DOI: 10.37863/umzh.v73i3.6320

УДК 517.9

А. М. Пономаренко (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

ДРОБОВЕ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ, ЩО ВИРОДЖУЄТЬСЯ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

We consider a fractional extension of the parabolic equation degenerating on the initial hyperplane. In this case, we construct and investigate a fundamental solution of the Cauchy problem, as well as the solution of the nonhomogeneous equation.

У модельних прикладах розв'язок субординованого рівняння задовольняє рівняння дробового порядку, яке моделює повільні фізичні процеси. У статті побудовано та досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші, а також знайдено розв'язок неоднорідного рівняння.

Вступ. Прикладом моделі параболічного рівняння, виродженого на початковій гіперплощині, є рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\gamma+1}{2} t^{\gamma} \Delta u(t,x) + f(t,x), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де $\gamma > -1$. Рівняння цього типу, що задовольняються граничними розподілами дробових броунівських рухів, з'являються в різних фізичних і біологічних моделях [1, 2]. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1) було знайдено в [3]; щодо загальних властивостей параболічних рівнянь, вироджених на початковій гіперплощині, див. [4 – 6].

У цій роботі розглядається задача Коші для дробового узагальнення рівняння (1), отриманого з (1) перетворенням субординації

$$\int\limits_0^{\infty} f_t(\tau) u(\tau, x) d\tau,$$

де $f_t(\tau)$ — перехідна щільність інверсного α-стійкого субординатора, $0 < \alpha < 1$. Форму отриманого рівняння було знайдено в [7].

1. Обернений β-стійкий субординатор [9 – 11]. *Субординатор* — це неспадний процес Леві. Процес Леві — це випадковий процес із стаціонарними незалежними приростами. Стійкий субординатор $W_t,\ t \geq 0$, задовольняє умови

$$W_0 = 0,$$

$$W_{ct} = c^{1/\beta} W_t, \quad c > 0, \quad \text{при деякому } \beta \in (0,1).$$

Нехай $g(s,t)$ — густина розподілу процесу W_t. Тоді

$$g(s,t) = t^{-1/\beta} g(st^{-1/\beta}, 1).$$

Обернений стійкий субординатор E_t, тобто обернена випадкова функція до W_t,

$$E_t = \inf\{u \colon W_u > t\},$$

є моментом першого виходу стійкого субординатора за рівень $t \geq 0$. Густина розподілу процесу E_t

$$h(s,t) = \frac{t}{\beta} s^{-1-\frac{1}{\beta}} g(ts^{-1/\beta}, 1).$$

Маємо перетворення Лапласа

$$\widetilde{g}(p,t) = \int_0^\infty e^{-ps} g(s,t)\,ds = e^{-tp^\beta},$$

$$\widetilde{h}(s,p) = \int_0^\infty e^{-pt} h(s,t)\,dt = p^{\beta-1} e^{-sp^\beta}.$$

Функція h допускає зображення через функцію Райта:

$$h(s,t) = t^{-\beta}\Phi_\beta(st^{-\beta}), \quad \Phi_\beta(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-z)^n}{n!\Gamma(-\beta n + 1 - \beta)}.$$

Функцію $h(s,t)$ часто позначають як $f_t(s)$ або $\varphi_{t,\beta}(s)$; ця функція збігається із субординаційним ядром для C_0-півгруп [8].

2. Однорідне рівняння. 1. *Задача Коші для рівняння* 1*-го порядку за часом* має вигляд

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\gamma+1}{2} t^\gamma \Delta u(t,x), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \psi(x),$$

де $\gamma > -1$. Її розв'язок

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n(1+\gamma)/2} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{2t^{\gamma+1}}} \psi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x-\xi)\psi(\xi) d\xi, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

тобто фундаментальний розв'язок задачі Коші (2) має вигляд [3]

$$Z(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} t^{-n(1+\gamma)/2} e^{-\frac{|x|^2}{2t^{\gamma+1}}}. \tag{4}$$

У статті [3] наведено оцінки даного розв'язку, а також теореми його існування та єдиності.

2. *Задача Коші для перетвореного „дробового" рівняння* [7] має вигляд

$$\left(D_*^\alpha v\right)(t,x) = \frac{\gamma+1}{2} G_{\gamma,t} \Delta v(t,x), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$v(0,x) = \psi(x),$$

де

$$\left(G_{\gamma,t} v\right)(t,x) = \int_0^\infty \varphi_{t,\alpha}(\tau) \tau^\gamma u(\tau,x)\,d\tau, \tag{6}$$

або в явному вигляді

$$\left(G_{\gamma,t} v\right)(t,x) = \alpha\Gamma(\gamma+1) J_t^{1-\alpha} \mathcal{L}^{-1}_{s\to t} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\widetilde{v}(z,x)}{(s^\alpha - z^\alpha)^{\gamma+1}} dz \right\} (t). \tag{7}$$

Тут $0 < C < s$, z^α — основне значення багатозначної функції, $\mathcal{L}^{-1}_{s\to t}$ — обернене перетворення Лапласа, D^α_* — дробова похідна Капуто – Джрбашяна порядку α, $J^{1-\alpha}$ — дробовий інтеграл Рімана – Ліувілля порядку $1-\alpha$.

Розв’язок задачі Коші (5) має вигляд

$$v(t,x)=\int\limits_0^\infty\left[t^{-\alpha}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-\tau t^{-\alpha})^k}{k!\Gamma(-\alpha k+1-\alpha)}\right]\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\tau^{-n(1+\gamma)/2}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{2\tau^{\gamma+1}}}\psi(\xi)d\xi\right]d\tau=$$

$$=\int\limits_0^\infty\varphi_{t,\alpha}(\tau)u(\tau,x)\,d\tau,$$

де

$$\varphi_{t,\alpha}(\tau)=t^{-\alpha}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-\tau t^{-\alpha})^k}{k!\Gamma(-\alpha k+1-\alpha)},$$

а $u(t,x)$ визначено формулою (3).

Заміною порядку інтегрування отримуємо розв’язок задачі Коші (5) в іншому вигляді

$$v(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\int\limits_0^\infty\left[t^{-\alpha}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-\tau t^{-\alpha})^k}{k!\Gamma(-\alpha k+1-\alpha)}\right]\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\tau^{-n(1+\gamma)/2}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{2\tau^{\gamma+1}}}\right]d\tau\right]\psi(\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\int\limits_0^\infty\varphi_{t,\alpha}(\tau)Z(\tau,x-\xi)d\tau\right]\psi(\xi)d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_\alpha(t,x-\xi)\psi(\xi)d\xi, \tag{8}$$

де

$$Z_\alpha(t,x)=\int\limits_0^\infty t^{-\alpha}\sum_{k=0}^\infty\left[\frac{(-\tau t^{-\alpha})^k}{k!\Gamma(-\alpha k+1-\alpha)}\right]\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\tau^{-n(1+\gamma)/2}e^{-\frac{|x|^2}{2\tau^{\gamma+1}}}d\tau=\int\limits_0^\infty\varphi_{t,\alpha}(\tau)Z(\tau,x)d\tau \tag{9}$$

— фундаментальний розв’язок задачі Коші (5).

3. Оцінки фундаментального розв’язку та теорема про існування розв’язку для однорідного рівняння.

Теорема 3.1. *Справджуються оцінки*

$$\left|D^\beta_x Z_\alpha(t,x)\right|\le Ct^{-\alpha\frac{(n+|\beta|)(\gamma+1)}{2}}\exp\left\{-c\left(|x|^2t^{-\alpha(\gamma+1)}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right\},\quad R\ge1,$$

$$\left|D^\beta_x Z_\alpha(t,x)\right|\le Ct^{-\alpha}|x|^{-(n+|\beta|)(\gamma+1)+2},\quad R\le1,\quad n+|\beta|>2,$$

$$\left|D^\beta_x Z_\alpha(t,x)\right|\le Ct^{-\alpha\frac{(n+|\beta|)(\gamma+1)}{2}},\quad R\le1,\quad n+|\beta|<2,$$

$$\left|D^\beta_x Z_\alpha(t,x)\right|\le Ct^{-\alpha},\quad n=1,\quad R\le1,\quad n+|\beta|=2,$$

$$\left|D^\beta_x Z_\alpha(t,x)\right|\le Ct^{-\alpha}\left(\left|\log\left(t^{-\alpha(1+\gamma)}|x|^2\right)\right|+1\right),\quad n\ge2,\quad R\le1,\quad n+|\beta|=2,$$

де $R := |x|^2 t^{-\alpha(\gamma+1)}$, C, c — *деякі сталі,* $Z_\alpha(t,x)$ — *фундаментальний розв'язок* (9) *задачі Коші* (5).

Доведення аналогічне до наведеного в п. 4 статті [12]. Наприклад, проведемо доведення для одного із випадків. Оцінка для $Z(t,x)$ має вигляд

$$\left|D_x^\beta Z(t,x)\right| \le Ct^{-\frac{(n+|\beta|)(\gamma+1)}{2}} \exp\left\{-c|x|^2 t^{-(\gamma+1)}\right\},$$

а оцінка для $\varphi_{t,\alpha}(s)$

$$0 \le \varphi_{t,\alpha}(s) \le Ct^{-\alpha} \exp\left\{-cs^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\}, \quad s > 0. \tag{10}$$

Оцінимо

$$D_x^\beta Z_\alpha(t,x) = \int\limits_0^\infty \varphi_{t,\alpha}(s) D_x^\beta Z(s,x) ds, \quad x \ne 0. \tag{11}$$

Покладемо $R = |x|^2 t^{-\alpha(\gamma+1)}$.

Випадок 1: $R \ge 1$. Підставляючи (10), (11) у (9), одержуємо

$$|D_x^\beta Z_\alpha(t,x)| \le t^{-\alpha} \int\limits_0^\infty s^{-\frac{(n+|\beta|)(\gamma+1)}{2}} \exp\left\{-c|x|^2 s^{-(\gamma+1)}\right\} \exp\left\{-cs^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} ds. \tag{12}$$

Виконаємо в (12) заміну $s = \sigma^{-1}$. В результаті отримаємо

$$|D_x^\beta Z_\alpha(t,x)| \le t^{-\alpha} \int\limits_0^\infty \sigma^{\frac{(n+|\beta|)(\gamma+1)}{2}-2} \exp\left\{-c|x|^2 \sigma^{(\gamma+1)}\right\} \exp\left\{-c\sigma^{-\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} d\sigma. \tag{13}$$

Виконавши в (13) заміну $\sigma = t^{-\alpha}\eta$, будемо мати

$$|D_x^\beta Z_\alpha(t,x)| \le t^{-\alpha\frac{(n+|\beta|)(\gamma+1)}{2}} \int\limits_0^\infty \eta^{\frac{(n+|\beta|)(\gamma+1)}{2}-2} \exp\left\{-c|x|^2 t^{-\alpha(\gamma+1)} \eta^{\gamma+1}\right\} \exp\left\{-c\eta^{-\frac{1}{1-\alpha}}\right\} d\eta. \tag{14}$$

Застосуємо формулу [12]

$$\Omega(\xi) = \int\limits_0^\infty e^{-\xi\phi} e^{-s\phi^{-\chi}} \phi^\lambda d\phi \sim a_0 (s\chi\xi^{-1})^{\frac{\lambda+1}{\chi+1}} \exp\left\{-\left(1+\frac{1}{\chi}\right)\rho\right\} \rho^{-1/2}, \quad \zeta \to \infty, \tag{15}$$

де $\rho = (s\chi\xi^\chi)^{\frac{1}{\chi+1}}$, $a_0 = 2\left(\dfrac{2}{1+\chi}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Покладемо в (14), (15) $\xi = R = |x|^2 t^{-\alpha(\gamma+1)}$, $s = c$, $\chi = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\lambda = \dfrac{1}{2}(n+|\beta|) - 2$. Тоді отримаємо оцінку

$$|D_x^\beta Z_\alpha(t,x)| \le Ct^{-\alpha\frac{(n+|\beta|)(\gamma+1)}{2}} \exp\left\{-c(|x|^2 t^{-\alpha(\gamma+1)})^{\frac{1}{2-\alpha}}\right\}.$$

Випадок 2: $R \le 1$, $n+|\beta| > 2$, *випадок* 3: $R \le 1$, $n+|\beta| < 2$ та *випадок* 4: $R \le 1$, $n+|\beta| = 2$ доводяться подібно до [12].

Теорема 3.2 (про існування розв'язку для однорідного рівняння). *Нехай функція ψ обмежена і неперервна. Тоді розв'язок* (8) *задачі Коші* (5) *існує в класичному сенсі.*

Доведення проводиться подібно до [4], але оскільки ми розглядаємо випадок з виродженням, замість оцінок із [4] в даному випадку використовуються оцінки з теореми 3.1.

4. Неоднорідне рівняння. Задача Коші для неоднорідного рівняння першого порядку за часом має вигляд

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\gamma+1}{2} t^{\gamma} \Delta u(t,x) + g(t,x), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{16}$$
$$u(0,x) = \psi(x),$$

а її розв'язок

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_{(0)}(t,\tau,x-\xi) g(\tau,\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x-\xi)\psi(\xi)d\xi, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{17}$$

де $Z(t,x-\xi)$ визначено формулою (4), а $Z_{(0)}(t,\tau,x-\xi)$ має вигляд [3, с. 2738, 2739]

$$Z_{(0)}(t,\tau,x-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (t^{\gamma+1} - \tau^{\gamma+1})^{-n/2} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{2(t^{\gamma+1}-\tau^{\gamma+1})}}, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Нехай $B(0<t<T)$ – простір обмежених і неперервних функцій на інтервалі $0<t<T$.

Лема 4.1. *Якщо функції g та $\partial_{x_i} g$, $i=1,\ldots,n$, належать $B(0<t<T)$, то функція*

$$u_1(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_{(0)}(t,\tau,x-\xi) g(\tau,\xi) d\xi, \quad (x,t) \in \{0<t<T\},$$

належить $B(0<t<T)$ та є класичним розв'язком задачі Коші (16) *в області $\{0<t<T\}$; при цьому*

$$\|u_2\|_{B(0<t<T)} \le T\|g\|_{B(0<t<T)}, \quad (x,t)\in\{0<t<T\}.$$

Оскільки $g \in C^2$ по x при кожному t та її частинні похідні обмежені, то $u(t,x)$ вигляду (17) при $\psi \equiv 0$ — це класичний розв'язок рівняння (16). При цьому

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_{(0)}(t,\tau,x-\xi) g(\tau,\xi) d\xi, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

де

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z_{(0)}(t,\tau,x,x)dx = 1, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Задачу Коші для дробового рівняння слід брати в узгодженому з субординацією розв'язків вигляді

$$\left(D^{\alpha}_{*,t} v\right)(t,x) = \frac{\gamma+1}{2} G_{\gamma,t} \Delta v(t,x) + \int_0^{\infty} \varphi_{t,\alpha}(\tau) g(\tau,x) d\tau, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{18}$$

$$v(0,x)=\psi(x),$$

де $G_{\gamma,t}$ визначено в (6), (7).

Далі будемо вважати, що у випадку, коли $n=1,\ \gamma>1$. За цієї умови завжди

$$\frac{n}{2}>\frac{1}{\gamma+1}. \tag{19}$$

Лема 4.2. *Розв'язок задачі Коші* (18) *при* $\psi=0$ *має вигляд*

$$v(t,x)=\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_\tau^\infty Y_\alpha(t,\tau,x-\xi)g(\tau,\xi)d\xi,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

де функція Гріна

$$Y_\alpha(\theta,\tau,x-\xi):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi_{t,\alpha}(\theta)Z_{(0)}(\theta,\tau,x-\xi)d\theta,\quad t>0,x\in\mathbb{R}^n.$$

Доведення. Нехай

$$u(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^n} Z_{(0)}(t,\tau,x-\xi)g(\tau,\xi)d\xi,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Тоді

$$v(t,x)=\int\limits_0^\infty\varphi_{t,\alpha}(\theta)u(\theta,x)d\theta=\int\limits_0^\infty\varphi_{t,\alpha}(\theta)d\theta\int\limits_0^\theta d\tau\int\limits_{R^n}Z_{(0)}(\theta,\tau,x-\xi)g(\tau,\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_\tau^\infty\varphi_{t,\alpha}(\theta)d\theta\int\limits_{R^n}Z_{(0)}(\theta,\tau,x-\xi)g(\tau,\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_\tau^\infty Y_\alpha(t,\tau,x-\xi)g(\tau,\xi)d\xi,\quad t>0,x\in\mathbb{R}^n.$$

***Наслідок* 1.** *Розв'язок задачі Коші* (18) *можна подати у вигляді*

$$v(t,x)=\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\int\limits_\tau^\infty\varphi_{t,\alpha}(\theta)Z_{(0)}(\theta,\tau,x-\xi)d\theta\right]g(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\int\limits_0^\infty\varphi_{t,\alpha}(\theta)Z(\theta,x-\xi)d\theta\right]\psi(\xi)d\xi,\quad t>0,x\in\mathbb{R}^n. \tag{20}$$

Тоді функція Гріна Y_α *задачі Коші* (18) *при* $\psi=0$ *буде мати вигляд*

$$Y_\alpha(t,\tau,x):=\int\limits_\tau^\infty\varphi_{t,\alpha}(\theta)Z_{(0)}(\theta,\tau,x)d\theta=$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\tau}^{\infty} \varphi_{t,\alpha}(\theta)(\theta^{\gamma+1} - \tau^{\gamma+1})^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}|x|^2(\theta^{\gamma+1}-\tau^{\gamma+1})^{-1}} d\theta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \tau \int\limits_{1}^{\infty} \varphi_{t,\alpha}(\tau\lambda) \tau^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}} (\lambda^{\gamma+1} - 1)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}|x|^2 \tau^{-(\gamma+1)}(\lambda^{\gamma+1}-1)^{-1}} d\lambda, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{21}$$

5. Оцінки фундаментального розв’язку та теорема про існування розв’язку для неоднорідного рівняння.

Теорема 5.1. *Для функції Гріна* (21) *задачі Коші* (18) *та її похідних справджуються оцінки*

$$|Y_\alpha(t,\tau,x)| \leq C|x|^{-n+\frac{2}{\gamma+1}} t^{-\alpha} e^{-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}, \quad t > 0, \tag{22}$$

$$\left| D_x^\beta Y_\alpha(t,\tau,x) \right| \leq C|x|^{-(n+|\beta|)+\frac{2}{\gamma+1}} t^{-\alpha} e^{-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}, \quad t > 0, \tag{23}$$

$$\left| D_{*,t}^\beta Y_\alpha(t,\tau,x) \right| \leq C|x|^{-(n+|\beta|)+\frac{2}{\gamma+1}} t^{-\alpha} e^{-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}, \quad t > 0, \tag{24}$$

де $C, c > 0$ — деякі сталі.

Доведення. Запишемо $Y_\alpha(t,\tau,x) = Y_{\alpha,1}(t,\tau,x) + Y_{\alpha,2}(t,\tau,x)$, де $Y_{\alpha,1}$ відповідає інтегруванню по $(1,2)$, а $Y_{\alpha,2}$ — по $(2,\infty)$:

$$Y_\alpha(t,\tau,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \tau \int\limits_{1}^{2} \varphi_{t,\alpha}(\tau\lambda) \tau^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}} (\lambda^{\gamma+1} - 1)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}|x|^2 \tau^{-(\gamma+1)}(\lambda^{\gamma+1}-1)^{-1}} d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \tau \int\limits_{2}^{\infty} \varphi_{t,\alpha}(\tau\lambda) \tau^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}} (\lambda^{\gamma+1} - 1)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}|x|^2 \tau^{-(\gamma+1)}(\lambda^{\gamma+1}-1)^{-1}} d\lambda =$$

$$= Y_{\alpha,1}(t,\tau,x) + Y_{\alpha,2}(t,\tau,x),$$

де

$$Y_{\alpha,1}(t,\tau,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \tau \int\limits_{1}^{2} \varphi_{t,\alpha}(\tau\lambda) \tau^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}} (\lambda^{\gamma+1} - 1)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}|x|^2 \tau^{-(\gamma+1)}(\lambda^{\gamma+1}-1)^{-1}} d\lambda,$$

$$Y_{\alpha,2}(t,\tau,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \tau \int\limits_{2}^{\infty} \varphi_{t,\alpha}(\tau\lambda) \tau^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}} (\lambda^{\gamma+1} - 1)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}|x|^2 \tau^{-(\gamma+1)}(\lambda^{\gamma+1}-1)^{-1}} d\lambda.$$

Покладемо $a := \dfrac{|x|^2}{2}$. Далі C буде позначати різні додатні сталі. Будемо використовувати оцінку (10), з якої випливає, що

$$|Y_{\alpha,1}(t,\tau,x)| \leq Ct^{-\alpha} \exp(-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}) \tau^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}+1} I_{1,1}, \tag{25}$$

де

$$I_{1,1} = \int\limits_1^2 (\lambda^{\gamma+1} - 1)^{-n/2} e^{-a\tau^{-(\gamma+1)}(\lambda^{\gamma+1}-1)^{-1}} d\lambda. \tag{26}$$

В інтегралі (26) виконаємо заміну

$$(\lambda^{\gamma+1} - 1)^{-1} = z,$$

тоді

$$\lambda = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad d\lambda = \frac{1}{1+\gamma}\left(-\frac{1}{z^2}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}-1}.$$

Точка $\lambda = 1$ відповідає $z = \infty$, а $\lambda = 2$ — точці $z_0 = (2^{\gamma+1} - 1)^{-1} > 0$. Тоді

$$I_{1,1} = \frac{1}{1+\gamma} \int\limits_{z_0}^{\infty} z^{n/2-2} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}-1} e^{-a\tau^{-(\gamma+1)}z} dz \leq$$

$$\leq C \int\limits_{z_0}^{\infty} z^{n/2-1-\frac{1}{\gamma+1}} e^{-a\tau^{-(\gamma+1)}z} dz.$$

Використовуючи (19), можна оцінити це зверху інтегралом по $(0, \infty)$, а потім виконати заміну $z = a^{-1}\tau^{\gamma+1}$:

$$|I_{1,1}| \leq C \int\limits_{z_0}^{\infty} z^{n/2-1-\frac{1}{\gamma+1}} e^{-a\tau^{-(\gamma+1)}z} dz \leq C(a^{-1}\tau^{\gamma+1})^{n/2-\frac{1}{\gamma+1}} \leq$$

$$\leq C a^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{\gamma+1}} t^{-\alpha} e^{-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}}, \quad t > 0.$$

Тоді

$$|Y_{\alpha,1}(t,\tau,x)| < t^{-\alpha} e^{-\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} \tau^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \tau^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}+1} |I_{1,1}|. \tag{27}$$

Далі оцінимо $Y_{\alpha,2}(t,\tau,x)$:

$$|Y_{\alpha,2}(t,\tau,x)| \leq C t^{-\alpha} \tau^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}+1} \int\limits_2^{\infty} e^{-c(\tau\lambda)^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \lambda^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}} e^{-a\tau^{-(\gamma+1)}\lambda^{-(\gamma+1)}} d\lambda =$$

$$= |\theta = \tau\lambda| = C t^{-\alpha} \int\limits_{2\tau}^{\infty} e^{-c\theta^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \lambda^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}} e^{-a\theta^{-(\gamma+1)}} d\theta \leq$$

$$\leq C t^{-\alpha} e^{-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{1}{1-\alpha}}} \int\limits_{2\tau}^{\infty} \theta^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}} e^{-a\theta^{-(\gamma+1)}} d\theta.$$

Тут враховано нерівність (19), яка забезпечує збіжність останнього інтеграла на нескінченності. Тепер

$$|Y_{\alpha,2}(t,\tau,x)| \le Ct^{-\alpha}e^{-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}}t^{-\frac{1}{1-\alpha}}}\int\limits_0^\infty \theta^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}}e^{-a\theta^{-(\gamma+1)}}d\theta.$$

В останній рівності виконаємо заміну $\theta = a^{\frac{1}{\gamma+1}}y$ й отримаємо

$$|Y_{\alpha,2}(t,\tau,x)| \le Ct^{-\alpha}a^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{\gamma+1}}e^{-c_1\tau^{\frac{1}{1-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\int\limits_0^\infty y^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}}e^{-y^{-(\gamma+1)}}dy.$$

Останній інтеграл є скінченною сталою: заміна $y = \dfrac{1}{z}$ показує, що він дорівнює

$$\int\limits_0^\infty z^{-\frac{n(\gamma+1)}{2}-2}e^{-z^{\gamma+1}}dz < \infty$$

внаслідок (19). Разом із (27) ці оцінки дають (22).

Покажемо, що оцінка виразу

$$D_x^1Y_\alpha(t,\tau,x) = -|x|\tau^{-(\gamma+1)}\times$$

$$\times\int\limits_1^\infty \varphi_{t,\alpha}(\tau\lambda)(\lambda^{\gamma+1}-1)^{-(n+1)/2}e^{-a\tau^{-(\gamma+1)}(\lambda^{\gamma+1}-1)^{-1}}d\lambda, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{28}$$

має вигляд

$$\left|D_x^1Y_\alpha(t,\tau,x)\right| \le Ca^{-\frac{(n+1)}{2}+\frac{1}{\gamma+1}}t^{-\alpha}e^{-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}}t^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}}, \quad t>0,$$

де $a = \dfrac{|x|^2}{2}$, $C, c > 0$ — деякі сталі.

Розіб'ємо інтеграл (28) на два інтеграли й оцінимо вираз

$$D_x^1Y_\alpha(t,\tau,x) = D_x^1Y_{\alpha,1}(t,\tau,x) + D_x^1Y_{\alpha,2}(t,\tau,x),$$

де $D_x^1Y_{\alpha,1}(t,\tau,x)$ відповідає інтегруванню по $(1,2)$, а $D_x^1Y_{\alpha,2}(t,\tau,x)$ – по $(2,\infty)$. Далі оцінимо $D_x^1Y_{\alpha,1}(t,\tau,x)$.

На підставі (25) отримаємо

$$\left|D_x^1Y_{\alpha,1}(t,\tau,x)\right| < t^{-\alpha}a^{\frac{1}{2}}e^{-\tau^{\frac{1}{1-\alpha}}\tau^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\tau^{-\frac{(n+2)(\gamma+1)}{2}+1}J_{1,1},$$

де

$$J_{1,1} = \int\limits_1^2 (\lambda^{\gamma+1}-1)^{-(n+2)/2}e^{-a\tau^{-(\gamma+1)}(\lambda^{\gamma+1}-1)^{-1}}d\lambda. \tag{29}$$

Виконаємо у (29) заміну $(\lambda^{\gamma+1}-1)^{-1} = z$, тоді $\lambda = \left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}$, $d\lambda = \dfrac{1}{1+\gamma}\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)\times$ $\times\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}-1}$. Далі

$$J_{1,1} = \frac{1}{1+\gamma} \int\limits_{z_0}^{\infty} z^{(n+2)/2-2} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}-1} e^{-a\tau^{-(\gamma+1)}z} dz \leq$$

$$\leq C \int\limits_{z_0}^{\infty} z^{(n+2)/2-1-\frac{1}{\gamma+1}} e^{-a\tau^{-(\gamma+1)}z} dz.$$

Після заміни $z = a^{-1}\tau^{\gamma+1}$ в останній рівності отримуємо

$$|J_{1,1}| \leq C \int\limits_{z_0}^{\infty} z^{(n+2)/2-1-\frac{1}{\gamma+1}} e^{-a\tau^{-(\gamma+1)}z} dz \leq C(a^{-1}\tau^{\gamma+1})^{z^{(n+2)/2-\frac{1}{\gamma+1}}}.$$

Отже, підставляючи $J_{1,1}$ в $D_x^1 Y_\alpha(t,\tau,x)_1$, одержуємо

$$\left|D_x^1 Y_{\alpha,1}(t,\tau,x)\right| \leq C a^{-\frac{n+1}{2}+\frac{1}{\gamma+1}} t^{-\alpha} e^{-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}}, \quad t > 0.$$

Далі

$$\left|D_x^1 Y_{\alpha,2}(t,\tau,x)\right| \leq$$

$$\leq C a^{1/2} t^{-\alpha} \tau^{-\frac{(n+2)(\gamma+1)}{2}+1} \int\limits_{2}^{\infty} e^{-c(\tau\lambda)^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \lambda^{-\frac{(n+2)(\gamma+1)}{2}} e^{-a\tau^{-(\gamma+1)}\lambda^{-(\gamma+1)}} d\lambda =$$

$$= |\theta = \tau\lambda| = C a^{1/2} t^{-\alpha} \int\limits_{2\tau}^{\infty} e^{-c\theta^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \lambda^{-\frac{(n+2)(\gamma+1)}{2}} e^{-a\theta^{-(\gamma+1)}} d\theta \leq$$

$$\leq C t^{-\alpha} e^{-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{1}{1-\alpha}}} \int\limits_{2\tau}^{\infty} \theta^{-\frac{(n+2)(\gamma+1)}{2}} e^{-a\theta^{-(\gamma+1)}} d\theta.$$

Тоді

$$\left|D_x^1 Y_{\alpha,2}(t,\tau,x)\right| \leq C t^{-\alpha} e^{-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{1}{1-\alpha}}} \int\limits_{0}^{\infty} \theta^{-\frac{(n+2)(\gamma+1)}{2}} e^{-a\theta^{-(\gamma+1)}} d\theta.$$

В останній рівності виконаємо заміну $\theta = a^{\frac{1}{\gamma+1}} y$ й отримаємо

$$\left|D_x^1 Y_{\alpha,2}(t,\tau,x)\right| \leq C t^{-\alpha} a^{-\frac{(n+2)}{2}+\frac{1}{\gamma+1}} e^{-c_1\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \int\limits_{0}^{\infty} y^{-\frac{(n+2)(\gamma+1)}{2}} e^{-y^{-(\gamma+1)}} dy.$$

Інтеграл в останній нерівності є сталою, тому

$$\left|D_x^1 Y_{\alpha,2}(t,\tau,x)\right| \leq C a^{-\frac{(n+1)}{2}+\frac{1}{\gamma+1}} t^{-\alpha} e^{-c\tau^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}}, \quad t > 0.$$

Звідси випливає потрібний результат.

Аналогічно встановлюється оцінка (23).

Встановимо оцінку (24) для дробової похідної по t. За своєю побудовою функція $Y_\alpha(t,\tau,x)$ задовольняє рівняння (18) при $\psi \equiv 0$ в класичному сенсі. Тому $D_{*,t}^{\beta}$ збігається майже скрізь з правою частиною рівняння (18) і не вимагає окремого дослідження.

Теорема 5.2 (про існування розв'язку для неоднорідного рівняння). *Нехай*: 1) *функція* ψ *обмежена і неперервна*; 2) $g \in C^2$ *по* x *при кожному* t; 3) *функції* g *та* $\partial_{x_i} g$, $i = 1, \ldots, n$, *належать* $B(0 < t < T)$; 4) $|g(s, \xi)| \leq A(s)$, *де* $A \in L^1(0, \infty)$. *Тоді розв'язок* (20) *задачі Коші* (18) *існує в класичному сенсі.*

Доведення. Розв'язок $v(t, x)$ задачі Коші (18) пов'язаний із розв'язком $u(t, x)$ задачі (16) формулою субординації

$$v(t, x) = \int\limits_0^\infty \varphi_{t,\alpha}(\theta) u(\theta, x)\, d\theta.$$

Властивості гладкості розв'язку $u(t, x)$ встановлено в лемі 4.1. При цьому із зображення $u(t, x)$ через функцію Гріна $Z_{(0)}$ і тотожності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_{(0)}(t, \tau, x)\, dx = 1$$

(див. [3]) випливає, що

$$|u(t, x)| \leq \int\limits_0^t A(s)\, ds \leq \text{const}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n.$$

Тому субординальний розв'язок $v(t, x)$ існує і має ті ж властивості гладкості, що й $u(t, x)$.

Література

1. M. Bologna, B. J. West, P. Grigolini, *Renewal and memory origin of anomalous diffusion: a discussion of their joint action*, Phys. Rev. E, **88**, Article 062106 (2013).
2. M. Bologna, A. Svenkeson, B. J. West, P. Grigolini, *Diffusion in heterogeneous media: an iterative scheme for finding approximate solutions to fractional differential equations with time-dependent coefficients*, J. Comput. Phys., **293**, 297 – 311 (2015).
3. K. Kim, K. Lee, *On the heat diffusion starting with degeneracy*, J. Different. Equat., **262**, 2722 – 2744 (2017).
4. S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei, *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*, Birkhäuser, Basel (2004).
5. A. Friedman, Z. Schuss, *Degenerate evolution equation in Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc., **161**, 401 – 427 (1971).
6. M. L. Gorbachuk, N. I. Pivtorak, *Solutions of evolution equations of parabolic type with degeneration*, Different. Equat., **21**, 892 – 897 (1985).
7. M. G. Hahn, K. Kobayashi, S. Umarov, *Fokker – Planck – Kolmogorov equations associated with time-changed fractional Brownian motion*, Proc. Amer. Math. Soc., **139**, 691 – 705 (2011).
8. E. G. Bazhlekova, *Subordination principle for fractional evolution equations*, Fract. Calc. and Appl. Anal., **3**, 213 – 230 (2000).
9. R. Gorenflo, F. Mainardi, *On the fractional Poisson process and the discretized stable subordinator*, Axioms, **4**, 321 – 344 (2015).
10. M. M. Meerschaert, H.-P. Scheffler, *Triangular array limits for continuous time random walks*, Stochastic Process. and Appl., **118**, 1606 – 1633 (2008).
11. M. M. Meerschaert, P. Straka, *Inverse stable subordinators*, Math. Model. Nat. Phenom., **8**, 1 – 16 (2013).
12. A. N. Kochubei, *Fractional-parabolic systems*, Potential Anal., **37**, 1 – 30 (2012).

Одержано 10.10.20