DOI: 10.37863/umzh.v73i4.6310

УДК 517.5

В. О. Кофанов (Дніпр. нац. ун-т)

ПРО ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК ТОЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ТА КОЛМОГОРОВА – РЕМЕЗА

We establish a new theorem on correlation between the sharp constants in the Kolmogorov type inequalities and the sharp constants in the Kolmogorov – Remez type inequalities for differentiable periodic functions. As a consequence, we obtain new sharp Kolmogorov – Remez type inequalities for such functions. We also derive new sharp Bernstein – Remez type inequalities for trigonometric polynomials and polynomial splines.

Доведено теорему про взаємозв'язок точних констант у нерівностях типу Колмогорова і Колмогорова – Ремеза для диференційовних періодичних функцій. Як наслідок встановлено нові точні нерівності типу Колмогорова – Ремеза на класах таких функцій. Крім того, отримано нові точні нерівності типу Бернштейна – Ремеза для тригонометричних поліномів і поліноміальних сплайнів.

1. Вступ. Нехай $G \subset \mathbf{R}$. Будемо розглядати простори $L_p(G)$ вимірних за Лебегом функцій $x\colon G \to \mathbf{R}$ таких, що $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, де

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b |x\,(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai}\sup_{t\in[a,b]} |x\,(t)|\,, & p = \infty. \end{cases}$$

Через I_d, $d > 0$, позначимо коло, зображене у вигляді відрізка довжиною d з ототожненими кінцями. У випадку 2π-періодичних функцій замість $L_p(I_{2\pi})$ і $\|x\|_{L_p(I_{2\pi})}$ будемо писати L_p і $\|x\|_p$.

Для $r \in \mathbf{N}$ через L^r_∞ позначимо множину 2π-періодичних функцій $x\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, що мають локально абсолютно неперервні похідні до порядку $r-1$ включно, причому $x^{(r)} \in L_\infty$.

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, позначимо r-й 2π-періодичний інтеграл із нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_0\,(t) = \operatorname{sgn}\sin t$ і покладемо $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

У даній статті вивчається взаємозв'язок точних констант у нерівностях типу Колмогорова

$$\|x^{(k)}\|_q \le C\,\|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \quad x \in L^r_\infty\,, \tag{1.1}$$

для 2π-періодичних функцій, де $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $q, p \ge 1$, $\alpha \in (0,1)$, і точних констант у відповідних нерівностях типу Колмогорова – Ремеза

$$\|x^{(k)}\|_q \le C(\beta)\,\|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \quad x \in L^r_\infty\,, \tag{1.2}$$

де B — вимірна підмножина $I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, $\beta \in [0, 2\pi)$.

Відомо [1], що нерівність (1.1) має місце для всіх функцій $x \in L^r_\infty$, якщо і тільки якщо

$$\alpha \le \alpha_{cr} := \min\left\{1 - \frac{k}{r},\ \frac{r - k + 1/q}{r + 1/p}\right\}. \tag{1.3}$$

Точні нерівності вигляду (1.1) із максимальним показником $\alpha = \alpha_{cr}$ викликають найбільший інтерес завдяки численним застосуванням в аналізі та теорії наближення (див. [2]).

Точні константи в нерівностях вигляду (1.1) з $\alpha = \alpha_{cr}$ відомі для всіх $k, r \in \mathbf{N},\ k < r$, лише в небагатьох випадках (див. бібліографію в [2]). В усіх цих випадках екстремальною функцією в точній нерівності (1.1) є ідеальний сплайн Ейлера $\varphi_r(t)$. Автори статті [3] висунули гіпотезу про те, що сплайн $\varphi_r(t)$ є екстремальним у всіх точних нерівностях вигляду (1.1). У роботі [3] цю гіпотезу доведено для всіх $q, p \geq 1$ у випадку функцій малої гладкості. Зокрема, доведено, що для $r = 2, k = 1$ і $r = 3, k = 1, 2$ має місце непокращувана на класі L^r_∞ нерівність

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \quad q, p \geq 1, \tag{1.4}$$

де $\alpha = \alpha_{cr}$ означене співвідношенням (1.3).

Зазначимо також, що в роботі [4] досліджено питання про збіг точних констант у нерівностях типу (1.1) для періодичних функцій із точними константами у відповідних нерівностях для неперіодичних функцій на осі.

Подальший крок у напрямку підтвердження гіпотези про екстремальність сплайна $\varphi_r(t)$ в нерівностях вигляду (1.1) було зроблено в роботі [5], в якій доведено таку теорему.

Теорема A. *Нехай* $k, r \in \mathbf{N},\ k < r;\ q, p \geq 1,\ \alpha = (r - k + 1/q)/(r + 1/p)$. *Якщо сплайн* φ_r *є екстремальною функцією в нерівності* (1.1) *з деяким* $q = \overline{q} \geq rp/(r-k)$, *то він є екстремаллю в* (1.1) *для довільних* $q > \overline{q}$, *тобто якщо на класі* L^r_∞ *має місце нерівність*

$$\|x^{(k)}\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha} \tag{1.5}$$

для деякого $q = \overline{q} \geq rp/(r-k)$, *то ця нерівність виконується на класі* L^r_∞ *для всіх* $q \geq \overline{q}$.

За допомогою цієї теореми і нерівності Соляра [6] в роботі [5] доведено таку теорему.

Теорема B. *Нехай* $k \in \mathbf{N},\ q \geq 2$. *Для довільної функції* $x \in L^{2k}_\infty$ *має місце нерівність*

$$\|x^{(k)}\|_q \leq \frac{\|\varphi_k\|_q}{\|\varphi_{2k}\|_1^\alpha} \|x\|_1^\alpha \left\|x^{(2k)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{1.6}$$

де $\alpha = (k + 1/q)/(2k+1)$. *Рівність в* (1.6) *досягається для функцій вигляду* $x(t) = a\varphi_r(t+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

З іншого боку, в останні десятиріччя з'явилося багато робіт, пов'язаних із нерівностями типу Ремеза

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \leq C(n, \beta) \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi} \setminus B)} \tag{1.7}$$

на класі T_n (тригонометричних поліномів порядку не вищого за n), де B — довільна вимірна за Лебегом множина $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \leq \beta$.

Цю тематику започаткував Є. Ремез у роботі [7], де було знайдено точну константу $C(n,\beta)$ в нерівності вигляду (1.7) для алгебраїчних многочленів. Для точної константи $C(n,\beta)$ в нерівності (1.7) для тригонометричних поліномів в ряді робіт отримано двосторонні оцінки. Крім того, вивчено асимптотичну поведінку констант $C(n,\beta)$ при $\beta\to 2\pi$ [8] і $\beta\to 0$ [9]. (Бібліографію з цієї тематики наведено у [8 – 10].) У роботі [9] доведено нерівність

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})}\leq\left(1+2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{n\beta}{4m}\right)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{1.8}$$

для довільного полінома $T\in T_n$, що має мінімальний період $2\pi/m$, і довільної вимірної за Лебегом множини $B\subset I_{2\pi}$, $\mu B\leq\beta$, де $\beta\in(0,2\pi m/n)$. Рівність в (1.8) досягається для полінома $T(t)=\cos nx+\dfrac{1}{2}(1-\cos\beta/2)$.

Нещодавно було знайдено [11] точну константу в нерівності (1.7) для тригонометричних поліномів.

Результат роботи [9] було узагальнено у [12] на класи $S_\varphi(\omega)$ 2ω-періодичних функцій із заданою функцією порівняння φ (такі класи розглядалися в роботах [13, 14]). Як наслідок отримано аналог нерівності (1.8) для поліноміальних сплайнів і функцій класу $L^r_\infty(I_{2\pi})$.

В роботах [15 – 18] доведено точні нерівності різних метрик типу Ремеза на класах $S_\varphi(\omega)$, зокрема, для диференційовних періодичних функцій, тригонометричних поліномів і сплайнів. Точні нерівності типу Колмогорова – Ремеза для функцій малої гладкості отримано в [19] .

У роботі [16] доведено таку нерівність різних метрик типу Ремеза.

Нехай далі $L(x)_p$ — локальна „норма” функції $x\in L_p$, означена рівністю [20]

$$L(x)_p:=\sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]}:[a,b]\subset I_{2\pi},\ |x(t)|>0,\ t\in(a,b)\right\}.$$

Теорема С. *Нехай* $r\in\mathbf{N}$, $p>0$, $\beta\in[0,2\pi)$, *а функція* $x\in L^r_\infty(I_{2\pi})$ *задовольняє умову*

$$L(x)_p\leq 2^{-\frac{1}{p}}\,\|x\|_{L_p(I_{2\pi})}. \tag{1.9}$$

Якщо число λ *вибрано так, що*

$$\|x\|_{L_p(I_{2\pi})}=\|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})}\|x^{(r)}\|_\infty, \tag{1.10}$$

то для довільного $q\geq p$ *і будь-якої вимірної за Лебегом множини* $B\subset I_{2\pi}$, $\mu B\leq\beta/\lambda$, *має місце нерівність*

$$\|x\|_{L_q(I_{2\pi})}\leq\|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})}\left\{\frac{\|x\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}}\right\}^\alpha\|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{1.11}$$

де

$$B_1:=\left[\frac{-\pi-\beta/2}{2},\frac{-\pi+\beta/2}{2}\right]\bigcup\left[\frac{\pi-\beta/2}{2},\frac{\pi+\beta/2}{2}\right],\quad \alpha=\frac{r+1/q}{r+1/p}.$$

Нерівність (1.11) *є точною і перетворюється в рівність для функції* $x(t) = \varphi_r(t)$ *і множини* $B = B_1$.

Зазначимо, що нерівність (1.11) при $\beta = 0$ було доведено в [15]. Зауважимо також, що вимога (1.9) виконується для довільної функції $x \in L_p$ такої, що

$$\|x_+\|_p = \|x_-\|_p\,.$$

Зокрема, умову (1.9) при $p = 1$ задовольняє будь-яка функція $x \in L_1$, яка в середньому дорівнює нулю на періоді. Крім того, неважко бачити, що вимога (1.9) виконується для функцій $x \in L_p$, що задовольняють рівність

$$L(x_+)_p = L(x_-)_p.$$

При $p = \infty$ умова (1.9) перетворюється в тотожність $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$.

2. Точні нерівності типу Колмогорова – Ремеза. В наступній теоремі встановлюється взаємозв'язок точних нерівностей типу Колмогорова і точних нерівностей типу Колмогорова – Ремеза на класах L^r_∞.

Теорема 1. *Нехай* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $\overline{q}, \overline{p} \geq 1$, $\overline{q} \geq r\overline{p}/(r-k)$; $\overline{\alpha} = (r-k+1/\overline{q})/(r+1/\overline{p})$; $\beta \in [0, 2\pi)$. *Якщо на класі* L^r_∞ *виконується нерівність*

$$\|x^{(k)}\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha} \tag{2.1}$$

для $q = \overline{q}$, $p = \overline{p}$ *і* $\alpha = \overline{\alpha}$, *то для довільних* $q \geq \overline{q}$, $p \in (0, \overline{p}]$, *для всіх функцій* $x \in L^r_\infty$, *що задовольняють умову*

$$L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{L_p(I_{2\pi})}, \tag{2.2}$$

і будь-якої вимірної за Лебегом множини $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta/\lambda$, *де число* λ *вибрано так, що*

$$\|x\|_{L_p(I_{2\pi})} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})} \|x^{(r)}\|_\infty, \tag{2.3}$$

має місце нерівність

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq \|\varphi_{r-k}\|_{L_q(I_{2\pi})} \left\{\frac{\|x\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}}\right\}^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{2.4}$$

в якій

$$B_1 := \left[\frac{-\pi-\beta/2}{2}, \frac{-\pi+\beta/2}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\pi-\beta/2}{2}, \frac{\pi+\beta/2}{2}\right], \quad \alpha = \frac{r-k+1/q}{r+1/p}.$$

Нерівність (2.4) *є точною і перетворюється в рівність для функції* $x(t) = \varphi_r(t)$ *і множини* $B = B_1$.

Доведення. Нехай на класі L^r_∞ виконується нерівність

$$\|x^{(k)}\|_{\overline{q}} \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{\overline{q}}}{\|\varphi_r\|_{\overline{p}}^{\overline{\alpha}}} \|x\|_{\overline{p}}^{\overline{\alpha}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\overline{\alpha}} \tag{2.5}$$

і $q \geq \overline{q}$. Тоді за теоремою А на класі L^r_∞ має місце нерівність

$$\|x^{(k)}\|_{q} \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{q}}{\|\varphi_r\|_{\overline{p}}^{\alpha_1}} \|x\|_{\overline{p}}^{\alpha_1} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha_1}, \tag{2.6}$$

де $\alpha_1 = \dfrac{r-k+1/q}{r+1/\overline{p}}$.

Нехай далі $p \in (0, \overline{p}]$, функція $x \in L^r_\infty$ задовольняє умову (2.2), а число $\lambda > 0 -$ умову (2.3). Тоді за теоремою С для довільної вимірної за Лебегом множини $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta/\lambda$, виконується нерівність (1.11):

$$\|x\|_{\overline{p}} \leq \|\varphi_r\|_{\overline{p}} \left\{ \frac{\|x\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \right\}^{\alpha_2} \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha_2}, \tag{2.7}$$

де $\alpha_2 = \dfrac{r+1/\overline{p}}{r+1/p}$.

Оцінюючи $\|x\|_{\overline{p}}^{\alpha_1}$ в (2.6) за допомогою нерівності (2.7) і враховуючи, що $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha$, отримуємо нерівність (2.4).

Теорему 1 доведено.

З теореми 1 і нерівності (1.4) безпосередньо випливає таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $r = 2, k = 1$ *або* $r = 3, k = 1, 2$; $q, p \geq 1$, $q \geq rp/(r-k)$. *Тоді для всіх функцій* $x \in L^r_\infty$, *що задовольняють умову*

$$L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{L_p(I_{2\pi})},$$

і довільної вимірної за Лебегом множини $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta/\lambda$, *де число* λ *вибрано так, що*

$$\|x\|_{L_p(I_{2\pi})} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})} \|x^{(r)}\|_\infty,$$

виконується нерівність

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq \|\varphi_{r-k}\|_{L_q(I_{2\pi})} \left\{ \frac{\|x\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \right\}^{\alpha} \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{2.8}$$

в якій

$$B_1 := \left[\frac{-\pi-\beta/2}{2}, \frac{-\pi+\beta/2}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\pi-\beta/2}{2}, \frac{\pi+\beta/2}{2}\right], \quad \alpha = \frac{r-k+1/q}{r+1/p}.$$

Нерівність (2.8) *є точною і перетворюється в рівність для функції* $x(t) = \varphi_r(t)$ *і множини* $B = B_1$.

З теорем 1 і В випливає таке твердження.

Теорема 3. *Нехай* $k \in \mathbf{N},\ q \geq 2,\ p \leq 1$. *Для довільної функції* $x \in L^{2k}_\infty$, *що задовольняє умову*

$$L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \, \|x\|_{L_p(I_{2\pi})} \,,$$

і будь-якої вимірної за Лебегом множини $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \leq \beta/\lambda$, *де число* λ *вибрано так, що*

$$\|x\|_{L_p(I_{2\pi})} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})} \|x^{(2k)}\|_\infty,$$

має місце нерівність

$$\|x^{(k)}\|_q \leq \|\varphi_k\|_q \left\{ \frac{\|x\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_{2k}\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \right\}^\alpha \|x^{(2k)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{2.9}$$

де $\alpha = (k + 1/q)/(2k+1)$.

Нерівність (2.9) *є точною і перетворюється в рівність для функції* $x(t) = \varphi_r(t)$ *і множини* $B = B_1$.

3. Точні нерівності типу Бернштейна – Ремеза для тригонометричних поліномів і поліноміальних сплайнів. Символом T_n позначимо простір тригонометричних поліномів порядку, що не перевищує n. У роботі [16] доведено таку теорему.

Теорема D. *Нехай* $n, m \in \mathbf{N},\ p > 0$. *Якщо тригонометричний поліном* $T \in T_n$ *має мінімальний період* $2\pi/m,\ m \leq n$, *і задовольняє умову*

$$L(T)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \, \|T\|_{L_p(I_{2\pi/m})}, \tag{3.1}$$

то для довільного $q \geq p$ *і будь-якої вимірної за Лебегом множини* $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \leq \beta,\ \beta \in [0, 2\pi m/n)$, *виконується нерівність*

$$\|T\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\sin(\cdot)\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\sin(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B(m,n))}} \|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}, \tag{3.2}$$

де

$$B(m,n) := \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4m}\,,\ -\frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4m}\right] \bigcup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4m}\,,\ \frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4m}\right].$$

Нерівність (3.2) *є точною і перетворюється в рівність для довільного полінома* $T(t) = \sin mt,\ m \leq n$, *і множини*

$$B = B_m := \bigcup_{k=0}^{m-1} \left\{ \left(\left[-\frac{\pi}{2m} - \frac{\beta}{4m},\ -\frac{\pi}{2m} + \frac{\beta}{4m}\right] \bigcup \left[\frac{\pi}{2m} - \frac{\beta}{4m},\ \frac{\pi}{2m} + \frac{\beta}{4m}\right] \right) + \frac{2k\pi}{m} \right\}.$$

Застосовуючи нерівність

$$\|T^{(k)}\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq n^k \|T\|_{L_q(I_{2\pi})}, \quad q > 0,$$

яка належить Бернштейну (див., наприклад, [21, с. 20]) при $q = \infty$, Зигмунду [21] у випадку $q \in [1, \infty)$ і Арестову [22] у випадку $q \in (0, 1)$, а потім оцінюючи норму $\|T\|_{L_q(I_{2\pi})}$ за допомогою теореми D (для $m = 1$), отримуємо наступну нерівність типу Бернштейна – Ремеза.

Теорема 4. *Нехай* $k, n \in \mathbf{N}$, $p > 0$. *Якщо тригонометричний поліном* $T \in T_n$ *задовольняє умову*

$$L(T)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \, \|T\|_{L_p(I_{2\pi})},$$

то для довільного $q \geq p$ *і будь-якої вимірної за Лебегом множини* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$, $\beta \in \in [0, 2\pi/n)$, *виконується нерівність*

$$\|T^{(k)}\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\sin(\cdot)\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\sin(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}, \tag{3.3}$$

де

$$B_1 := \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4}\,,\ -\frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4}\right] \bigcup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4}\,,\ \frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4}\right].$$

Нерівність (3.3) *є точною на класі всіх тригонометричних поліномів і перетворюється в рівність для полінома* $T(t) = \sin t$ *і множини* $B = B_1$.

Символом $S_{n,r}$, $n, r \in \mathbf{N}$, позначимо множину 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 1 з вузлами в точках $i\pi/n$, $i \in \mathbf{Z}$.

У роботі [23] доведено таке твердження.

Теорема E. *Нехай* $k, r, n \in \mathbf{N}$, $k < r$; $p = 1$ *або* $p = 2$, $q \geq p$. *Для довільного сплайна* $s \in S_{n,r}$ *має місце нерівність*

$$\|s^{(k)}\|_q \leq n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_p} \, \|s\|_p \,. \tag{3.4}$$

Нерівність (3.4) *непокращувана в тому сенсі, що*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \sup_{\substack{s \in S_{n,r} \\ s \neq 0}} \frac{\|s^{(k)}\|_q}{n^{k+1/p-1/q} \, \|s\|_p} = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_p}.$$

Окрім того, в роботі [16] отримано наступний аналог теореми D для сплайнів.

Теорема F. *Нехай* $r, n, m \in \mathbf{N}$, $p > 0$. *Якщо сплайн* $s \in S_{n,r}$ *має мінімальний період* $2\pi/m$, $m \leq n$, *і задовольняє умову*

$$L(s)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \, \|s\|_{L_p(I_{2\pi/m})}, \tag{3.5}$$

то для довільного $q \geq p$ *і будь-якої вимірної за Лебегом множини* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$, $\beta \in \in [0, 2\pi m/n)$, *виконується нерівність*

$$\|s\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B(m,n))}} \|s\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}, \tag{3.6}$$

де

$$B(m,n) := \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4m}\,,\ -\frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4m}\right] \bigcup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4m}\,,\ \frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4m}\right].$$

Нерівність (3.6) *є точною і перетворюється в рівність для сплайна* $s(t) = \varphi_{n,r}(t)$ *і множини*

$$B = B_n := \bigcup_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(\left[-\frac{\pi}{2n} - \frac{\beta}{4n}, \, -\frac{\pi}{2n} + \frac{\beta}{4n} \right] \bigcup \left[\frac{\pi}{2n} - \frac{\beta}{4n}, \, \frac{\pi}{2n} + \frac{\beta}{4n} \right] \right) + \frac{2k\pi}{n} \right\}.$$

Застосовуючи нерівність (3.4) у випадку $q \geq 2, \ p = 2$ або у випадку $q \geq 1, \ p = 1$, а потім оцінюючи $\|s\|_p$ за допомогою нерівності (3.6) з $m = 1$, отримуємо наступну нерівність типу Бернштейна – Ремеза для сплайнів.

Теорема 5. *Нехай* $k, r, n \in \mathbf{N}, \ k < r; \ q \geq 2, p \in (0, 2]$ *або* $q \geq 1, p \in (0, 1]$. *Якщо сплайн* $s \in S_{n,r}$ *задовольняє умову*

$$L(s)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \, \|s\|_{L_p(I_{2\pi})},$$

то для довільної вимірної за Лебегом множини $B \subset I_{2\pi}, \ \mu B \leq \beta, \ \beta \in [0, 2\pi/n)$, *має місце нерівність*

$$\|s^{(k)}\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_1)}} \|s\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}, \tag{3.7}$$

де

$$B_1 := \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4} \, , \, -\frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4} \right] \bigcup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4} \, , \, \frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4} \right].$$

Нерівність (3.7) *є точною на множині всіх сплайнів* $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_{n,r}$ *і перетворюється в рівність для сплайна* $s(t) = \varphi_r(t)$ *і множини* B_1.

Література

1. Б. Е. Клоц, *Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости*, Мат. заметки, **21**, № 1, 21 – 32 (1977).
2. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наук. думка, Киев (2003).
3. В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Точные неравенства типа Колмогорова с ограниченной старшей производной в случае малых гладкостей*, Укр. мат. журн., **53**, № 10, 1298 – 1308 (2001).
4. В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Сравнение точных констант в неравенствах для производных на действительной оси и на окружности*, Укр. мат. журн., **55**, № 5, 579 – 589 (2003).
5. V. A. Kofanov, V. E. Miropolskiy, *On the best constants in inequalities of Kolmogorov type*, East J. Approx., **13**, № 4, 455 – 466 (2007).
6. В. Г. Соляр, *Об одном неравенстве между нормами функции и ее производных*, Изв. вузов. Математика, **2**, 165 – 168 (1976).
7. E. Remes, *Sur une propriete extremale des polynomes de Tchebychef*, Зап. Наук.-дослід. ін-ту математики й механіки та Харків. мат. т-ва, сер. 4, **13**, вип. 1, 93 – 95 (1936).
8. M. I. Ganzburg, *On a Remez-type inequality for trigonometric polynomials*, J. Approx. Theory, **164**, 1233 – 1237 (2012).
9. E. Nursultanov, S. Tikhonov, *A sharp Remez inequality for trigonometric polynomials*, Consr. Approx., **38**, 101 – 132 (2013).
10. M. I. Ganzburg, *Polynomial inequalities on measurable sets and their applications*, Consr. Approx., **17**, 275 – 306 (2001).
11. S. Tikhonov, P. Yuditski, *Sharp Remez inequality*, https://www.researchgate.net/publication/327905401.
12. В. А. Кофанов, *Точные неравенства типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов*, Укр. мат. журн., **68**, № 2, 227 – 240 (2016).
13. B. Bojanov, N. Naidenov, *An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos*, J. Anal. Math., **78**, 263 – 280 (1999).

14. В. А. Кофанов, *Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения*, Укр. мат. журн., **63**, № 7, 969 – 984 (2011).
15. В. А. Кофанов, *Неравенства разных метрик для дифференцируемых периодических функций*, Укр. мат. журн., **67**, № 2, 202 – 212 (2015).
16. В. А. Кофанов, *Точные неравенства разных метрик типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов*, Укр. мат. журн., **69**, № 2, 173 – 188 (2017).
17. А. Е. Гайдабура, В. А. Кофанов, *Точные неравенства разных метрик типа Ремеза на классах функций с заданной функцией сравнения*, Укр. мат. журн., **69**, № 11, 1472 – 1485 (2017).
18. В. А. Кофанов, И. В. Попович, *Точные неравенства разных метрик типа Ремеза с несимметричными ограничениями на функции*, Укр. мат. журн., **72**, № 7, 918 – 927 (2020).
19. В. А. Кофанов, *Точные неравенства типа Колмогорова – Ремеза для периодических функций малой гладкости*, Укр. мат. журн., **72**, № 2, 483 – 493 (2020).
20. A. Pinkus, O. Shisha, *Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation*, J. Approx. Theory, **35**, № 2, 148 – 168 (1982).
21. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 2, Мир, Москва (1965).
22. В. В. Арестов, *Об интегральных неравенствах для полиномов и сплайнов*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **45**, 3 – 32 (1982).
23. В. А. Кофанов, *О точных неравенствах типа Бернштейна для сплайнов*, Укр. мат. журн., **58**, № 10, 1357 – 1367 (2006).

Одержано 17.09.20