатньо розглянути всі випадки таких алгебр, де розв'язана підалгебра (радикал) співпадає з однією із алгебр, які наведені в теоремі 2. Враховуючі комутаційні співвідношення між операторами алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ і відповідними операторами розв'язаних алгебр (радикалів), отримуємо суперечність.

Отже, теореми 1, 2 і 4, дають перелік всіх можливих реалізацій некомутативних алгебр Лі векторних полів на колі.

5. Деякі комбінаторні формули. У теоремі 1 знайдено всі нееквівалентні реалізації на колі (10) двовимірної некомутативної алгебри $A_{2.2}$ відносно перетворень $\mathcal{F}_0^+$. Однак, серед цих реалізацій є такі, які еквівалентні відносно перетворень O_φ (поворотів) і T (інверсії) (див. означення перетворень у вступі). Якщо опишемо кількість реалізацій цієї алгебри, які нееквівалентні відносно всіх трьох вказаних перетворень, тобто кількість наборів відповідних функцій $\sigma^n(\theta)$, то в силу теорем 1 і 4, така ж сама кількість нееквівалентних реалізацій буде і для алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

А) Нееквівалентні реалізації на колі відносно поворотів. Опишемо спочатку реалізації, які еквівалентні відносно перетворень O_φ, а також знайдемо їх кількість. Очевидно, що якщо деяка пара реалізацій еквівалентна відносно поворотів кола на кут φ, то кількість n особливих точок відповідних полів W і $\overline{W}$ співпадає і при цьому $O_\varphi = O_{\varphi_k} \equiv O_k$, де $\varphi_k = \dfrac{2\pi k}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. У реалізації (10) сигнатурою довжиною n назвемо вектор $\sigma^n = (\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1})$, де $\sigma_k = \pm 1$ і співпадають з відповідними значеннями функції $\sigma^n(\theta)$ на відрізках $\left[\dfrac{2\pi k}{n}, \dfrac{2\pi(k+1)}{n}\right]$. Тоді, ця реалізація за допомогою поворотів O_k перетворюється в реалізацію (10) з сигнатурою $\tilde{\sigma} = O_k(\sigma) = (\tilde{\sigma}_0,\tilde{\sigma}_1,\ldots,\tilde{\sigma}_{n-1})$, де $\tilde{\sigma}_i = \sigma_{n-k+i(\bmod n)}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$. Такі сигнатури σ і $\tilde{\sigma}$ назвемо еквівалентними відносно поворотів O_k. Таким чином, вся множина сигнатур однакової довжини (тобто реалізацій (10)) розпадається на класи еквівалентності відносно поворотів. Реалізації з сигнатурами різної довжини, очевидно, є нееквівалентними.

Нехай $d \in \mathbb{N}$ $1 \le d \le n$ таке мінімальне число, що $O_d(\sigma) = \sigma$ (воно існує, оскільки $O_n(\sigma) \equiv \sigma$). Таку сигнатуру назвемо d-періодичною. Тоді неважко переконатися, що:

– d є дільник n: $d|n$;

– якщо $d \neq d'$, то d- і d'-періодичні сигнатури нееквівалентні.

Введемо такі позначення:

– L^n — кількість класів еквівалентності сигнатур довжини n;

– M_d^n — кількість класів еквівалентності d-періодичних сигнатур довжини n;

– N_d^n — кількість різних (можливо еквівалентних) d-періодичних сигнатур довжиною n.

Оскільки при поворотах d-періодична сигнатура σ перетворюється в d-періодичну сигнатуру $\tilde{\sigma}$, а також сигнатури σ і $O_k(\sigma)$ різні, якщо k тоді $N_d^n = dM_d^n$. Далі, якщо $d|n$, то, очевидно, що $N_d^n = N_d^d$, і ми маємо

$$L^n = \sum_{d|n} M_d^n = \sum_{d|n} \frac{N_d^n}{d} = \sum_{d|n} \frac{P_d}{d}, \quad \text{де} \quad P_d = N_d^d. \tag{12}$$

(тут і далі мається на увазі сума по всіх дільниках d числа n). Оскільки повна кількість усіх різних сигнатур дорівнює 2^n, то

$$\sum_{d|n} N_d^n = \sum_{d|n} P_d = 2^n. \tag{13}$$

Очевидно, що $P_1 = 2$ (сигнатура σ_0 дорівнює або 1 або -1). Таким чином, маємо рекурентну формулу (13) для обчислення P_d, і далі по формулі (12) можна знайти кількість L^n класів еквівалентності сигнатур.

Наприклад, якщо $n = p$ є просте число, то $P_1 + P_p = 2^p$, тобто $P_p = 2^p - 2$.

Якщо $n = p_1p_2$, p_i є прості числа, то $P_1+P_{p_1}+P_{p_2}+P_{p_1p_2} = 2^n$, тобто $P_n = 2^n-2^{p_1}-2^{p_2}+2$. При цьому

$$L_n = \frac{P_1}{1} + \frac{P_{p_1}}{p_1} + \frac{P_{p_2}}{p_2} + \frac{P_{p_1p_2}}{p_1p_2} = \frac{2}{1} + \frac{2^{p_1}-2}{p_1} + \frac{2^{p_2}-2}{p_2} + \frac{2^n-2^{p_1}-2^{p_2}+2}{p_1p_2}.$$

Знайдемо формулу для обчислення величин L^n і P_d. Для цього введемо такі позначення. Нехай n розкладається на прості числа: $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$, $\alpha_i > 0$. Вважаємо далі, що n і, відповідно, числа s, p_i і α_i фіксовані. Далі позначимо наступні три вектора: $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$, де $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ — натуральні числа, $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s)$, де $\varepsilon_i = \{0; 1\}$.

Можна довести наступну теорему.

Теорема 5. *Нехай $d = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$ дільник числа n, тобто $\beta_i \le \alpha_i$ (позначимо, що $\vec{\beta} \le \vec{\alpha}$). Введемо також такі позначення: $\{\vec{\gamma}\} = p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_s^{\gamma_s}$, $|\vec{\varepsilon}| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_s$. Тоді виконується наступне співвідношення*

$$P_d = P_{\{\vec{\beta}\}} = \sum_{\vec{\varepsilon} \le \vec{\beta}} (-1)^{|\vec{\varepsilon}|} 2^{\{\vec{\beta}-\vec{\varepsilon}\}}. \tag{14}$$

Враховуючи формулу (12) *маємо, що кількість класів еквівалентності сигнатур довжини n є*

$$L_n = L_{\{\vec{\alpha}\}} = \sum_{\vec{\beta} \le \vec{\alpha}} \frac{1}{\{\vec{\beta}\}} \sum_{\vec{\varepsilon} \le \vec{\beta}} (-1)^{|\vec{\varepsilon}|} 2^{\{\vec{\beta}-\vec{\varepsilon}\}}. \tag{15}$$

Доведення. Доведемо формулу (14) методом індукції за $k = |\vec{\beta}| = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_s$ (s і p_i фіксовані). Якщо $k = 0$, то $\{\vec{\beta}\} = \{\vec{0}\} = 1$ і $P_1 = 2$ (див. вище). З іншого боку $P_1 = P_{\{\vec{0}\}} = (-1)^0 2^{\{0\}} = 2$, тобто формула справедлива. Нехай вона виконується для всіх $l = |\vec{\beta}| \le k$. Нехай $|\vec{\beta}| = k + 1$. З формули (13) маємо

$$P_{\{\vec{\beta}\}} = 2^{\{\vec{\beta}\}} - \sum_{\vec{0} < \vec{\gamma} \le \vec{\beta}} P_{\{\vec{\beta}-\vec{\gamma}\}}, \quad \text{(сумування по } \vec{\gamma}). \tag{16}$$

Оскільки $|\vec{\beta} - \vec{\gamma}|$ (14), а права частина співвідношення (16) під знаком суми складається з степенів двійки $2^{\{\vec{\beta}-\vec{\delta}\}}$, де $|\vec{\delta}| > 0$.

Порахуємо коефіцієнт при $2^{\{\vec{\beta}-\vec{\varepsilon}\}}$ в правій частині (16). Нехай $|\vec{\varepsilon}| = l > 0$. Тоді з формули (14) випливає, що така степінь двійки входить в склад членів $P_{\{\vec{\beta}-\vec{\varepsilon}+\vec{\delta}\}}$, для яких $0 \le \vec{\delta} < \vec{\varepsilon}$, і коефіцієнт при цієї ступені в цьому члені дорівнює $(-1)^r$, де $0 \le |\vec{\delta}| = r$. Перебираючи всі можливі вектори $\vec{\delta}$, з формули (16) знаходимо загальний коефіцієнт:

$$-\sum_{0 \le r < l} (-1)^r C_l^r = -\sum_{0 \le r \le l} (-1)^r C_l^r + (-1)^l = -(1-1)^l + (-1)^l = (-1)^{|\vec{\varepsilon}|}.$$

Порахуємо коефіцієнт при $2^{\{\vec{\beta}-\vec{\gamma}\}}$, де для вектора $\vec{\gamma}$ деякий компонент $\gamma_i > 1$, і ненульових компонентів буде l. Тоді така степінь двійки входить в склад членів $P_{\{\vec{\beta}-\vec{\gamma}+\vec{\varepsilon}\}}$, для яких $0 \le$ $\le \vec{\varepsilon} < \vec{\gamma}$, і коефіцієнт при цієї степені в цьому члені дорівнює $(-1)^r$, де $0 \le |\vec{\varepsilon}| = r \le l$.

Перебираючи всі можливі такі вектори $\vec{\varepsilon}$, з формули (16) знаходимо загальний коефіцієнт:

$$-\sum_{0\le r\le l}(-1)^r C_l^r = -(1-1)^l = 0.$$

Б) Нееквівалентні реалізації на колі відносно інверсій. Тепер розглянемо інверсії T кола відносно „вертикальної" осі, тобто перетворення для якого степінь відображення $\deg T = -1$, що $\theta \to \theta' = 2\pi - \theta$, $0 \le \theta < 2\pi$. Неважко переконатися, що при перетворенні T реалізація з сигнатурою σ перетворюється в реалізацію з сигнатурою $\tilde{\sigma} = T(\sigma) = (-\sigma_{n-1}, -\sigma_{n-2}, \ldots, -\sigma_0)$. Тоді деякі нееквівалентні відносно поворотів O_k сигнатури (і відповідно реалізації алгебр), які належать одному із L_n класів еквівалентності (назвемо її O-еквівалентністю), можуть бути еквівалентними відносно інверсії. Оскільки має місце співвідношення $O_kT = TO_{-k}$, то легко показати, що під дією інверсії множина елементів будь-якого класу O-еквівалентності взаємно-однозначно відображається в множину елементів деякого класу O-еквівалентності. Таким чином, кількість класів еквівалентності відносно перетворень O_k і T менша ніж L_n. Позначимо число K_n як кількість таких класів. Має місце наступна теорема.

Теорема 6. *Множина реалізацій алгебри $A_{2.2}$ (або $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \supset A_{2.2}$) векторних полів на колі, для яких векторне поле W (базисний елемент алгебри — див. (1)) має n особливих точок, розпадається на класи еквівалентності відносно множини перетворень $\mathcal{F}$ кола на себе. Кількість K_n таких класів є наступним:*

а) *якщо n є непарне число, то $K_n = \dfrac{L_n}{2}$;*

б) *якщо n є парне число, то $K_n = \dfrac{L_n + I_n}{2}$, де I_n — кількість таких класів еквівалентності відносно перетворень O_k, елементи яких мають сигнатури з однаковим числом позитивних і негативних компонент σ_i, і які інваріантні відносно інверсії T. Якщо $n = 2k$, то $I_n = 2^{k-1}$.*

Доведення. а) Нехай $n = 2k - 1$. Вся множина представників класів еквівалентності відносно поворотів O_k ділиться на два підмножини: з сигнатурами, у яких кількість додатних компонент більш ніж від'ємних, і у яких вона менше. Перетворення інверсії T встановлює взаємно-однозначну відповідність між цими підмножинами: кожен елемент однієї підмножини перетворюється інверсією в елемент другої, причому, два різних елемента — в два різних, що доводить твердження а).

б) Нехай $n = 2k$. Оскільки інверсія встановлює відображення множини класів O-еквівалентності (відносно поворотів) на себе, то кожен з L_n класів є такий, що або відображається в інший, або – в себе. Нехай кількість таких T-інваріантних класів буде I_n. Тоді, враховуючі що $T^2 = I$ (тотожне відображення), кількість класів еквівалентності відносно композиції поворотів і інверсій дорівнює $K_n = \dfrac{L_n - I_n}{2} + I_n = \dfrac{L_n + I_n}{2}$. Знайдемо кількість I_n.

Нехай деякий клас відображається на себе, тобто кожний елемент σ задовольняє співвідношення $T\sigma = O_l\sigma$. Тоді $l = 2s$ — парне. Дійсно, нехай $l = 2s + 1$. Тоді $T\sigma = O_{2s+1}\sigma$, і зі співвідношення $O_kT = TO_{-k}$ випливає, що $TO_s\sigma = O_1O_s\sigma$, або $T\tilde{\sigma} = O_1\tilde{\sigma}$, де $\tilde{\sigma} = O_s\sigma = (\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_{2k-1})$ — представник того ж класу. Оскільки $T\tilde{\sigma} = (-\tilde{\sigma}_{2k-1}, \ldots)$, $O_1\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_{2k-1}, \ldots)$, отримуємо суперечність. Отже, $T\sigma = O_{2s}\sigma$, і $T\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}$, де $\tilde{\sigma} = O_s\sigma$. Такі сигнатури назвемо T-інваріантними. Тобто представником кожного T-інваріантного класу можна вибрати T-інваріантну сигнатуру. Очевидно, така сигнатура має вигляд $\sigma = (\alpha, T\alpha)$, де α — сигнатура довжиною $k = \dfrac{n}{2}$. Перебираючи всі можливі α, отримаємо всю множину M T-інваріантних сигнатур. Очевидно, їх кількість 2^k. Які серед них еквівалентні відносно поворотів?

Множину M можна описати іншим способом. Нехай σ — d-періодична. Тоді $d = 2l$, де l — дільник k. Дійсно, $\sigma = T\sigma = O_d\sigma$, і, як показано вище d — парне. Вся множина M розбивається на підмножини сигнатур різної періодичності, які між собою нееквівалентні. Нехай сигнатури $\sigma = (\beta, T\beta, \ldots, \beta, T\beta)$, $\delta = (\gamma, T\gamma, \ldots, \gamma, T\gamma)$ — $2l$-періодичні, де сигнатури β і γ довжини l і вони не є T-інваріантними (інакше період був би менший ніж $2l$). Припустимо, що σ і δ не співпадають і еквівалентні відносно поворотів: $\sigma = O_{-m}\delta$. Тоді m кратне l. Дійсно, нехай m і тоді $O_{2(l-m)}\delta = \delta$, що суперечить $2l$-періодичність δ. Так саме m не може належать інтервалу l. Звідси маємо, що $\beta = T\gamma$ і тому вся множина M розбивається на „пари” еквівалентних відносно поворотів сигнатур. Таким чином, кількість нееквівалентних відносно O- і T-перетворень дорівнює $2^k/2 = 2^{k-1}$.

Теореми 5 і 6 завершують повну класифікацію реалізацій на колі двовимірної некомутативної алгебри $A_{2.2}$ і алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Література

1. S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, **3**, Teubner, Leipzig (1893).
2. González-López A., N. Kamran, P. J. Olver, *Lie algebras of vector fields in the real plane*, Proc. London Math. Soc., **64**, 339 – 368 (1992).
3. I. A. Yehorchenko, *Nonlinear representation of the Poincaré algebra and invariant equations*, Symmetry Anal. Equat. Math. Phys., Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, Kyiv, 62 – 66 (1992).
4. R. Z. Zhdanov, V. I. Lahno, W. I. Fushchych, *On covariant realizations of the Euclid group*, Comm. Math. Phys., **212**, 535 – 556 (2000).
5. M. Nesterenko, S. Posta, O. Vaneeva, *Realizations of Galilei algebras*, J. Phys. A: Math. Theor., **49**, 115203, 26 pp. (2016).
6. R. O. Popovych, V. M. Boyko, M. O. Nesterenko, M. W. Lutfullin, *Realizations of real low-dimensional Lie algebras*, J. Phys. A: Math. Gen., **36**, 7337 – 7360; (2003) arXiv:math-ph/0301029.
7. А. Г. Сергеев, *Геометрическое квантование пространств петель*, Совр. пробл. математики, **13**, МИАН, Москва, 3 – 294 (2009).
8. М. С. Стригунова, *Конечномерные подалгебры в алгебре Ли векторных полей на окружности*, Тр. МИАН, **236**, 338 – 342 (2002).
9. В. А. Зайцева, В. В. Круглов, А. Г. Сергеев, М. С. Стригунова, К. А. Трушкин, *Конечномерные подалгебры в алгебре Ли векторных полей на окружности*, Тр. МИАН, **224**, 139 – 151 (1999).
10. S. V. Spichak, *Preliminary classification of realizations of two-dimensional Lie algebras of vector fields on a circle*, Group analysis of differential equations and integrable systems, 212 – 218, Department of Mathematics and Statistics, University of Cyprus, Nicosia, 2013.
11. Э. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, Москва (1990).
12. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, Москва (1986).
13. В. І. Лагно, С. В. Спічак, В. І. Стогній, *Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу*, Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування, Київ (2002).
14. В. В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, Москва: Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1950.
15. Г. М. Мубаракзянов, *О разрешимых алгебрах Ли*, Изв. высш. учебн. завед. Математика, № 1, 114 – 123 (1963).
16. Г. М. Мубаракзянов, *Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка*, Изв. высш. учебн. завед. Математика, № 3, 99 – 106 (1963).
17. Г. М. Мубаракзянов, *Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним ненильпотентным базисным элементом*, Изв. высш. учебн. завед. Математика, № 4, 104 – 116 (1963).
18. P. Turkowski, *Solvable Lie algebras of dimension six*, J. Math. Phys., **31**, № 6, 1344 – 1350 (1990).
19. К. Шевалле, *Теория групп Ли*, Т. 3. Общая теория алгебр Ли, Изд-во иностр. лит., Москва (1958).

Одержано 17.08.21