УДК 512.542

Д. В. Грицук (Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина, Беларусь),
А. А. Трофимук (Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь)

ПРОИЗВОДНАЯ p-ДЛИНА p-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ИНДЕКСАМИ ФИТТИНГОВЫХ p-ПОДГРУПП В СВОИХ НОРМАЛЬНЫХ ЗАМЫКАНИЯХ*

Let G be a p-soluble group. Then G has a subnormal series whose factors are p'-groups or abelian p-groups. The smallest number of abelian p-factors of all such subnormal series of G is called the derived p-length of G. A subgroup H of a group G is called Fitting if $H \leq F(G)$. A functional dependence of the estimate of the derived p-length of a p-soluble group on the value of the indexes of Fitting p-subgroups in its normal closures is established.

Нехай G — p-розв'язна група. Тоді G має субнормальний ряд, фактори якого або p'-групи, або абелеві p-групи. Найменша кількість абелевих p-факторів серед усіх таких субнормальних рядів групи G називається похідною p-довжиною p-розв'язної групи. Підгрупа H групи G називається фіттінговою, якщо $H \leq F(G)$. Тут $F(G)$ — підгрупа Фіттінга групи G. Встановлено функціональну залежність оцінки похідної p-довжини p-розв'язної групи від величини індексів фіттінгових p-підгруп у своїх нормальних замиканнях.

1. Введение. В настоящей статье рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1, 2]. Запись $Y \leq X$ означает, что Y — подгруппа группы X.

Ряд подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \ldots \leq G_{n-1} \leq G_n = G \tag{1}$$

называется *субнормальным*, если для любого i подгруппа G_i нормальна в G_{i+1}. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются *факторами* этого ряда.

Пусть p — простое число. Если порядок группы G является степенью числа p (не делится на p), то группа G называется *p-группой* (*p'-группой*).

В 2006 г. В. С. Монахов [3] предложил следующее определение.

Пусть G — p-разрешимая группа. Тогда она имеет субнормальный ряд, факторы которого являются либо p'-группами, либо абелевыми p-группами. Наименьшее число абелевых p-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется *производной p-длиной* p-разрешимой группы G и обозначается через $l_p^a(G)$. Если G — p-группа, то производная p-длина группы G совпадает с ее производной длиной. Ясно, что $l_p(G) \leq l_p^a(G)$ для произвольной p-разрешимой группы G. Здесь $l_p(G)$ — p-длина p-разрешимой группы G.

Оценки производной p-длины p-разрешимой группы при заданных ограничениях на силовские p-подгруппы получены в [4–8].

Если H и K — такие нормальные подгруппы в G, что $H \leq K$ и H/K — минимальная нормальная подгруппа фактор-группы G/K, то H/K называется *главным фактором* группы G. Главный фактор H/K называется *фиттинговым*, если подгруппа H содержится в подгруппе Фиттинга $F(G)$ группы G. По аналогии подгруппу A группы G будем называть *фиттинговой*, если $A \leq F(G)$.

* Выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-063).

Гашюц [9] доказал, что в разрешимой группе главный фактор наибольшего порядка является фиттинговым. Верхние границы инвариантов разрешимой группы (производной длины, нильпотентной длины, p-длины, главного ранга) в зависимости от фиттинговых главных факторов и фиттинговых подгрупп получены в работах [10–14], (см. также библиографию в обзоре [15]).

В работе [14] найдена зависимость ранга, производной длины и p-длины разрешимой группы от значений функций $t_p^F(G)$ и $t^F(G)$, заданных следующим образом:

$$t^F(G) = \max_{p\in\pi(G)} t_p^F(G), \qquad \text{где} \qquad t_p^F(G) = \max\{n \mid p^n\top|H^G : H|,\ H \leq F(G)\}.$$

Здесь запись $p^n\top|H^G : H|$ означает, что p^n делит $|H^G : H|$, а p^{n+1} не делит $|H^G : H|$; H^G — нормальное замыкание подгруппы H в группе G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащая H; $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G. Если $t^F(G) = 0$, то в группе G порядки всех фиттинговых главных факторов являются простыми числами и по теореме Бэра [17] группа G будет сверхразрешимой.

Хупперт [16], Бэр [17] и Я. Г. Беркович [18] исследовали группы, у которых порядки фиттинговых главных факторов не делятся на кубы простых чисел.

В настоящей статье результаты работы [14] распространены на p-разрешимый случай. Пусть p — простое число и G — p-разрешимая группа. Введем функцию

$$f_p(G) = \max\{n \mid p^n\top\ |H^G : H|,\ H \lhd\lhd G \text{ и } H \leq F_p(G)\}.$$

Здесь $F_p(G)$ — наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G, а запись $H \lhd\lhd G$ означает, что H — субнормальная подгруппа группы G.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — p-разрешимая группа. Тогда:*

1) $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \dfrac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 6}{4}$, *если* $p \notin \{2,3\}$;

2) $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \dfrac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 8}{4}$, *если* $p \in \{2,3\}$.

2. Вспомогательные результаты. Через $\Phi(G)$ обозначим подгруппу Фраттини группы G; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ — наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно.

Напомним некоторые свойства производной p-длины p-разрешимой группы.

Лемма 1 ([4], лемма 1-2)**.** *Пусть G — p-разрешимая группа. Тогда:*

1) *если H — подгруппа группы G, то $l_p^a(H) \leq l_p^a(G)$;*

2) *если N — нормальная подгруппа группы G, то $l_p^a(G/N) \leq l_p^a(G)$ и $l_p^a(G) \leq l_p^a(G/N) + l_p^a(N)$;*

3) *если N — нормальная p'-подгруппа группы G, то $l_p^a(G/N) = l_p^a(G)$;*

4) *если G и V — p-разрешимые группы, то $l_p^a(G \times V) = \max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\}$;*

5) *если N_1 и N_2 — нормальные подгруппы в G, то*

$$l_p^a(G/(N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_p^a(G/N_1), l_p^a(G/N_2)\};$$

6) $l_p(G) \leq l_p^a(G)$.

Лемма 2. *Пусть G — p-разрешимая группа. Тогда:*

1) $F_p(G/\Phi(G)) = F_p(G)/\Phi(G)$;

2) $F_p(G/O_{p'}(G)) = F_p(G)/O_{p'}(G)$;

3) $C_G(F_p(G)) \leq F_p(G)$.

Доказательство. 1. Первое утверждение следует из [19] (9.3.4).

2. Пусть $F_p(G/O_{p'}(G)) = S/O_{p'}(G)$. Поскольку $S/O_{p'}(G)$ — p-нильпотентна, то p'-холлова подгруппа $(S/O_{p'}(G))_{p'} = S_{p'}/O_{p'}(G)$ нормальна в группе $G/O_{p'}(G)$, где $S_{p'}$ — p'-холлова подгруппа группы S. Поэтому $S_{p'}$ нормальна в G, а значит, нормальна в S. Поэтому S — p-нильпотентная подгруппа и $S \leq F_p(G)$. Тогда

$$F_p(G/O_{p'}(G)) \leq F_p(G)/O_{p'}(G).$$

Обратное включение очевидно.

3. Третье утверждение следует из леммы 1.8.19 [20].

Лемма 3. *Пусть G — p-разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если N — p'-подгруппа группы G, то $f_p(G/N) \leq f_p(G)$;*

2) $f_p(G/\Phi(G)) \leq f_p(G)$;

3) *если N — минимальная нормальная подгруппа группы G порядка p^n, то $n \leq 1 + f_p(G)$.*

Доказательство. 1. Пусть H/N — субнормальная подгруппа в G/N такая, что $H/N \leq$ $\leq F_p(G/N)$ и $p^{f_p(G/N)} \top |(H/N)^{G/N} : H/N|$. Так как

$$|(H/N)^{G/N} : H/N| = |H^G : H|,$$

то $p^{f_p(G/N)}$ делит $|H^G : H|$. Из леммы 2(2) следует, что $H \leq F_p(G)$. Поскольку H субнормальна в G, то $f_p(G/N) \leq f_p(G)$.

2. Пусть $H/\Phi(G)$ — субнормальная подгруппа в $G/\Phi(G)$ такая, что $H/\Phi(G) \leq F_p(G/\Phi(G))$ и

$$p^{f_p(G/\Phi(G))} \top |(H/\Phi(G))^{G/\Phi(G)} : H/\Phi(G)|.$$

Так как $|(H/\Phi(G))^{G/\Phi(G)} : H/\Phi(G)| = |H^G : H|$, то $p^{f_p(G/\Phi(G))}$ делит $|H^G : H|$. Из леммы 2(1) следует, что $H \leq F_p(G)$. Поскольку H субнормальна в G, то $f_p(G/\Phi(G)) \leq f_p(G)$.

3. Пусть H — подгруппа простого порядка p в N. Поскольку N — нормальная p-подгруппа, то H субнормальна в G, $H \leq F_p(G)$ и $p^{1+f_p(G)}$ не делит $|H^G : H|$. Так как N — минимальная нормальная подгруппа, то $N = H^G$ и $|H^G : H| = p^{n-1}$. Поэтому $1 + f_p(G) > n - 1$ или $n \leq 1 + f_p(G)$.

Лемма 4 ([8], теорема 3.1)**.** *Пусть G — p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой порядка p^n. Если $p \notin \{2, 3\}$, то $l_p^a(G) \leq \dfrac{n+1}{2}$. Если $p \in \{2, 3\}$, то $l_p^a(G) \leq 1 + \dfrac{n}{2}$.*

Лемма 5 ([4], теорема 2)**.** *Пусть G — p-разрешимая группа, G_p — ее силовская p-подгруппа. Если G_p абелева, то $l_p^a(G) \leq 1$.*

3. Доказательство теоремы. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Из леммы 3(2) следует, что условие теоремы наследует фактор-группа $G/\Phi(G)$. Так как $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, то по индукции

$$l_p^a(G/\Phi(G)) = l_p^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G)) \leq \frac{(f_p(G/\Phi(G)))^2 + f_p(G/\Phi(G)) + 6}{4} \leq$$

$$\leq \frac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 6}{4},$$

если $p \notin \{2, 3\}$, и

$$l_p^a(G/\Phi(G)) = l_p^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G)) \leq \frac{(f_p(G/\Phi(G)))^2 + f_p(G/\Phi(G)) + 8}{4} \leq$$
$$\leq \frac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 8}{4},$$

если $p \in \{2,3\}$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\Phi(G) = 1$.

Предположим, что $O_{p'}(G) \neq 1$. Из леммы 3(1) следует, что условие теоремы наследует фактор-группа $G/O_{p'}(G)$. Тогда по индукции

$$l_p^a(G) = l_p^a(G/O_{p'}(G)) \leq \frac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 6}{4},$$

если $p \notin \{2,3\}$, и

$$l_p^a(G) = l_p^a(G/O_{p'}(G)) \leq \frac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 8}{4},$$

если $p \in \{2,3\}$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $O_{p'}(G) = 1$.

Таким образом, $F_p(G) = F(G) = O_p(G)$ и по лемме 3(3) $C_G(F_p(G)) \leq F_p(G)$. Кроме того, $F = F_p(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных p-подгрупп N_i, $1 \leq i \leq k$, группы G. Значит, $F_p(G)$ абелева и $C_G(F_p(G)) = F_p(G)$. Очевидно, что для каждого N_i фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}N_i$. По лемме 2.33 [1] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(N_i)$, $1 \leq i \leq k$. Кроме того,

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i) = C_G(F) = F \quad \text{и} \quad G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i) = G/F.$$

По лемме 1(5) справедливо

$$l_p^a(G/F) = l_p^a\left(G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i)\right) = \max\left\{l_p^a(G/C_G(N_1)), \ldots, l_p^a(G/C_G(N_k))\right\}.$$

Пусть N_i — элементарная абелева p-подгруппа порядка p^{m_i}. Тогда $m_i \leq 1 + f_p(G)$ по лемме 3(3) и $G/C_G(N_i)$ изоморфна подгруппе группы $GL(1 + f_p(G), p)$.

Поскольку силовская p-подгруппа группы $GL(1 + f_p(G), p)$ имеет порядок $p^{f_p(G)} \ldots p = p^{\frac{(f_p(G)+1)f_p(G)}{2}}$, то из леммы 4 следует, что

$$l_p^a(G/C_G(N_i)) \leq \frac{\frac{(f_p(G)+1)f_p(G)}{2} + 1}{2} = \frac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 2}{4},$$

если $p \notin \{2,3\}$, и

$$l_p^a(G/C_G(N_i)) \leq 1 + \frac{\frac{(f_p(G)+1)f_p(G)}{2}}{2} = \frac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 4}{4},$$

если $p \in \{2,3\}$.

Так как F абелева, то из леммы 5 следует, что

$$l_p^a(G) \leq \frac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 2}{4} + 1 = \frac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 6}{4},$$

если $p \notin \{2, 3\}$, и

$$l_p^a(G) \leq \frac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 4}{4} + 1 = \frac{(f_p(G))^2 + f_p(G) + 8}{4},$$

если $p \in \{2, 3\}$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* G — *p-разрешимая группа*, *тогда*:

1) *если* $f_p(G) \leq 1$, *то* $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq 2$;

2) *если* $f_p(G) \leq 2$, *то* $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq 3$.

Литература

1. В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов,* Вышэйш. шк., Минск (2006).
2. B. Huppert, *Endliche Gruppen I,* Springer, Berlin etc. (1967).
3. М. С. Монахов, *Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой,* Мат. заметки, **80**, № 4, 573 – 581 (2006).
4. Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко, *О производной π-длине π-разрешимой группы,* Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, № 3, 90 – 95 (2012).
5. Д. В. Грицук, В. С. Монахов, *О разрешимых группах, силовские подгруппы которых абелевы или экстраспециальны,* Труды Ин-та математики НАН Беларуси, **20**, № 2, 3 – 9 (2012).
6. Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко, *О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами,* Проблемы физики, математики и техники, **15**, № 1, 61 – 66 (2013).
7. Д. В. Грицук, *Производная π-длина π-разрешимой группы, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3*, Проблемы физики, математики и техники, **19**, № 2, 54 – 58 (2014).
8. Д. В. Грицук, *Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы,* Проблемы физики, математики и техники, **20**, № 3, 58 – 60 (2014).
9. W. Gashutz, *Existenz und Konjugiertsein von Untergruppen, die in endlichen auflosbaren Gruppen durch gewisse Indexschranken definiert sind,* J. Algebra, **53**, № 2, 389 – 394 (1978).
10. В. С. Монахов, *К теореме Хупперта–Шеметкова,* Труды Ин-та математики НАН Беларуси, **16**, № 1, 64 – 66 (2008).
11. А. А. Трофимук, *Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы,* Мат. заметки, № 87, 287 – 293 (2010).
12. А. А. Трофимук, *Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах,* Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, **19**, № 3, 304 – 307 (2013).
13. A. A. Trofimuk, *Solvable groups with restrictions on Sylow subgroups of the Fitting subgroup,* Asian-Eur. J. Math., **9**, № 2 (2016).
14. А. А. Трофимук, *О фиттинговых подгруппах конечной разрешимой группы,* Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, **18**, № 3, 242 – 246 (2012).
15. V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk, *Invariants of finite solvable groups,* Algebra Discrete Math., **14**, № 1, 107 – 131 (2012).
16. B. Huppert, *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen,* Math. Z., **60**, 409 – 434 (1954).
17. R. Baer, *Supersolvable immersion,* Can. J. Math., № 11, 353 – 369 (1959).
18. Я. Г. Беркович, *О разрешимых группах конечного порядка,* Мат. сб., **74(116)**, № 1, 75 – 92 (1967).
19. D. Robinson, *A course in the theory of groups,* 2nd ed., Grad. Texts Math., Springer-Verlag, New York (1996).
20. W. Guo, *The theory of classes of groups,* Sci. Press-Kluwer Acad. Publ., Beijing etc. (2000).

Получено 20.11.19