DOI: 10.37863/umzh.v73i4.6306

УДК 517.5

Ф. Г. Абдуллаєв (Киргиз.-Тур. ун-т „Манас”, Бішкек, Киргизстан; Університет Мерсіна, Туреччина),
Д. Д. Гюнь (Університет Газіантепа, Туреччина)

НЕРІВНОСТІ ТИПУ БЕРНШТЕЙНА – НІКОЛЬСЬКОГО ДЛЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ПОЛІНОМІВ У ПРОСТОРІ БЕРГМАНА В ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

We study Bernstein-type and Nikolskii-type estimates for arbitrary algebraic polynomial in regions of the complex plane.

Вивчаються оцінки типу Бернштейна та Нікольського для довільного алгебраїчного полінома в областях комплексної площини.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ і $G \subset \mathbb{C}$ — обмежена жорданова область з межею $L := \partial G$ така, що $0 \in G$; $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G} = \operatorname{ext} L$, $\Delta := \Delta(0,1) := \big\{w\colon |w| > 1\big\}$. Нехай $w = \Phi(z)$ — однолисте конформне відображення Ω на Δ таке, що $\Phi(\infty) = \infty$ і $\lim_{z\to\infty} \dfrac{\Phi(z)}{z} > 0$; $\Psi := \Phi^{-1}$. Для довільного $R > 1$ позначаємо $L_R := \big\{z\colon |\Phi(z)| = R\big\}$, $G_R := \operatorname{int} L_R$ і $\Omega_R := \operatorname{ext} L_R$. Нехай також $\wp_n$ — клас усіх алгебраїчних поліномів $P_n(z)$ порядку не вищого за $n \in \mathbb{N}$.

У роботі розглядається вагова функція $h(z)$, яка визначається таким чином. Нехай $\{z_j\}_{j=1}^{s}$ — фіксована система різних точок на кривій L. Для деякого фіксованого R_0, $1 < R_0 < \infty$, розглянемо узагальнену вагову функцію Якобі $h(z)$:

$$h(z) := \prod_{j=1}^{s} \big|z - z_j\big|^{\gamma_j}, \quad z \in G_{R_0}, \tag{1.1}$$

де $\gamma_j > -2$ при всіх $j = 1, 2, \ldots, s$.

Нехай, далі, $0 < p \le \infty$ і σ — двовимірна міра Лебега. Для жорданової області G покладаємо

$$\|P_n\|_p := \|P_n\|_{A_p(h,G)} := \left(\iint\limits_G h(z)\big|P_n(z)\big|^p d\sigma_z\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|P_n\|_\infty := \|P_n\|_{A_\infty(1,G)} := \max_{z\in\overline{G}} \big|P_n(z)\big|, \quad p = \infty,$$

і $A_p(1,G) := A_p(G)$.

В роботі вивчаються нерівності

$$\big\|P_n^{(m)}\big\|_X \le \lambda_n(G,h,p)\|P_n\|_Y \tag{1.2}$$

типу Бернштейна ($X = Y = A_\infty$), Маркова ($X = Y = A_p, p > 0$) та Нікольського ($m = 0$; $X = A_q$, $Y = A_p$, $0 < p < q < \infty$) у просторах Бергмана для всіх поліномів $P_n \in \wp_n$ і будь-яких $m = 0, 1, 2, \ldots$, де $\lambda_n := \lambda_n(G, h, p, m) > 0$, $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$, — стала, яка, взагалі кажучи, залежить від геометричних властивостей області G та вагової функції h.

Нерівності типу (1.2) вивчаються математиками з початку двадцятого століття [22, 23, 38]. В останні роки такі нерівності для різних просторів розглядались, зокрема, в роботах [34, с. 122–133], [32] (розд. 5.3), [27, с. 418–428], [4–6, 18, 20, 25, 26, 31, 33, 37] (див. також наведену в них бібліографію).

У даній роботі ми продовжуємо вивчення оцінок типу (1.2) для квазікругів та вагової функції $h(z)$, визначеної в (1.1), яке було розпочате в роботах [2–6, 8, 9, 11, 12, 19, 21] для різних областей в комплексній площині.

2. Означення та основні результати. Скрізь у роботі $c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ та $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — відповідно додатні та достатньо малі додатні сталі (взагалі кажучи, різні у різних співвідношеннях), які залежать від G та від параметрів, несуттєвих для аргументу, в іншому випадку про таку залежність буде чітко зазначено. Для довільних $k \geq 0$ та $m > k$ запис $i = \overline{k, m}$ означає, що $i = k, k+1, \ldots, m$. Нехай функція φ відображає G конформно та однолисто на $B := B(0,1) := \{w \colon |w| < 1\}$, нормована співвідношеннями $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ і $\psi := \varphi^{-1}$.

Означення 2.1. *Обмежена жорданова область G називається k-квазікругом,* $0 \leq k < 1$, *якщо будь-яке конформне відображення ψ можна продовжити до K-квазіконформного,* $K = \dfrac{1+k}{1-k}$, *гомеоморфізму площини $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$. В цьому випадку крива $L \colon = \partial G$ називається K-квазіколом. Область G (крива L) називається квазікругом (квазіколом), якщо вона є k-квазікругом (k-квазіколом) при деякому* $0 \leq k < 1$.

Простим прикладом k-квазікруга може бути довільна область, обмежена двома дугами кола, симетрична відносно осей OX та OY, така, що кожна з дуг перетинає вісь OX у точках $\pm\varepsilon_0$, де $\varepsilon_0 > 0$ і кут між дугами дорівнює $\pi(1-k)$, $0 \leq k < 1$.

Жорданова крива L називається квазіколом або квазіконформною кривою, якщо вона є образом одиничного кола при квазіконформному відображенні $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$ (див. [29, с. 105; 35, с. 286]). З іншого боку, сформульовано також геометричні критерії квазіконформності кривих (див. [14, с. 81; 36, с. 107; 30, с. 341]). Наведемо деякі з них.

Нехай z_1, z_2 — довільні точки на L і $L(z_1, z_2)$ — піддуга L коротшого діаметра з кінцями z_1 та z_2. Леслі [30, с. 341] визначив криву L як „c-*квазіконформну*”, якщо для всіх z_1, $z_2 \in L$ та $z \in L(z_1, z_2)$ існує стала $c = c(L)$, незалежна від точок z_1, z_2 і z, така, що

$$\frac{|z_1 - z| + |z - z_2|}{|z_1 - z_2|} \leq c. \tag{2.1}$$

Простим прикладом c-квазіконформної кривої може бути багатокутник, у якого найменший внутрішній чи зовнішній відкритий кут дорівнює $2\arcsin(1/c)$. Відомо, що квазіколо може бути неспрямлюваним (див., наприклад, [24; 29, с. 104]).

Наведемо теорему, яку будемо використовувати в роботі.

Теорема A ([12], теорема 2.1). *Нехай $p > 0$, G — довільний k-квазікруг при деякому* $0 \leq k < 1$ *і $h(z)$ — функція, визначена в* (1.1). *Тоді для довільного $P_n \in \wp_n$, $n \in N$, маємо*

$$\|P_n\|_\infty \leq c n^{\frac{(2+\gamma)(1+k)}{p}} \|P_n\|_p. \tag{2.2}$$

Тут і далі

$$\gamma: \ = \max\left\{0; \gamma_j, \ j = \overline{1, s}\right\}. \tag{2.3}$$

Сформулюємо нові результати.

Теорема 2.1. *Нехай $0 < p \leq \infty$, G — довільний k-квазікруг при деякому $0 \leq k < 1$ і $h(z)$ — функція, визначена в* (1.1). *Тоді для будь-якого $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, при кожному $m = 0, 1, 2, \ldots$*

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_\infty \leq c_1 n^{\left(\frac{2+\gamma}{p}+m\right)(1+k)} \|P_n\|_p. \tag{2.4}$$

***Наслідок* 2.1.** *Нехай G — довільний k-квазікруг при деякому $0 \leq k < 1$. Тоді для довільного $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, при кожному $m = 1, 2, \ldots$*

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_\infty \leq c_1 n^{m(1+k)} \|P_n\|_\infty. \tag{2.5}$$

Нехай величина $p(k)$, $1 \leq p(k) \leq 2$, така, що $p(k) \to 1$ при $k \to 0$ і $p(k) \to 2$ при $k \to 1$.

Теорема 2.2. *Нехай $p > p(k) \geq 1$, G — k-квазікруг при деякому $0 \leq k < 1$ і $h(z)$ — функція, визначена в* (1.1). *Тоді для довільного $P_n \in \wp_n$ при кожному $m = 0, 1, 2, \ldots$*

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_p \leq c_2 n^{m(1+k)} \|P_n\|_p. \tag{2.6}$$

***Наслідок* 2.2.** 1. *Якщо $G = B$ або $L = \partial G$ є аналітичною кривою, то $p(k) = 1$.*

2. *Якщо L є гладкою кривою з дотичною, яка змінюється неперервно, то $p(k) = 1 + \varepsilon$ для довільного малого $\varepsilon > 0$.*

Отже, для таких областей теорема 2.2 *справджується при будь-якому $p > 1$.*

Теорема 2.3. *Нехай G — довільний k-квазікруг при деякому $0 \leq k < 1$ і $h(z)$ — функція, визначена в* (1.1). *Тоді для довільного $P_n \in \wp_n$, $0 < p \leq q < \infty$, при кожному $m = 0, 1, 2, \ldots$*

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_q \leq c_3 n^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)(2+\gamma)(1+k)} \left\|P_n^{(m)}\right\|_p, \tag{2.7}$$

де число γ визначається співвідношенням (2.3).

***Зауваження* 2.1.** Для деяких областей і вагової функції $h(z)$ твердження, подібні до теорем 2.1 – 2.3, були отримані раніше:

теорема 2.1 у роботі [28] при $m > 0$, $h(z) \equiv 1$, $0 < p < 1$; в [7] (теорема 5.1) при $m = 0$, $h(z) \equiv 1$, $p > 1$; в [8] (теорема 1) при $m > 0$, $h(z) \equiv 1$, $p > 1$ і в роботі [12] при $m = 0$, $p > 0$;

теорема 2.2 в роботі [8] (теорема 1) при $m > 0$, $h(z) \equiv 1$, $p \geq 2$; в [20] при $m = 0$, $h(z) \equiv 1$ і $P_n(z) \neq 0$, $z \in G_{1+\frac{1}{n}}$;

теорема 2.3 в роботі [8] (теорема 1) при $m = 0$, $h(z) \equiv 1$; в [20] при $m = 0$, $h(z) \equiv 1$, $1 \leq p \leq q < \infty$ і $P_n(z) \neq 0, z \in G_{1+\frac{1}{n}}$ з нормою $\|P_n\|_{A_2\left(h, G_{1+\frac{1}{n}}\right)}$ у правій частині (2.7); у [37] (теорема 1.3) при $m = 0$, $h(z) \equiv 1$, $0 < p \leq q < \infty$.

***Зауваження* 2.2.** У випадку $p = \infty$ та $m = 1$ теорему 2.1 доведено в [15]. У даній роботі ми пропонуємо інше доведення цього твердження.

З умов теорем 2.1 – 2.3 видно, що ці твердження справджуються для k-квазікруга з довільним $0 \leq k < 1$. Проте не для всіх областей можна легко обчислити коефіцієнт квазіконформності k. Тому визначають також більш загальні класи областей з іншою характеристикою. Одним із них є наступний.

Означення 2.2. *Кажуть, що* $L = \partial G \in Q_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, *якщо* L *є квазіколом і* $\Phi \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $z \in \overline{\Omega}$.

Зазначимо, що клас Q_α є достатньо широким. Більш детальна інформація щодо цього та інших пов'язаних із ним фактів міститься в роботах [30, 36, 39] (див. також наведену в них бібліографію). Розглянемо лише деякі випадки.

***Зауваження* 2.3.** 1. Якщо L — Діні-гладка крива [36, с. 48], то $L \in Q_1$.

2. Якщо L — кусково-Діні-гладка крива і найбільший зовнішній кут $\alpha\pi$, $0 < \alpha \leq 1$, на L є відкритим [36, с. 52], то $L \in Q_\alpha$.

3. Якщо L — гладка крива, яка має неперервну дотичну, то $L \in Q_\alpha$ при всіх $0 < \alpha < 1$.

4. Якщо G є „L-подібною" областю, то $\Phi \in \mathrm{Lip}\,\dfrac{2}{3}$, $\Psi \in \mathrm{Lip}\,\dfrac{1}{2}$.

5. Якщо L — квазігладка (за Лаврентьєвим) крива (тобто для кожної пари $z_1,\ z_2 \in L$ існує така стала $c > 1$, що $s(z_1, z_2) \leq c|z_1 - z_2|$), то $\Phi \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{2\left(\pi - \arcsin\dfrac{1}{c}\right)}$ і $\Psi \in \mathrm{Lip}\,\beta$ для $\beta = \dfrac{2}{(1+c)^2}$, де $s(z_1, z_2)$ — довжина найменшої дуги, яка сполучає точки z_1 та z_2 на L [39, 40].

6. Якщо L є c-квазіконформною, то $\Phi \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{2\left(\pi - \arcsin\dfrac{1}{c}\right)}$ і $\Psi \in \mathrm{Lip}\,\beta$ при

$$\beta = \frac{2\left(\arcsin\dfrac{1}{c}\right)^2}{\pi\left(\pi - \arcsin\dfrac{1}{c}\right)}.$$

Сформулюємо тепер відповідні результати для класу областей $G \in Q_\alpha$. Наведемо спочатку ще одну теорему, яку будемо використовувати в цьому випадку.

Теорема B ([12], теорема 2.3)**.** *Нехай* $p > 0$, $L \in Q_\alpha$ *при деякому* $\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ *і* $h(z)$ — *функція, визначена в* (1.1). *Тоді для довільного* $P_n \in \wp_n$, $n \in N$, *маємо*

$$\|P_n\|_\infty \leq c\|P_n\|_p \begin{cases} n^{\frac{(2+\gamma)\delta}{p}}, & \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ n^{\frac{2+\gamma}{\alpha p}}, & \alpha \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Тут і далі $\delta = \delta(G)$ — *деяке число*, $1 \leq \delta \leq 2$.

Теорема 2.4. *Нехай* $0 < p \leq \infty$, $L \in Q_\alpha$ *при деякому* $0 < \alpha \leq 1$ *і* $h(z)$ — *функція, визначена в* (1.1). *Тоді для довільного* $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, *при кожному* $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_\infty \leq c_4\|P_n\|_p \begin{cases} n^{\delta\left(\frac{2+\gamma}{p}+m\right)}, & \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ n^{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{2+\gamma}{p}+m\right)}, & \alpha \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.9}$$

***Наслідок* 2.3.** *Нехай* $L \in Q_\alpha$ *при деякому* $0 < \alpha \leq 1$. *Тоді для довільного* $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, *при кожному* $m = 1, 2, \ldots$

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_\infty \leq c_5\|P_n\|_\infty \begin{cases} n^{\delta(m+1)}, & \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ n^{\frac{1}{\alpha}(m+1)}, & \alpha \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Теорема 2.5. *Припустимо, що число* p *більше за деяке число* $p(G)$, $1 \leq p(G) \leq 2$, $L \in Q_\alpha$ *при деякому* $0 < \alpha \leq 1$ *і* $h(z)$ — *функція, визначена в* (1.1). *Тоді для довільного* $P_n \in \wp_n$ *при кожному* $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|_p \leq c_6 \|P_n\|_p \begin{cases} n^{\delta m}, & \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ n^{\frac{m}{\alpha}}, & \alpha \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Теорема 2.6. *Нехай* $L \in Q_\alpha$ *при деякому* $0 < \alpha \leq 1$ *і* $h(z)$ — *функція, визначена в* (1.1). *Тоді для довільного* $P_n \in \wp_n$, $0 < p \leq q < \infty$, *при кожному* $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|_q \leq c_7 \left\| P_n^{(m)} \right\|_p \begin{cases} n^{\delta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)(2+\gamma)}, & \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ n^{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)(2+\gamma)}, & \alpha \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Теореми 2.4 – 2.6 є аналогами теорем 2.1 – 2.3 для більш широкого класу областей. Тому зауваження 2.1 справджується і для них. Крім цього, з огляду на зауваження 2.3 можна записати аналоги цих теорем для інших, простіших областей.

2.1. Точність оцінок. Точність оцінок (2.4) – (2.7) (також (2.9) – (2.12)) можна встановити, порівнявши їх з наступним результатом.

Зауваження **2.4.** Для довільного $n \in \mathbb{N}$ існує поліном $T_n \in \wp_n$ такий, що для одиничного круга B і вагової функції $h(z) = 1$ справджуються оцінки

$$\|T_n'\|_\infty \geq c_6 n \|T_n\|_\infty,$$

$$\|T_n'\|_\infty \geq c_6 n^2 \|T_n\|_{A_2(B)},$$

$$\|T_n'\|_{A_2(B)} \geq c_6 n \|T_n\|_{A_2(B)}.$$

Зауваження **2.5.** Точність оцінки в наслідку 2.1 при $m = 1$ випливає з теореми 3 [15]. Випадок $m > 1$ доводиться послідовним застосуванням цього факту.

3. Деякі допоміжні результати. Скрізь у роботі під позначеннями $a \preceq b$ та $a \asymp b$ розуміємо, що для деяких додатних сталих c, c_1, c_2 виконуються співвідношення $a \leq cb$ і $c_1 a \leq b \leq c_2 a$.

Нехай G — довільний квазікруг. Тоді існує регулярне K_1-відбиття $y(\cdot)$ вздовж L таке, що $y(G) = \Omega$, $y(\Omega) = G$ і $y(\cdot)$ фіксує точки L та задовольняє такі умови [17, c. 26]:

$$\begin{gathered} \left| y(\zeta) - z \right| \asymp |\zeta - z|, \qquad z \in L, \quad \varepsilon < |\zeta| < \frac{1}{\varepsilon}, \\ |y_{\overline{\zeta}}| \asymp |y_\zeta| \asymp 1, \qquad \varepsilon < |\zeta| < \frac{1}{\varepsilon}, \\ |y_{\overline{\zeta}}| \asymp \left| y(\zeta) \right|^2, \quad |\zeta| < \varepsilon, \qquad |y_{\overline{\zeta}}| \asymp |\zeta|^{-2}, \quad |\zeta| > \frac{1}{\varepsilon}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

При $R > 1$ позначаємо $L^* := y(L_R)$, $G^* := \operatorname{int} L^*$, $\Omega^* := \operatorname{ext} L^*$. Нехай $w = \Phi_R(z)$ — конформне відображення Ω^* на Δ, нормалізоване співвідношеннями $\Phi_R(\infty) = \infty$, $\Phi_R'(\infty) > 0$, $\Psi_R := \Phi_R^{-1}$. Для $t > 1$ позначаємо $L_t^* := \left\{ z \colon |\Phi_R(z)| = t \right\}$, $G_t^* := \operatorname{int} L_t^*$, $\Omega_t^* := \operatorname{ext} L_t^*$.

Згідно з результати [16], для всіх $z \in L^*$ та $t \in L$ таких, що $|z - t| = d(z, L)$, маємо

$$
\begin{gathered}
d(z,L) \asymp d(t,L_R) \asymp d(z,L_R), \\
|\Phi_R(z)| \le |\Phi_R(t)| \le 1 + c(R-1).
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

Лема 3.1 [1]. *Нехай G — довільний квазікруг, $z_1 \in L$, $z_2, z_3 \in \Omega \cap \{z : |z - z_1| \preceq d(z_1, L_{r_0})\}$, $w_j = \Phi(z_j)$, $j = 1, 2, 3$. Тоді*:

a) *співвідношення $|z_1 - z_2| \preceq |z_1 - z_3|$ та $|w_1 - w_2| \preceq |w_1 - w_3|$ є еквівалентними, як і $|z_1 - z_2| \asymp |z_1 - z_3|$ та $|w_1 - w_2| \asymp |w_1 - w_3|$*;

b) *якщо $|z_1 - z_2| \preceq |z_1 - z_3|$, то*

$$
\left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{c_1} \preceq \left|\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right| \preceq \left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{c_2},
$$

де $0 < r_0 < 1$ — стала, яка залежить від G та k.

Лема 3.2. *Нехай G — довільний k-квазікруг при деякому $0 \le k < 1$. Тоді*

$$
|\Psi(w_1) - \Psi(w_2)| \succeq |w_1 - w_2|^{1+k}
$$

при всіх $w_1, w_2 \in \overline{\Omega}'$.

Цей факт випливає з відповідного результату для відображення $f \in \sum(k)$ [35, с. 287] та оцінки для Ψ' [17] (теорема 2.8).

Лема 3.3. *Нехай $G \in Q_\alpha$. Тоді*

$$
d(t, L_R) \succeq (R-1)^{\mu} \succeq n^{-\mu},
$$

де

$$
\mu = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}, & \alpha \ge \dfrac{1}{2}, \\[2mm] \delta, & \alpha < \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{3.3}
$$

$\delta = \delta(\alpha, G)$ — деяке число, $1 \le \delta \le 2$.

Це твердження легко випливає з результатів робіт [17, 30].

Лема 3.4 ([10], лема 2.3). *Нехай L — довільний квазікруг. Тоді для довільного $R > 1$ існують числа ρ_1, ρ_2, ρ_3 та ρ_4 такі, що $\rho_1 < \rho_2$, $\rho_3 < \rho_4$ і виконуються співвідношення*:

1) $\overline{G}^*_{\rho_1} \subseteq \overline{G} \subseteq \overline{G}^*_{\rho_2}$ *і* $\overline{G}^*_{\rho_3} \subseteq \overline{G}_R \subseteq \overline{G}^*_{\rho_4}$;

2) $\rho_1 - 1 \asymp \rho_2 - 1 \asymp \rho_3 - 1 \asymp \rho_4 - 1 \asymp R - 1$.

Нехай $\{z_j\}_{j=1}^m$ — фіксована система точок на L і вагова функція $h(z)$ визначена в (1.1). Наступний результат є інтегральним аналогом відомої леми Бернштейна – Уолша [41, с. 101] для $A_p(h, G)$-норми.

Лема 3.5 [4]. *Нехай G — довільний квазікруг, $P_n(z)$ — будь-який поліном, $\deg P_n \le n$, $n = 1, 2, \ldots$, і вагова функція $h(z)$ визначена в* (1.1). *Тоді для будь-яких $R > 1$, $p > 0$ та $n = 1, 2, \ldots$*

$$
\|P_n\|_{A_p(h, G_R)} \le c_3 \big(1 + c(R-1)\big)^{n + \frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h,G)},
$$

де величини c, c_3 не залежать від n і G.

Цей факт показує, що норми $\|P_n\|_{A_p(h, G_{1+1/n})}$ і $\|P_n\|_{A_p(h,G)}$ для довільних поліномів $P_n(z)$ мають один і той самий порядок зростання.

Наступна лема є в певному сенсі „внутрішнім” аналогом леми Бернштейна – Уолша [41, с. 101].

Лема 3.6. *Нехай* G — *довільний квазікруг і* $P_n(z)$ — *будь-який поліном,* $\deg P_n \leq n,\ n = 1,2,\ldots.$ *Тоді для будь-яких* $R = 1 + \dfrac{c}{n},\ n = 1,2,\ldots,$ *і* $m = 0,1,2,\ldots,$ *існує число* $c_1 := c_1(G,c) > 0$ *таке, що*

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|_{C(\overline{G})} \leq c_1 \left\| P_n^{(m)} \right\|_{C(\overline{G^*})}.$$

Доведення. Для довільного $m = 0,1,2,\ldots,\ m \leq n,$ розглянемо функцію

$$F(z) \colon = F(z,m,n,R) := \frac{P_n^{(m)}(z)}{[\Phi_R(z)]^{n+1-m}}, \quad z \in \Omega^*.$$

Зрозуміло, що функція $F(z)$ є аналітичною в Ω^*, неперервною на $\overline{\Omega^*}$, $F(\infty) = 0$ і $|F(z)| = \left| P_n^{(m)}(z) \right|$ при $z \in L^*$. За принципом максимуму модуля маємо

$$\left|F(z)\right| \leq \max_{z \in L^*} \left|F(z)\right| = \max_{z \in L^*} \left| P_n^{(m)}(z) \right|,$$

і тому

$$\left| P_n^{(m)}(z) \right| \leq |\Phi_R(z)|^{n+1-m} \left\| P_n^{(m)} \right\|_{C(\overline{G^*})}, \quad z \in \overline{\Omega^*}.$$

Застосовуючи (3.2) при $z \in L$, отримуємо

$$|\Phi_R(z)|^{n+1-m} \leq [1 + c(R-1)]^{n+1-m} = \left[1 + \frac{c}{n}\right]^{n+1-m} \preceq 1.$$

Оскільки $z \in L$ є довільним, то

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|_{C(\overline{G})} \preceq \left\| P_n^{(m)} \right\|_{C(\overline{G^*})}.$$

Лему 3.6 доведено.

4. Доведення теорем.

***4.1. Доведення теорем* 2.1 *і* 2.4.** Розіб'ємо доведення теорем на дві частини: 1) $0 < p < \infty$; 2) $p = \infty$.

1. Нехай $0 < p < \infty$ і $z \in L$ — довільна фіксована точка. Позначимо $U := U\big(z, d(z, L_R)\big) := \big\{\zeta : |\zeta - z| < d(z, L_R)\big\}$. За інтегральними формулами Коші для похідних, використовуючи лему Бернштейна – Уолша [41, с. 101], маємо

$$P_n^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} \frac{P_n(t)}{(t-z)^{m+1}} dt, \ m = 0,1,2,\ldots.$$

Тоді

$$\left| P_n^{(m)}(z) \right| \leq \frac{m!}{2\pi} \max_{z \in \partial U} |P_n(t)| \int\limits_{\partial U} \frac{|dt|}{|t-z|^{m+1}} \preceq$$

$$\preceq \max_{t \in \overline{G}_R} |P_n(t)| \, \frac{1}{d^{m+1}(z, L_R)} \cdot 2\pi d(z, L_R) \preceq$$

$$\preceq \max_{t \in \overline{G}} |P_n(t)| \, \frac{1}{d^m(z, L_R)}.$$

Застосовуючи теорему A та лему 3.2, одержуємо

$$\left|P_n^{(m)}(z)\right| \preceq n^{\frac{(2+\gamma)(1+k)}{p}} \|P_n\|_p \cdot n^{m(1+k)} \preceq n^{(\frac{2+\gamma}{p}+m)(1+k)} \|P_n\|_p.$$

Аналогічно, застосовуючи теорему B та лему 3.3, отримуємо

$$\left|P_n^{(m)}(z)\right| \preceq \|P_n\|_p \begin{cases} n^{\delta\left(\frac{2+\gamma}{p}\right)}, & \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ n^{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{2+\gamma}{p}\right)}, & \alpha \geq \dfrac{1}{2}, \end{cases} \cdot \begin{cases} n^{m\delta}, & \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ n^{\frac{m}{\alpha}}, & \alpha \geq \dfrac{1}{2}, \end{cases} \preceq \|P_n\|_p \begin{cases} n^{\delta\left(\frac{2+\gamma}{p}+m\right)}, & \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ n^{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{2+\gamma}{p}+m\right)}, & \alpha \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Оскільки $z \in L$ є довільним, то це завершує доведення теорем 2.1 і 2.4 в цьому випадку.

2) Розглянемо тепер випадок $p = \infty$. Нехай G — довільний квазікруг. Тоді для похідної $P_n^{(m)}(z)$ і $z \in G$ можна записати зображення [17]

$$P_n^{(m)}(z) = -\frac{(m+1)!}{\pi} \iint\limits_{G} \frac{P_n(\zeta) y_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{(y(\zeta)-z)^{m+2}} d\sigma_\zeta, \quad z \in \overline{G^*}.$$

Маємо

$$|P_n^{(m)}(z)| \leq \frac{(m+1)!}{\pi} \max_{\zeta \in \overline{G^*}} |P_n(\zeta)| \iint\limits_{G} \frac{|y_{\bar{\zeta}}|}{|y(\zeta)-z|^{m+2}} d\sigma_\zeta \preceq$$

$$\preceq \|P_n\|_{C(\overline{G})} \iint\limits_{G} \frac{|y_{\bar{\zeta}}|}{|y(\zeta)-z|^{m+2}} d\sigma_\zeta, \tag{4.1}$$

оскільки $\overline{G^*} \subset G$. Покладемо

$$J(z) := \iint\limits_{G} \frac{|y_{\bar{\zeta}}|}{|y(\zeta)-z|^{m+2}} d\sigma_\zeta.$$

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ позначимо $U_\varepsilon(z) := \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}$. Не втрачаючи загальності, можна взяти $U_\varepsilon := U_\varepsilon(0) \subset G^*$. Для довільного фіксованого $z \in L^*$ маємо

$$J(z) = \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{|y_{\bar{\zeta}}|}{|y(\zeta)-z|^{m+2}} d\sigma_\zeta + \iint\limits_{G \setminus U_\varepsilon} \frac{|y_{\bar{\zeta}}|}{|y(\zeta)-z|^{m+2}} d\sigma_\zeta =: J_1(z) + J_2(z). \tag{4.2}$$

Оцінимо величину $J_1(z)$. Внаслідок (3.1) $|y_{\bar{\zeta}}| \asymp |y(\zeta)|^2$ при всіх $\zeta \in U_\varepsilon$ і $|\zeta - z| \geq \varepsilon$, $\left|y(\zeta) - z\right| \asymp \left|y(\zeta)\right|$ при $z \in L^*$ та $\zeta \in U_\varepsilon$. Тоді

$$J_1(z) = \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{|y_{\bar{\zeta}}|}{|y(\zeta)-z|^{m+2}} d\sigma_\zeta \asymp \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{|y(\zeta)|^2}{|y(\zeta)|^{m+2}} d\sigma_\zeta = \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{d\sigma_\zeta}{|y(\zeta)|^m} \preceq 1. \tag{4.3}$$

Для оцінки величини $J_2(z)$ насамперед зазначимо, що якобіан $\pounds_y := |y_\zeta|^2 - |y_{\bar{\zeta}}|^2$ відбиття $y(\zeta)$ задовольняє нерівність

$$|y_{\bar{\zeta}}|^2 = \frac{\pounds_y |y_\zeta|^2}{|y_\zeta|^2 - |y_{\bar{\zeta}}|^2} = \frac{\pounds_y}{\left(|y_\zeta|^2 / \left|y_{\bar{\zeta}}\right|^2\right) - 1} \le \frac{\chi^2}{1-\chi^2} |\pounds_y| \preceq |\pounds_y|,$$

де $\chi := \dfrac{K_1 - 1}{K_1 + 1}$. Тому $|\pounds_y| \succeq |y_{\bar{\zeta}}|^2$. Тоді після заміни змінної отримуємо таку оцінку величини $J_2(z)$:

$$J_2(z) \preceq \iint\limits_{G\setminus U_\varepsilon} \frac{|y_{\bar{\zeta}}|}{|y(\zeta)-z|^{m+2}} d\sigma_\zeta \preceq \iint\limits_{y(G\setminus U_\varepsilon)} \frac{|\frac{y_{\bar{\zeta}}}{\pounds_y}| \, |\pounds_y| \, d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|^{m+2}} \preceq$$

$$\preceq \iint\limits_{y(G\setminus U_\varepsilon)} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|^{m+2}} \preceq \iint\limits_{|\zeta - z| \ge d(z,L)} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|^{m+2}} \preceq d^{-m}(z, L). \tag{4.4}$$

Таким чином, з (4.2) – (4.4) маємо

$$J(z) \preceq 1 + d^{-m}(z, L_R) \preceq d^{-m}(z, L) \quad \forall z \in L^*. \tag{4.5}$$

Внаслідок (3.2) з (4.1) – (4.5) для всіх $z \in L^*$ і $t \in L$ таких, що $|z - t| = d(z, L)$, отримуємо

$$\left|P_n^{(m)}(z)\right| \preceq d^{-(m+1)}(t, L_R) \|P_n\|_{C(\overline{G})} .$$

Якщо G — довільний k-квазікруг, то, враховуючи лему 3.2, одержуємо

$$d(z, L_R) = |\zeta - z| = \left|\Psi(\tau) - \Psi(w)\right| \ge |\tau - w|^{1+\kappa} \succeq n^{-(1+\kappa)}$$

і

$$\max_{z\in\overline{G^*}} \left|P_n^{(m)}(z)\right| \preceq n^{m(1+\kappa)} \|P_n\|_{C(\overline{G})}.$$

Якщо $G \in Q_\alpha$ то з леми 3.3 маємо

$$\max_{z\in\overline{G^*}} \left|P_n^{(m)}(z)\right| \preceq \begin{cases} n^{\delta m}, & \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ n^{\frac{1}{\alpha} m}, & \alpha \ge \dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \|P_n\|_{C(\overline{G})}.$$

Враховуючи лему 3.6, завершуємо доведення.

4.2. Доведення теорем 2.2 і 2.5. Покладемо $R = 1 + cn^{-1}$. Оскільки L — квазіколо, то будь-які криві L_R і $L^* = y(L_R)$ також є квазіколами. Виберемо ρ_1 і ρ_2, $\rho_1 < \rho_2$, відповідно до леми 3.4, тобто так, щоб виконувались умови

$$\overline{G}^*_{\rho_1} \subseteq \overline{G} \subseteq \overline{G}^*_{\rho_2}, \quad \rho_1 - 1 \asymp \rho_2 - 1 \asymp R - 1. \tag{4.6}$$

Нехай $w = \Phi^*_{\rho_1}(z)$ — довільне конформне відображення $\Omega^*_{\rho_1}$ на Δ, нормалізоване співвідношеннями $\Phi^*_{\rho_1}(\infty) = \infty$, $\Phi^{*'}_{\rho_1}(\infty) > 0$, $\Psi^*_{\rho_1} = \left(\Phi^*_{\rho_1}\right)^{-1}$. Подібно до побудови відбиття $y(\zeta)$ можна побудувати регулярне K_2-квазіконформне відбиття y_{ρ_1}, $y_{\rho_1}(0) = \infty$ вздовж $L^*_{\rho_1}$ таке, що $y_{\rho_1}(G^*_{\rho_1}) = \Omega^*_{\rho_1}$, $y(\Omega^*_{\rho_1}) = G^*_{\rho_1}$, $y_{\rho_1}(.)$ фіксує точки $L^*_{\rho_1}$ і задовольняє умови, подібні до (3.1) і описані для $y_{\rho_1}(\zeta)$:

$$\begin{gathered}
\left|y_{\rho_1}(\zeta)-z\right| \asymp |\zeta - z|, \quad z \in L^*_{\rho_1}, \qquad \varepsilon < |\zeta| < \frac{1}{\varepsilon}, \\
\left|y_{\rho_1,\bar{\zeta}}\right| \asymp |y_{\rho_1,\zeta}| \asymp 1, \qquad \varepsilon < |\zeta| < \frac{1}{\varepsilon}, \\
\left|y_{\rho_1,\bar{\zeta}}\right| \asymp |y_{\rho_1}(\zeta)|^2, \quad |\zeta| < \varepsilon, \qquad \left|y_{\rho_1,\bar{\zeta}}\right| \asymp |\zeta|^{-2}, \quad |\zeta| > \frac{1}{\varepsilon}.
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Для $z \in \mathbb{C}$ і $p > 1$ розглянемо функцію

$$g^{\frac{1}{p}}(z) := \prod_{j=1}^{s} (z - z_j)^{\frac{\gamma_j}{p}}, \qquad \gamma_j > -2, \quad j = \overline{1, s}.$$

Оскільки $\{z_j\}_{j=1}^{s} \in L$, то функція $g^{\frac{1}{p}}(z)$ є аналітичною в $\overline{G}^*_{\rho_1}$ (вибираємо довільну неперервну гілку $g^{\frac{1}{p}}(z)$ і зберігаємо те саме позначення для цієї гілки). Тоді

$$\left[g^{\frac{1}{p}}(z)\right]' = \left(\prod_{j=1}^{s} (z - z_j)^{\frac{\gamma_j}{p}}\right)' = \frac{g^{\frac{1}{p}}(z)}{p} \sum_{j=1}^{s} \frac{\gamma_j}{z - z_j},$$

$$\left[g^{\frac{1}{p}}(z)P_n(z)\right]' = \left[g^{\frac{1}{p}}(z)\right]' P_n(z) + g^{\frac{1}{p}}(z)P_n'(z)$$

і тому

$$\begin{gathered}
g^{\frac{1}{p}}(z)P_n'(z) = -\left[g^{\frac{1}{p}}(z)\right]' P_n(z) + \left[g^{\frac{1}{p}}(z)P_n(z)\right]' = \\
= -\frac{g^{\frac{1}{p}}(z)P_n(z)}{p} \sum_{j=1}^{s} \frac{\gamma_j}{z - z_j} + \left[g^{\frac{1}{p}}(z)P_n(z)\right]'.
\end{gathered}$$

Таким чином,

$$h(z)\left|P_n'(z)\right|^p \preceq h(z)\left|P_n(z)\right|^p \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{|z - z_j|}\right)^p + \left|\left[g^{\frac{1}{p}}(z)P_n(z)\right]'\right|^p,$$

оскільки $h(z) = \left|g(z)\right|$.

Інтегруючи по області G^*, отримуємо

$$\begin{gathered}
\iint\limits_{G^*} h(z)\left|P_n'(z)\right|^p d\sigma_z \preceq \iint\limits_{G^*} h(z)\left|P_n(z)\right|^p \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{|z - z_j|}\right)^p d\sigma_z + \\
+ \iint\limits_{G^*} \left|\left[g^{\frac{1}{p}}(z)P_n(z)\right]'\right|^p d\sigma_z.
\end{gathered}$$

Тоді

$$\|P_n^{'}\|_{A_p(h,G^*)} \preceq \sup_{z \in \overline{G}^*} \frac{1}{|z - z_j|} \|P_n\|_{A_p(h,G^*)} + \left\{\iint\limits_{G^*} \left|\left[g^{\frac{1}{p}}(z)P_n(z)\right]'\right|^p d\sigma_z\right\}^{\frac{1}{p}} \preceq$$

$$\preceq \frac{1}{d(z, L^*_{\rho_1})} \|P_n\|_{A_p(h,G^*)} + \left\{ \iint\limits_{G^*} \left| \left[g^{\frac{1}{p}}(z) P_n(z) \right]' \right|^p d\sigma_z \right\}^{\frac{1}{p}} \preceq$$

$$\preceq \frac{1}{d(z, L^*_{\rho_1})} \|P_n\|_{A_p(h,G^*)} + J(n) \preceq \frac{1}{d(z, L^*_{\rho_1})} \|P_n\|_{A_p(h,G)} + J(n),$$

оскільки $G^* \subset G$, де J визначається рівністю

$$J(n) := \left\{ \iint\limits_{G^*} \left| \left[g^{\frac{1}{p}}(z) P_n(z) \right]' \right|^p d\sigma_z \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Оцінимо останній інтеграл. Використовуючи відбиття $y_{\rho_1}(\zeta)$, можемо записати інтегральне зображення для $g^{\frac{1}{p}}(z) P_n(z)$ в усіх точках $z \in G^*$[17]:

$$\left[g^{\frac{1}{p}}(z) P_n(z) \right]' = -\frac{2!}{\pi} \iint\limits_{G^*_{\rho_1}} \frac{g^{\frac{1}{p}}(\zeta) P_n(\zeta) y_{\rho_1,\bar{\zeta}}(\zeta)}{(y_{\rho_1}(\zeta) - z)^{3\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}} d\sigma_\zeta,$$

де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Застосовуючи нерівність Гельдера, отримуємо

$$\left| \left[g^{\frac{1}{p}}(z) P_n(z) \right]' \right|^p \preceq \left[\iint\limits_{G^*_{\rho_1}} \frac{h(\zeta) \left| P_n(\zeta) \right|^p}{\left| y_{\rho_1}(\zeta) - z \right|^3} d\sigma_\zeta \right] \left[\iint\limits_{G^*_{\rho_1}} \frac{\left| y_{\rho_1,\bar{\zeta}}(\zeta) \right|^q}{\left| y_{\rho_1}(\zeta) - z \right|^3} d\sigma_\zeta \right]^{\frac{p}{q}}.$$

Інтегруючи по області G^*, маємо

$$\iint\limits_{G^*} \left| \left[g^{\frac{1}{p}}(z) P_n(z) \right]' \right|^p d\sigma_z \preceq$$

$$\preceq \iint\limits_{G^*} \left[\iint\limits_{G^*_{\rho_1}} \frac{h(\zeta) \left| P_n(\zeta) \right|^p}{\left| y_{\rho_1}(\zeta) - z \right|^3} d\sigma_\zeta \right] \left[\iint\limits_{G^*_{\rho_1}} \frac{\left| y_{\rho_1,\bar{\zeta}}(\zeta) \right|^q}{\left| y_{\rho_1}(\zeta) - z \right|^3} d\sigma_\zeta \right]^{\frac{p}{q}} d\sigma_z.$$

Тому

$$J(n) \preceq \sup_{z \in \overline{G^*}} \left[\iint\limits_{G^*_{\rho_1}} \frac{|y_{\rho_1,\bar{\zeta}}|^q d\sigma_\zeta}{|y_{\rho_1}(\zeta) - z|^3} \right]^{\frac{1}{q}} \sup_{\zeta \in \overline{G^*_{\rho_1}}} \left[\iint\limits_{G^*} \frac{d\sigma_z}{|y_{\rho_1}(\zeta) - z|^3} \right]^{\frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h,G^*_{\rho_1})} =:$$

$$=: J_1(n) \times J_2(n) \times \|P_n\|_{A_p(h,G^*_{\rho_1})}. \tag{4.8}$$

Тепер, оскільки $G^*_{\rho_1} \subset G$,

$$\|P_n\|_{A_p(h,G^*_{\rho_1})} \le \|P_n\|_{A_p(h,G)}. \tag{4.9}$$

Отже, потрібно оцінити окремо інтеграли $J_1(n)$ і $J_2(n)$.

Оцінимо величини

$$J_1(n) := \sup_{z\in\overline{G^*}}\left[\iint\limits_{G^*_{\rho_1}} \frac{|y_{\rho_1,\bar\zeta}|^q d\sigma_\zeta}{|y_{\rho_1}(\zeta)-z|^3}\right]^{\frac{1}{q}} = \sup_{z\in L^*}\left[\iint\limits_{G^*_{\rho_1}} \frac{|y_{\rho_1,\bar\zeta}|^q d\sigma_\zeta}{|y_{\rho_1}(\zeta)-z|^3}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{4.10}$$

Для фіксованого $\varepsilon > 0$ означимо $U_\varepsilon(z) := \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $U_\varepsilon := U_\varepsilon(0) \subset G^*$. Тоді

$$\iint\limits_{G^*_{\rho_1}} \frac{|y_{\rho_1,\bar\zeta}|^q d\sigma_\zeta}{|y_{\rho_1}(\zeta)-z|^3} = \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{|y_{\rho_1,\bar\zeta}|^q d\sigma_\zeta}{|y_{\rho_1}(\zeta)-z|^3} + \iint\limits_{G^*_{\rho_1}\setminus U_\varepsilon} \frac{|y_{\rho_1,\bar\zeta}|^q d\sigma_\zeta}{|y_{\rho_1}(\zeta)-z|^3} =:$$

$$=: J_{1,1}(n) + J_{1,2}(n). \tag{4.11}$$

Оцінимо інтеграл $J_{1,1}(n)$. Згідно з (3.1) і зауваженням, наведеним на початку доведення, бачимо, що $|\zeta - z| \geq \varepsilon_0$ і $\left|y_{\rho_1}(\zeta) - z\right| \succeq 1$ при всіх $\zeta \in U_\varepsilon$ і $z \in L^*$. Тоді на підставі наслідку 2.2 [13] отримуємо

$$J_{1,1}(n) = \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{|y_{\rho_1,\bar\zeta}|^q}{|y_{\rho_1}(\zeta)-z|^3} d\sigma_\zeta \preceq \iint\limits_{U_\varepsilon} |y_{\rho_1,\bar\zeta}|^q d\sigma_\zeta \preceq 1, \quad q < \frac{2K_2}{K_2+1}. \tag{4.12}$$

Для оцінки інтеграла

$$J_{1,2}(n) := \iint\limits_{G^*_{\rho_1}\setminus U_\varepsilon} \frac{|y_{\rho_1,\bar\zeta}|^q d\sigma_\zeta}{|y_{\rho_1}(\zeta)-z|^3}$$

насамперед зазначимо, що якобіан $\Im_{y_{\rho_1}} := |y_{\rho_1,\zeta}|^2 - |y_{\rho_1,\bar\zeta}|^2$ відбиття $y_{\rho_1}(\zeta)$ задовольняє співвідношення

$$\left|y_{\rho_1,\bar\zeta}\right|^q = \left[\frac{\Im_{y_{\rho_1}}\left|y_{\rho_1,\bar\zeta}\right|^2}{\left|y_{\rho_1,\zeta}\right|^2 - \left|y_{\rho_1,\bar\zeta}\right|^2}\right]^{\frac{q}{2}} = \left[\frac{\Im_{y_{\rho_1}}}{\left(\left|y_{\rho_1,\zeta}\right|^2 / \left|y_{\rho_1,\bar\zeta}\right|^2\right) - 1}\right]^{\frac{q}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\chi^2}{1-\chi^2}\right)^{\frac{q}{2}} \left|\Im_{y_{\rho_1}}\right|^{\frac{q}{2}} \preceq \left|\Im_{y_{\rho_1}}\right|^{\frac{q}{2}},$$

де $\chi := \dfrac{K_2-1}{K_2+1}$. Звідси внаслідок (4.7) маємо $|\Im_{y_{\rho_1}}| \succeq |y_{\rho_1,\bar\zeta}|^2 \succeq 1$, $\zeta \in G^*_{\rho_1}\setminus U_\varepsilon$, і для інтеграла $J_{1,2}(n)$ одержуємо

$$J_{1,2}(n) = \iint\limits_{G^*_{\rho_1}\setminus U_\varepsilon} \frac{|y_{\rho_1,\bar\zeta}|^q d\sigma_\zeta}{|y_{\rho_1}(\zeta)-z|^3} \preceq$$

$$\preceq \iint\limits_{y_{\rho_1}\left(G^*_{\rho_1}\setminus U_\varepsilon\right)} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|^3} \leq \iint\limits_{|\zeta-z|\geq d(z,L^*_{\rho_1})} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|^3} \preceq \frac{1}{d(z,L^*_{\rho_1})}. \tag{4.13}$$

На підставі (4.10) – (4.12) та (4.13) отримуємо

$$J_1(n) \preceq \frac{1}{\left[d(z, L^*_{\rho_1})\right]^{\frac{1}{q}}}. \tag{4.14}$$

Оцінимо тепер інтеграл $J_2(n)$. Маємо

$$\left[J_2(n)\right]^p \preceq \sup_{\zeta \in L^*_{\rho_1}} \iint\limits_{G^*} \frac{d\sigma_z}{|\zeta - z|^3} \leq \sup_{\zeta \in L^*_{\rho_1}} \iint\limits_{|\zeta - z| \geq d(z, L^*_{\rho_1})} \frac{d\sigma_z}{|\zeta - z|^3} \preceq \frac{1}{d(z, L^*_{\rho_1})}. \tag{4.15}$$

Тому, об'єднуючи оцінки (4.8), (4.9), (4.14) і (4.15), отримуємо

$$\|P'_n\|_{A_p(h,G^*)} \preceq \frac{1}{\left[d(z, L^*_{\rho_1})\right]^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} \|P_n\|_{A_p(h,G)} \preceq \frac{1}{d(z, L^*_{\rho_1})} \|P_n\|_{A_p(h,G)}.$$

Оскільки $\overline{G}^*_{\rho_1} \subseteq \overline{G} \subseteq \overline{G}^*_{\rho_2}$ і $\rho_1 - 1 \asymp \rho_2 - 1 \asymp R - 1$, то, використовуючи лему 3.5 для полінома $T_{n-1} := P'_n$ і лему 3.1, одержуємо

$$\|P'_n\|_p \leq \|P'_n\|_{A_p(h,G^*_{\rho_2})} \preceq (1 + c(\rho_2 - 1))^{n-1+\frac{1}{p}} \left\|P'_n\right\|_{A_p(h,G^*)} \preceq$$

$$\preceq (1 + c(\rho_2 - 1))^{n-1+\frac{1}{p}} \frac{1}{d(z, L^*_{\rho_1})} \|P_n\|_p \preceq$$

$$\preceq (1 + c(R - 1))^{n-1+\frac{1}{p}} \frac{1}{d(z, L_R)} \|P_n\|_p \preceq \frac{1}{d(z, L_R)} \|P_n\|_p, \ z \in \overline{G}. \tag{4.16}$$

Ми показали, що співвідношення (4.16) виконується при $m = 1$. Переконаємось, що співвідношення (4.16) справджується при кожному $m \geq 2$. Припустимо, що (4.16) має місце при деякому $m = l \geq 2$, тобто

$$\|P_n^{(l)}\|_p \preceq \frac{1}{\left[d(z, L_R)\right]^l} \|P_n\|_p, \ z \in \overline{G}. \tag{4.17}$$

Покажемо, що воно виконується при $m = l + 1$. Після повторного застосування оцінки (4.17) маємо

$$\left\|P_n^{(l+1)}\right\|_p = \left\|\left[P_n^{(l)}\right]'\right\|_p \preceq \frac{1}{d(z, L_R)} \|P_n^{(l)}\|_p = \frac{1}{d(z, L_R)} \left\|\left[P_n^{(l-1)}\right]'\right\|_p \preceq$$

$$\preceq \frac{1}{\left[d(z, L_R)\right]^2} \left\|P_n^{(l-1)}\right\|_p \preceq \ldots \preceq \frac{1}{\left[d(z, L_R)\right]^{l+1}} \|P_n\|_p.$$

Таким чином, використовуючи метод математичної індукції, можна стверджувати, що оцінка (4.16) має місце при кожному $m = 1, 2, \ldots$:

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_p \preceq \frac{1}{\left[d(z, L_R)\right]^m} \|P_n\|_p, \ z \in \overline{G}.$$

Якщо тепер G — довільний k-квазікруг, то на підставі леми 3.2 одержуємо

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_p \preceq n^{m(1+k)} \|P_n\|_p,$$

а якщо $G \in Q_\alpha$, то внаслідок леми 3.3 отримуємо оцінку

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_p \preceq n^{\mu(1+k)}\|P_n\|_p,$$

яка завершує доведення.

***4.3. Доведення теорем* 2.3 *та* 2.6.** Маємо

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_q = \left(\iint\limits_G h(z)\left|P_n^{(m)}(z)\right|^q d\sigma_z\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\iint\limits_G \left|P_n^{(m)}(z)\right|^{q-p}\left|h(z)P_n^{(m)}(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \max_{z\in\overline{G}}\left|P_n^{(m)}(z)\right|^{1-\frac{p}{q}}\left(\iint\limits_G h(z)\left|P_n^{(m)}(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{1/q} \preceq \max_{z\in\overline{G^*}}\left|P_n^{(m)}(z)\right|^{1-\frac{p}{q}}\left\|P_n^{(m)}\right\|_p^{\frac{p}{q}}. \tag{4.18}$$

Нехай $T_N(z) := P_n^{(m)}(z)$, $\deg T_N = N \leq n-m$. На підставі теорем 2.1 і 2.4 при $m=0$ виконуються нерівності

$$\|T_N\|_\infty \leq c_1 N^{\frac{2+\gamma}{p}(1+k)}\|T_N\|_p$$

і

$$\|T_N\|_\infty \leq c_1 N^{\frac{2+\gamma}{p}\mu}\|T_N\|_p,$$

де μ визначається співвідношенням (3.3). Звідси одержуємо

$$\begin{gathered}\left\|P_n^{(m)}\right\|_\infty \preceq (n-m)^{\frac{2+\gamma}{p}(1+k)}\left\|P_n^{(m)}\right\|_p \leq n^{\frac{2+\gamma}{p}(1+k)}\left\|P_n^{(m)}\right\|_p,\\ \left\|P_n^{(m)}\right\|_\infty \preceq (n-m)^{\frac{2+\gamma}{p}\mu}\left\|P_n^{(m)}\right\|_p \leq n^{\frac{2+\gamma}{p}\mu}\left\|P_n^{(m)}\right\|_p.\end{gathered} \tag{4.19}$$

Тому, об'єднуючи (4.18) і (4.19), отримуємо

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_q \preceq n^{\frac{2+\gamma}{p}(1+k)(1-\frac{p}{q})}\left\|P_n^{(m)}\right\|_p^{(1-\frac{p}{q})}\left\|P_n^{(m)}\right\|_p^{\frac{p}{q}} \preceq n^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)(2+\gamma)(1+k)}\left\|P_n^{(m)}\right\|_p,$$

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_q \preceq n^{\frac{2+\gamma}{p}\mu(1-\frac{p}{q})}\left\|P_n^{(m)}\right\|_p^{(1-\frac{p}{q})}\left\|P_n^{(m)}\right\|_p^{\frac{p}{q}} \preceq n^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)(2+\gamma)\mu}\left\|P_n^{(m)}\right\|_p,$$

що завершує доведення.

Зазначимо, що нерівності у теоремах 2.1 – 2.6 є точними. Це легко бачити для теорем 2.1, 2.2, 2.4, 2.5 на прикладі $T_n(z) = \sum_{j=0}^n (j+1)z^j$, $G = B$, $m=1, p=2$ і $h(z)\equiv 1$. Дійсно,

$$\|T_n'\| = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \qquad \|T_n\|_\infty = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \qquad \|T_n\|_2 = \sqrt{\frac{\pi(n+1)(n+2)}{2}}.$$

Тоді

$$\|T_n'\|_\infty = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\frac{2}{(n+1)(n+2)}\|T_n\|_\infty = \frac{2n}{3}\|T_n\|_\infty,$$

$$\|T_n'\|_\infty = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi(n+1)(n+2)}}\,\|T_n\|_2 \geq$$

$$\geq n^2\|T_n\|_2\frac{(n+1)(n+2)}{3n}\sqrt{\frac{2}{\pi(n+1)(n+2)}} \geq \sqrt{\frac{2}{9\pi}}\,n^2\|T_n\|_2,$$

$$\|T_n'\|_2 \geq \sqrt{\pi}\frac{n(n+1)}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi(n+1)(n+2)}}\|T_n\|_2 =$$

$$= \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\sqrt{\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}}\|T_n\|_2 \geq \sqrt{\frac{n}{2(n+2)}}n\|T_n\|_2 \geq \frac{1}{2}n\|T_n\|_2, \quad n \geq 2.$$

Точність теорем 2.3, 2.6 можна довести для полінома $Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} z^j$ та $\alpha = 1$ подібно до відповідних міркувань із робіт [37, с. 689; 38].

Література

1. F. G. Abdullayev, V. V. Andrievskii, *On the orthogonal polynomials in the domains with K-quasiconformal boundary*, Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR, Ser. Fiz., Techn., Mat., № 1, 3 – 7 (1983).
2. F. G. Abdullayev, *On the some properties of the orthogonal polynomials over the region of the complex plane, Part I*, Ukr. Math. J., **52**, № 12, 1807 – 1821 (2000).
3. F. G. Abdullayev, *On the some properties of the orthogonal polynomials over the region of the complex plane, Part II*, Ukr. Math. J., **53**, № 1, 1 – 14 (2001).
4. F. G. Abdullayev, *On the some properties of the orthogonal polynomials over the region of the complex plane, Part III*, Ukr. Math. J., **53**, № 12, 1934 – 1948 (2001).
5. F. G. Abdullayev, *On the interference of the weight and boundary contour for orthogonal polynomials over the region*, J. Comput. Anal. and Appl., **6**, № 1, 31 – 42 (2004).
6. F. G. Abdullayev, *The properties of the orthogonal polynomials with weight having singulerity on the boundary contour*, J. Comput. Anal. and Appl., **6**, № 1, 43 – 59 (2004).
7. F. G. Abdullayev, U. Deger, *On the orthogonal polynomials with weight having singularity on the boundary of regions of the complex plane*, Bull. Belg. Math. Soc., **16**, № 2, 235 – 250 (2009).
8. F. G. Abdullayev, D. Aral, *The relation between different norms of algebraic polynomials in the regions of complex plane*, Azerb. J. Math., **1**, № 2, 70 – 82 (2011).
9. F. G. Abdullayev, C. D. Gün, *On the behavior of the algebraic polynomials in regions with piecewise smooth boundary without cusps*, Ann. Polon. Math., **111**, 39 – 58 (2014).
10. F. G. Abdullayev, N. P. Özkartepe, *Uniform and pointwise Bernstein – Walsh-type inequalities on a quasidisk in the complex plane*, Bull. Belg. Math. Soc., **23**, № 2, 285 – 310 (2016).
11. F. G. Abdullayev, T. Tunc, *Uniform and pointwise polynomial inequalities in regions with asymptotically conformal curve on weighted Bergman space*, Lobachevskii J. Math., **38**, № 2, 193 – 205 (2017).
12. F. G. Abdullayev, T. Tunc, G. A. Abdullayev, *Polynomial inequalities in quasidisks on weighted Bergman space*, Ukr. Math. J., **69**, № 5, 675 – 695 (2017).
13. K. Astala, *Analytic aspects of quasiconformality*, Doc. Math. J., Extra vol. ICM II, 617 – 626 (1998).
14. L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Mir, Moscow (1966) (in Russian).
15. J. M. Anderson, F. W. Gehring, A. Hinkkanen, *Polynomial approximation in quasidisks*, Different. Geom. and Complex Anal., Springer, Berlin, Heidelberg (1985).
16. V. V. Andrievskii, *Constructive characterization of the harmonic functions in domains with quasiconformal boundary*, Quasiconformal Continuation and Approximation by Function in the Set of the Complex Plane, Kiev (1985) (in Russian).
17. V. V. Andrievskii, V. I. Belyi, V. K. Dzyadyk, *Conformal invariants in constructive theory of functions of complex plane*, World Federation Publ. Co., Atlanta (1995).

18. V. V. Andrievskii, *Weighted polynomial inequalities in the complex plane*, J. Approx. Theory, **164**, № 9, 1165 – 1183 (2012).
19. S. Balcı, M. Imashkyzy, F. G. Abdullayev, *Polynomial inequalities in regions with interior zero angles in the Bergman space*, Ukr. Math. J., **70**, № 3, 362 – 384 (2018).
20. I. M. Batchaev, *Integral representatıons in the regions which quasicinformal boundary and some of their applications*, Avtoref. dis. cand. fiz.-mat. nauk, Baku (1981) (in Russian).
21. D. Benko, P. Dragnev, V. Totik, *Convexity of harmonic densities*, Rev. Mat. Iberoam., **28**, № 4, 1 – 14 (2012).
22. S. N. Bernstein, *Sur la limitation des derivees des polnomes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **190**, 338 – 341 (1930).
23. S. N. Bernstein, *On the best approximation of continuos functions by polynomials of given degree*, Izd. Akad. Nauk SSSR, vol. I (1952); vol. II (1954).
24. P. P. Belinskii, *General properties of quasiconformal mappings*, Nauka, Novosibirsk (1974) (in Russian).
25. Z. Ditzian, S. Tikhonov, *Ul'yanov and Nikol'skii-type inequalities*, J. Approx. Theory, **133**, № 1, 100 – 133 (2005).
26. Z. Ditzian, A. Prymak, *Nikol'skii inequalities for Lorentz spaces*, Rocky Mountain J. Math., **40**, № 1, 209 – 223 (2010).
27. V. K. Dzjadyk, *Introduction to the theory of uniform approximation of function by polynomials*, Nauka, Moscow (1977) (in Russian).
28. V. Kabayla, *On some interpolation problems in the class* Hp *for* $p < 1$, Dokl. USSR Acad. Sci., **132**, № 5, 1002 – 1004 (1960) (in Russian).
29. O. Lehto, K. I. Virtanen, *Quasiconformal mapping in the plane*, Springer-Verlag, Berlin (1973).
30. F. D. Lesley, *Hölder continuity of conformal mappings at the boundary via the strip method*, Indiana Univ. Math. J., **31**, 341 – 354 (1982).
31. D. I. Mamedhanov, *Inequalities of S. M. Nikol'skii type for polynomials in the complex variable on curves*, Soviet Math. Dokl., **15**, 34 – 37 (1974).
32. G. V. Milovanovic, D. S. Mitrinovic, Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros*, World Sci., Singapore (1994).
33. P. Nevai, V. Totik, *Sharp Nikolskii inequalities with exponential weights.*, Anal. Math., **13**, № 4, 261 – 267 (1987).
34. S. M. Nikol'skii, *Approximation of function of several variable and imbeding theorems*, Springer-Verlag, New York (1975).
35. Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1975).
36. Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
37. I. Pritsker, *Comparing norms of polynomials in one and several variables*, J. Math. Anal. and Appl., **216**, 685 – 695 (1997).
38. G. Szegö, A. Zygmund, *On certain mean values of polynomials*, J. Anal. Math., **3**, № 1, 225 – 244 (1953).
39. S. E. Warschawski, *On differentiability at the boundary in conformal mapping*, Proc. Amer. Math. Soc., **12**, 614 – 620 (1961).
40. S. E. Warschawski, *On Hölder continuity at the boundary in conformal maps*, J. Math. and Mech., **18**, 423 – 427 (1968).
41. J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Amer. Math. Soc. (1960).

Одержано 10.06.20