DOI: 10.37863/umzh.v73i3.6337

УДК 517.9

О. Л. Ребенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЗВ'ЯЗОК ДЕЯКИХ ПІДХОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ КІРКВУДА – ЗАЛЬЦБУРГА

This work is almost a review describing the solutions of Kirkwood – Salzburg equations for correlation functions of a large canonical ensemble. We establish analytical relations between Ruelle's operator approach described in detail in [*Статистическая механика. Строгие результаты*, Мир, Москва (1971)] and the approach by Minlos and Poghosyan presented in [*Оценки функций Урселла, групповых функций и их производных*, Теор. и мат. физика, **31**, № 2, 199 – 213 (1977)]. Using methods of infinite-dimensional analysis, we suggest a more transparent description of the main results.

Робота має напівоглядовий характер опису розв'язків рівнянь Кірквуда – Зальцбурга для кореляційних функцій великого канонічного ансамблю. Встановлено аналітичний зв'язок між операторним підходом Д. Рюеля, який детально описано у гл. 4 монографії [*Статистическая механика. Строгие результаты*, Мир, Москва (1971)], і підходом, запропонованим Р. А. Мінлосом і С. К. Погосяном у роботі [*Оценки функций Урселла, групповых функций и их производных*, Теор. и мат. физика, **31**, № 2, 199 – 213 (1977)]. На основі методів нескінченновимірного аналізу наведено більш прозорий опис основних результатів.

1. Вступ. Рівняння Кірквуда – Зальцбурга та їхні розв'язки достатньо детально висвітлені у роботах Рюеля [1, 3] для кореляційних функцій великого канонічного ансамблю та роботі М. М. Боголюбова, Д. Я. Петрини, Б. І. Хацета [4] для кореляційних функцій канонічного ансамблю, яка узагальнила роботу [5] (детальніше див. у [6]). У цих роботах рівняння Кірквуда – Зальцбурга розглядались як операторні рівняння в банаховому просторі. Роботу [2] присвячено оцінкам функцій Урселла, групових функцій та їхніх похідних. Але паралельно розв'язки системи рівнянь Кірквуда – Зальцбурга розглядаються як інтеграли за мірою Лебега – Пуассона на просторі конфігурацій від деякого ядра, яке в свою чергу задовольняє певне рекурентне співвідношення і має вигляд скінченного кластерного ряду. Кожний член цього ряду можна записати за допомогою внесків так званих графів-лісів, зв'язними компонентами яких є графи-дерева. Побудований таким чином розклад можна отримати з розкладу Майєра, застосувавши відому процедуру Пенроуза [7] (див. також [8], пп. 4.1 або [9], п. 5). Проте варто зауважити, що до такого ж самого результату приводить і алгебраїчний метод Рюеля (див. [1], пп. 4.4).

Основна мета цієї роботи полягає в більш детальному висвітленні підходу Мінлоса – Погосяна і встановленні зв'язку з операторним підходом Рюеля. Отримано формулу, яка визначає кількість графів-лісів для заданого ядра. Використання деяких елементарних формул нескінченновимірного аналізу допомагає записувати громіздкі аналітичні вирази в елегантному вигляді і дозволяє спростити викладки. Опишемо коротко будову роботи. У другому пункті введено необхідні позначення та визначення основних величин, а також необхідні і достатні умови для потенціалу взаємодії між частинками. У третьому пункті виведено рівняння Кірквуда – Зальцбурга і записано їхні розв'язки.

2. Про деякі математичні поняття. Будемо розглядати нескінченну систему тотожних точкових частинок у просторі $\mathbb{R}^d$, взаємодію яких будемо описувати парним потенціалом $V_2(x,y) = \phi(|x-y|),\ x,y \in \mathbb{R}^d,\ d \in \mathbb{N}.$

2.1. Простори конфігурацій. Нехай σ — міра Лебега в $\mathbb{R}^d$. Позначимо через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ борелівську σ-алгебру відкритих множин в $\mathbb{R}^d$, а через $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ всі підмножини, що мають компактне замикання. *Конфігураційний простір* $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{R}^d}$ буде складатися з усіх локально скінченних підмножин простору $\mathbb{R}^d$, тобто

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \;\middle|\; |\gamma \cap \Lambda| < \infty \ \text{ для всіх } \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\}, \tag{2.1}$$

де $|A|$ — число, що визначає кількість точок у множині A. Визначення (2.1) досить природне з точки зору фізики, оскільки в обмеженому об'ємі не може знаходитися нескінченна кількість частинок.

Позначимо множину всіх скінченних конфігурацій простору Γ через Γ_0. Насправді Γ_0 є підмножиною Γ, але вона буде розглядатись як самостійний конфігураційний простір, в якому незалежним чином можна ввести свою топологію. Визначимо спочатку конфігураційний простір із фіксованою кількістю точок:

$$\Gamma^{(n)} = \Gamma_0^{(n)} := \left\{ \gamma \in \Gamma \mid |\gamma| = n, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \Gamma^{(0)} := \varnothing.$$

Якщо всі такі конфігурації знаходяться в деякій обмеженій множині $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, то відповідний простір

$$\Gamma_\Lambda^{(n)} := \left\{ \gamma \in \Gamma^{(n)} \mid \gamma \subset \Lambda \right\}.$$

Тоді простори скінченних конфігурацій в $\mathbb{R}^d$ і в $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ можна записати у вигляді диз'юнктивних об'єднань:

$$\Gamma_0 := \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)} \qquad \text{і} \qquad \Gamma_\Lambda := \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma_\Lambda^{(n)}.$$

Для більш глибокого розуміння топологічної структури введених просторів варто звернутися до огляду [10], де наведено повний перелік необхідних посилань.

2.2. Міри на просторах конфігурацій неперервних систем. Згідно з ідеями Гіббса фізичний стан системи описується ймовірнісною мірою, яка будується спочатку в деякому обмеженому об'ємі простору $\mathbb{R}^d$ в залежності від ансамблю (мікроканонічного, канонічного або великого канонічного), що розглядається для конкретної задачі, і подальшому граничному термодинамічному переході. Ми будемо розглядати системи статистичної механіки в рамках великого канонічного ансамблю і почнемо з системи невзаємодіючих точкових частинок (*ідеальний газ*).

Стан ідеального газу в рівноважній статистичній механіці описується мірою *Пуассона* $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ, де $z > 0$ — активність (фізичний параметр, який пов'язаний з густиною частинок у системі). Міру $\pi_{z\sigma}$ з мірою інтенсивності $z\sigma$ визначимо нижче. Для цього спочатку введемо так звану міру *Лебега – Пуассона* (див., наприклад, [11]) $\lambda_{z\sigma} = \lambda_{z\sigma}^{\Lambda}$ на просторі скінченних конфігурацій Γ_Λ, $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ (або Γ_0) за формулою

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_\Lambda \ldots \int_\Lambda F(\{x_1, \ldots, x_n\}) \sigma(dx_1) \ldots \sigma(dx_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_\Lambda \ldots \int_\Lambda F_n(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \tag{2.2}$$

для всіх вимірних функцій $F = \{F_n\}_{n\geq 0},\ F_n \in L^{\infty}(\Lambda^n)$ (або $F_n \in L^1(\mathbb{R}^{dn})$). За допомогою міри $\lambda_{z\sigma}$ побудуємо сім'ю ймовірнісних мір

$$\pi^{\Lambda}_{z\sigma} := e^{-z\sigma(\Lambda)}\lambda^{\Lambda}_{z\sigma}, \quad \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d). \tag{2.3}$$

Легко переконатись, використавши визначення (2.2), що сім'я (2.3) є попарно узгодженою і за теоремою Колмогорова (див., наприклад, [12]) існує єдина ймовірнісна міра $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ.

На мові інтегралів за мірою $\lambda_{z\sigma}$ наведемо важливу тотожність, яку буде використано нижче.

Лема 2.1. *Для всіх вимірних функцій* $G\colon \Gamma_0 \mapsto \mathbb{R}$ *і* $H : \Gamma_0 \times \Gamma_0 \mapsto \mathbb{R}$, *для яких* $G(\xi \cup \cup\, \gamma)H(\xi,\gamma) \in L^1(\Gamma_0 \times \Gamma_0, \lambda_\sigma \otimes \lambda_\sigma)$, *справджується рівність*

$$\int\limits_{\Gamma_0} G(\gamma)\sum_{\xi\subseteq\gamma} H(\xi,\gamma\setminus\xi)\lambda_\sigma(d\gamma) = \int\limits_{\Gamma_0}\int\limits_{\Gamma_0} G(\xi\cup\gamma)H(\xi,\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma)\lambda_\sigma(d\xi). \tag{2.4}$$

Доведення. Нехай $\xi \restriction \Gamma_0^{(k)} = \{x_1,\ldots,x_k\} := \{x\}_1^k,\ \gamma \restriction \Gamma_0^{(m)} = \{x_{k+1},\ldots,x_{k+m}\} := \{x\}_{k+1}^{k+m}$. Тоді

$$\int\limits_{\Gamma_0}\int\limits_{\Gamma_0} G(\xi\cup\gamma)H(\xi,\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma)\lambda_\sigma(d\xi) =$$

$$= \sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{1}{k!m!}\int\limits_{\mathbb{R}^{dk}}\int\limits_{\mathbb{R}^{dm}} G(\{x\}_1^{k+m})H\big(\{x\}_1^k,\{x\}_{k+1}^{k+m}\big)\sigma(dx)^{k+m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^{dn}} G(\{x\}_1^{n})H\big(\{x\}_1^k,\{x\}_{k+1}^{n}\big)\sigma(dx)^{n} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_0} G(\gamma)\sum_{\xi\subseteq\gamma} H(\xi,\gamma\setminus\eta)\lambda_\sigma(d\gamma).$$

2.3. Взаємодія між частинками. Будемо розглядати двочастинкову взаємодію, яка описується потенціалом $V_2(x,y) = \phi(|x-y|),\ \phi(0) = +\infty$. Для довільної конфігурації $\gamma \in \Gamma_0$ енергія взаємодії частинок конфігурації $U(\gamma)$ є такою:

$$U(\gamma) = U_\phi(\gamma) := \sum_{\{x,y\}\subset\gamma}\phi(|x-y|), \tag{2.5}$$

а взаємодія $W(\eta;\gamma)$ частинок конфігурації $\eta\in\Gamma_0$ з частинками конфігурації $\gamma\in\Gamma_0$ —

$$W(\eta;\gamma) := \sum_{\substack{x\in\eta\\ y\in\gamma}}\phi(|x-y|). \tag{2.6}$$

На потенціал взаємодії накладемо умови **(A)**:

1) *умову стійкості*

$$U(\gamma) \geq -B|\gamma|, \qquad B\geq 0, \quad \gamma\in\Gamma_0, \tag{2.7}$$

2) *умову регулярності*

$$C(\beta) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} dx |e^{-\beta\phi(|x|)} - 1| < +\infty, \quad \beta = \frac{1}{kT}. \tag{2.8}$$

2.4. Кореляційні функції. В основі досліджень рівноважних систем статистичної механіки лежить опис середніх значень спостережуваних величин, які є функціями на просторі конфігурацій Γ і обчислюються за мірою Гіббса. Міра Гіббса систем в обмеженому об'ємі Λ у великому канонічному ансамблі має вигляд

$$\mu_\Lambda(d\gamma) = \frac{1}{\Xi_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \qquad \Xi_\Lambda = \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{2.9}$$

Умова (2.7) забезпечує збіжність інтеграла в (2.9), бо

$$\int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma) \leq \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{\beta B|\gamma|} \lambda_{z\sigma}(d\gamma) = e^{z e^{\beta B} \sigma(\Lambda)}.$$

Фізичні спостережувані є функціями на просторі конфігурацій Γ. Вони, як правило, мають *суматорну* форму $F(\gamma) = \sum_{\eta \Subset \gamma} H(\eta)$ (див., наприклад, енергію (2.5)). Тоді середнє значення такої спостережуваної величини можна записати у вигляді

$$\overline{F} = \int\limits_{\Gamma} \sum_{\eta \Subset \gamma} H(\eta) \mu(d\gamma) = \int\limits_{\Gamma_0} H(\eta) \rho(\eta) \lambda_\sigma(d\eta).$$

У цій формулі $\rho(\eta)\lambda_\sigma(d\eta)$ є кореляційною мірою і абсолютно неперервною відносно міри Лебега – Пуассона λ_σ, а відповідну похідну Радона – Нікодима називають кореляційною функцією $\rho(\eta)$. Для заданої міри Гіббса μ, яка задовольняє ДЛР-рівняння (див. [13 – 15]) або еквівалентне рівняння Рюеля (див. [16], рівняння (5.12), або детальніше [17], рівняння (18.9)), її можна записати таким чином (див. [18], лема 2.3.8, а також [19], лема 4.1):

$$\rho(\eta) = z^{|\eta|} \int\limits_{\Gamma} e^{-\beta U(\eta) - \beta W(\eta;\gamma)} \mu(d\gamma). \tag{2.10}$$

У випадку обмеженого об'єму, враховуючи (2.9), її можна записати у вигляді

$$\rho_\Lambda(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{\Xi_\Lambda} \int\limits_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma).$$

За визначенням кореляційні функції є щільностями кореляційної міри. М. М. Боголюбов [20] називав їх m-частинковими $((m = |\eta|)$ функціями розподілу.

Основною проблемою подальших досліджень є побудова граничних об'єктів (при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$) для заданих потенціалів взаємодії. Безпосереднє обчислення інтеграла (2.10) за мірою Гіббса на множині конфігурацій Γ є важкою задачею навіть у випадку, коли для заданої взаємодії доведено існування міри Гіббса. Тому потрібно спочатку будувати кореляційні функції на скінченних конфігураціях обмежених об'ємів $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, а потім виконувати термодинамічний граничний перехід $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$. Існують два потужних методи вирішення цієї проблеми. Це побудова кластерних розкладів для кореляційних функцій, визначених для обмежених Λ, і почленний перехід до нескінченного об'єму, або вивід деяких рівнянь для кореляційних функцій (ρ_Λ або ρ) і запис їхніх розв'язків у вигляді, який дозволяє виконати термодинамічний граничний перехід. Ми почнемо з рівнянь Кірквуда – Зальцбурга. Але, на відміну від найбільш поширеного викладу (див. [1], гл. 4), скористаємося методом розв'язання цих рівнянь, який був запропонований Р. А. Мінлосом і С. К. Погосяном у роботі [2]. Визначимо для цього деякі нові функціонали:

$$\rho_j(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{\Xi_j} \int\limits_{\Gamma_0} e_\lambda(j; \eta \cup \gamma) e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{2.11}$$

де

$$\Xi_j = \int\limits_{\Gamma_0} e_\lambda(j; \gamma) e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma),$$

і функціонал $e_\lambda(j; \gamma)$,

$$e_\lambda(j; \eta) := \begin{cases} 1, & \eta = \varnothing, \\ \prod_{x \in \eta} j(x), & \eta \in \Gamma_0 \setminus \{\varnothing\}, \end{cases} \tag{2.12}$$

$j : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$ — обмежена (для простоти візьмемо $j \leq 1$), неперервна, невід'ємна, фінітна функція. Позначення правої частини (2.12) через $e_\lambda(j; \gamma)$ мотивоване тим, що для цього вектора в $L^2(\Gamma_0, \lambda_\sigma)$ виконуються співвідношення

$$\|e_\lambda(j; \cdot)\|^2_{L^2(\Gamma_0, \lambda_\sigma)} = e^{\|j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d, \sigma)}},$$

$$\int\limits_{\Gamma_0} e_\lambda(j; \eta) \lambda_\sigma(d\eta) = e^{\langle j > \rangle_\sigma} = e^{\int_{\mathbb{R}^d} j(x)\sigma(dx)},$$

а в застосуваннях до опису квантових станів систем взаємодіючих бозонів ці вектори описують **когерентні стани** (див., наприклад, [21], гл. 2, розд. 2, для випадку простору Фока).

Якщо $j = \mathbb{1}_\Lambda$ (індикатор множини Λ), то вираз (2.11) збігається з виразом для кореляційних функцій в обмеженому об'ємі Λ з порожніми граничними розподілами. Достатньою умовою існування кореляційних функцій (2.11) є умова стійкості (див. формулу (2.7)). Ця умова дозволяє отримати оцінки

$$1 \leq \Xi_j \leq \exp\left\{ z e^{\beta B} \int\limits_{\mathbb{R}^d} j(x) dx \right\}, \tag{2.13}$$

$$0 \leq \rho_\Lambda(\eta) \leq \Xi_j^{-1} \exp\left\{ z e^{\beta B} \int\limits_{\mathbb{R}^d} j(x) dx \right\}. \tag{2.14}$$

Але на підставі оцінки (2.14) не можна зробити висновок, що послідовність функцій $\rho_\Lambda(\eta)$ має термодинамічну границю $j \to 1$, яка еквівалентна граничному переходу $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$.

3. Рівняння Кірквуда – Зальцбурга. ***3.1. Вивід рівнянь Кірквуда – Зальцбурга.*** Потрібно отримати рівняння для функцій ρ і знайти їхній розв'язок. Знайдемо спочатку такі рівняння для функцій ρ_j, тобто у скінченному об'ємі, який збігається з носієм функції j. Виділимо для цього в конфігурації η деяку точку $x \in \eta$ і введемо позначення $\eta^{(\hat{x})} := \eta \setminus \{x\}$. Тоді вираз (2.11) набере вигляду

$$\rho_j(\eta) = z^{|\eta|} \frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{\Xi_j} j(x) \int\limits_{\Gamma_0} e_\lambda\big(j; \eta^{(\hat{x})} \cup \gamma\big) e^{-\beta W(x;\gamma)} e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{3.1}$$

Поки що точка $x \in \eta$ є довільною, але пізніше ми повернемось до її вибору. Скористаємося тим, що у випадку парного потенціалу взаємодії енергія взаємодії двох конфігурацій задається формулою (2.6). Тоді експоненту в (3.1) можна записати у вигляді

$$e^{-\beta W(x;\gamma)} = \prod_{y \in \gamma} \Big[(e^{-\beta \phi(|x-y|)} - 1) + 1 \Big].$$

Далі, для довільної неперервної функції $\varphi \in C(\mathbb{R}^d)$ і довільного $\gamma \in \Gamma_0$ справедливою є проста комбінаторна формула

$$\prod_{y \in \gamma} [1 + \varphi(y)] = \sum_{\xi \subseteq \gamma} \prod_{y \in \xi} \varphi(y).$$

Введемо позначення

$$K(x;\xi) := \begin{cases} \prod_{y \in \xi} (e^{-\beta \phi(|x-y|)} - 1), & |\xi| \geq 1, \\ 1, & \xi = \varnothing. \end{cases}$$

Тоді вираз (3.1) набере вигляду

$$\rho_j(\eta) = z^{|\eta|} \frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{\Xi_j} j(x) \int\limits_{\Gamma_0} \sum_{\xi \subseteq \gamma} K(x;\xi) e_\lambda\big(j; \eta^{(\hat{x})} \cup \gamma\big) e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{3.2}$$

Врахувавши, що завдяки умовам (2.7), (2.8)

$$\int\limits_{\Gamma_0} \int\limits_{\Gamma_0} e_\lambda\big(j; \eta^{(\hat{x})} \cup \gamma \cup \xi\big) e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \gamma \cup \xi)} |K(x;\xi)| \lambda_{z\sigma}(d\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\xi) \leq$$

$$\leq e^{\beta B |\eta^{(\hat{x})}|} e^{z e^{\beta B} [\int j(y) dy + C(\beta)]},$$

застосуємо до правої частини (3.2) рівність (2.4) (лема 2.1) з

$$G(\gamma) = e_\lambda(j; \eta^{(\hat{x})} \cup \gamma) e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \gamma)},$$

$$H(\xi, \gamma \setminus \xi)) = K(x;\xi) \equiv K(x;\xi) \mathbb{1}_{\Gamma_0}(\gamma \setminus \xi).$$

Тоді

$$\rho_j(\eta) = z^{|\eta|} \frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{\Xi_j} j(x) \int\limits_{\Gamma_0} \int\limits_{\Gamma_0} K(x;\xi) \times$$

$$\times e_\lambda\big(j;\eta^{(\hat{x})}\cup\gamma\cup\xi\big)e^{-\beta U\left(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi\cup\gamma\right)}\lambda_{z\sigma}(d\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\xi).$$

Використавши означення кореляційного функціонала (2.11), отримаємо остаточне співвідношення

$$\rho_j(\eta)=ze^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}j(x)\int\limits_{\Gamma_0}K(x;\xi)\rho_j(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi)\lambda_\sigma(d\xi),\quad |\eta|\ge 1,$$

$$\rho_j(\varnothing)=1. \tag{3.3}$$

В останньому інтегралі було використано рівність

$$\int\limits_{\Gamma_0}z^{-|\xi|}f(\xi)\lambda_{z\sigma}(d\xi)=\int\limits_{\Gamma_0}f(\xi)\lambda_\sigma(d\xi),$$

яка випливає з означення інтеграла за мірою Лебега – Пуассона.

Формально таке саме рівняння можна записати і для нескінченної системи в усьому просторі $\mathbb{R}^d$:

$$\rho(\eta)=ze^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}\int\limits_{\Gamma_0}K(x;\xi)\rho(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi)\lambda_\sigma(d\xi). \tag{3.4}$$

***Зауваження* 3.1.** Функція $\rho(\eta)=\rho(\{x_1,\ldots,x_{|\eta|}\})$ є симетричною функцією своїх змінних. Тому у правій частині рівності (3.3), в якій змінна x є виділеною, інваріантність відносно перестановки змінної x з будь-якою іншою змінною конфігурації η є „прихованою”.

***3.2. Розв'язання рівняння* (3.3).** Будемо шукати розв'язок рівняння (3.3) у вигляді

$$\rho_j(\eta)=e_\lambda(j;\eta)\int\limits_{\Gamma_0}T(\eta|\gamma)e_\lambda(j;\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma), \tag{3.5}$$

де $e_\lambda(j;\eta)$ визначено формулою (2.12), а $T(\eta\mid\gamma)$ — вимірна функція на $\Gamma_0\times\Gamma_0$, яка повинна бути λ_σ-інтегровною за змінною γ. Функцію $T(\eta\mid\gamma)$ будемо називати *ядром Урселла*, а розклад (3.5) є фактично іншим зображенням розкладів Майєра для кореляційних функцій (див. [1], гл. 4).

Для оптимальної оцінки експоненти перед інтегралом у (3.3) необхідно вибрати змінну $x\in\in\eta$, яку ми виділили в розкладі енергії $U(\eta\cup\gamma)$ у правій частині виразу (3.1). Для потенціалів, що задовольняють умову стійкості, кожна конфігурація $\eta\in\Gamma_0$ обов'язково містить точку, для якої $W(x;\eta\setminus\{x\})\ge -2B$ (доведення від супротивного). Нехай π — відображення, яке відображає конфігурацію η в таку точку, тобто

$$W\big(\pi(\eta);\eta\setminus\{\pi(\eta)\}\big)\ge -2B. \tag{3.6}$$

Підставимо в рівняння (3.3) відповідні вирази функцій $\rho_j(\eta))$ і $\rho_j(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi)$ і застосуємо до правої частини формулу (2.4) з $G(\gamma\cup\xi)=e_\lambda(j;\gamma\cup\xi)$ і $H(\xi,\gamma)=K(\pi(\eta);\xi)T(\eta\setminus\{\pi(\eta)\}\cup\xi|\gamma)$. Внаслідок того, що рівність інтегралів у правій і лівій частинах рівності (3.3) виконується при довільних функціях $j\in C_0(\mathbb{R}^d)$, ми можемо прирівняти підінтегральні вирази. В результаті отримаємо співвідношення

$$T(\eta \mid \gamma) = ze^{-\beta W(\pi(\eta);\eta\setminus\{\pi(\eta)\})} \sum_{\xi\subseteq\gamma} K(\pi(\eta);\xi) T(\eta \setminus \{\pi(\eta)\} \cup \xi | \gamma \setminus \xi) \tag{3.7}$$

та дві додаткові умови, які є наслідком того, що $\rho_j(\varnothing) = 1$:

$$T(\varnothing|\varnothing) = 1, \qquad T(\varnothing|\gamma) = 0, \quad \text{якщо} \quad \gamma \neq \varnothing. \tag{3.8}$$

Можна також накласти *умову несумісності перетинних конфігурацій*:

$$T(\eta \mid \gamma) = 0, \quad \text{якщо} \quad \gamma \cap \eta \neq \varnothing. \tag{3.9}$$

Зауважимо, що ця умова автоматично виконується, якщо потенціал взаємодії $\phi(0) = +\infty$. Співвідношення (3.7) збігається з рекурентним співвідношенням (4.26) у пункті 4 роботи [1]. Рекурентність співвідношення (3.7) за кількістю змінних $|\eta| + |\gamma|$ забезпечує єдиність його розв'язку. Але щоб довести існування розв'язків рівняння (3.3), потрібно мати λ_σ-інтегровність ядер $T(\eta \mid \gamma)$ за змінною γ.

Побудуємо для цього нові ядра, які проіндексуємо деяким числом h і деякою обмеженою інтегровною додатною функцією $\nu(x) \colon \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$. Нехай таке ядро $Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma)$ однозначно визначається рекурентним співвідношенням

$$Q_{h,\nu}(\eta|\gamma) = h \sum_{\xi\subseteq\gamma} K_\nu(\pi(\eta);\xi) Q_{h,\nu}(\eta \setminus \{\pi(\eta)\} \cup \xi|\gamma \setminus \xi), \quad |\eta| \geq 1, \tag{3.10}$$

де

$$K_\nu(x;\xi) := \begin{cases} \prod_{y\in\xi} \nu(x), & \\ 1, & \xi = \varnothing, \end{cases}$$

і задовольняє умови (3.8), (3.9):

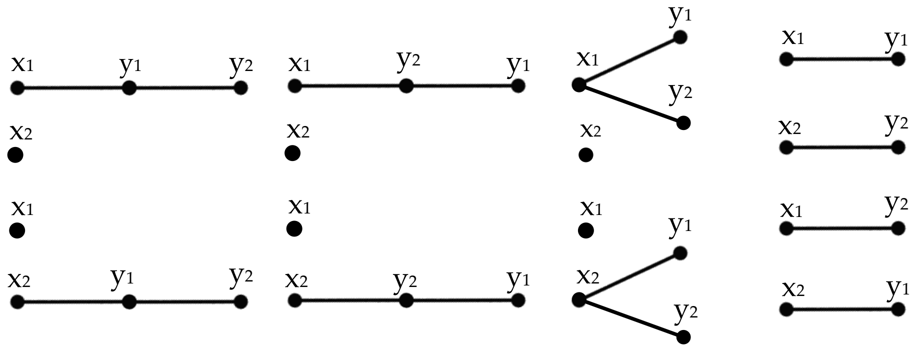
$$Q_{h,\nu}(\varnothing|\varnothing) = 1, \qquad Q_{h,\nu}(\varnothing|\gamma) = 0, \quad \text{якщо} \quad \gamma \neq \varnothing,$$
$$Q_{h,\nu}(\eta|\gamma) = 0, \quad \text{якщо} \quad \gamma \cap \eta \neq \varnothing.$$

Для довільних конфігурацій $\eta = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ і $\gamma = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ таких, що $\eta\cap\gamma = \varnothing$, розв'язок рекурентного співвідношення (3.10) можна записати у вигляді

$$Q_{h,\nu}(\eta|\gamma) = \sum_{f\in\mathfrak{F}_{\eta,\gamma}} G(f), \tag{3.11}$$

де $\mathfrak{F}_{\eta,\gamma}$ — множина внесків спеціальних графів-лісів. *Граф-ліс* f — неорієнтований граф, зв'язними компонентами якого є *графи-дерева* з вершинами, які є точками конфігурації $\eta \cup \gamma$, причому кожне дерево містить одну і тільки одну вершину з конфігурації η, яка є коренем відповідного дерева. Інколи дерево може складатись лише з однієї цієї вершини. Аналітичним внеском кожної вершини є константа h, а лініям-ребрам, що з'єднують вершини $x \in \eta$ і $y \in \gamma$ або $y_1 \in \gamma$ і $y_2 \in \gamma$, будуть відповідати функції $\nu(x - y)$ або $\nu(y_1 - y_2)$ (див. рисунок).

На рисунку наведено приклади графів-лісів із розкладу ядра $\mathfrak{F}_{\eta,\gamma}$ для випадку $\eta = \{x_1, x_2\}$ і $\gamma = \{y_1, y_2\}$ (усього графів-лісів для цього ядра $N_n(l) = 8$, де $n = |\gamma| = 2,\ l = |\eta| = 2$). Внесок кожного графа-лісу $f \in \mathfrak{F}_{\eta,\gamma}$ має вигляд



$$G(f) = h^{|\eta|+|\gamma|} \prod_{(x,y)\in E(f)} \nu(x-y), \tag{3.12}$$

де $E(f)$ — множина всіх ребер графа. Внаслідок того, що кожна точка $x \in \eta$ є кореневою вершиною дерева, кількість ребер у кожному графі-лісі буде збігатися з кількістю змінних $y \in \gamma$, тобто $n = |\gamma|$. Структура дерева і графа-лісу дозволяє записати рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{dn}} \left(\prod_{(x,y)\in E(f)} \nu(x-y) \right) dy_1 \ldots dy_n = (C_\nu)^n, \quad C_\nu = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \nu(y)dy, \tag{3.13}$$

яку легко отримати послідовним інтегруванням за змінною $y \in \gamma$, починаючи з кінцевих вершин графа f. Для того щоб довести λ_σ-інтегровність ядра $Q(\eta;\gamma)$ за змінною γ, потрібно знати кількість графів-лісів для заданих значень змінних η, γ. Цю кількість встановлює така лема.

Лема 3.1. *Кількість графів-лісів у виразі* (3.11), *який є розв'язком рекурентного співвідношення* (3.10) *із заданими значеннями* $n = |\gamma|$, $l = |\eta|$, *виражається формулою*

$$N_n(l) = l(l+n)^{n-1}, \quad n \geq 0. \tag{3.14}$$

Доведення. Розклад рекурентного співвідношення (3.10) свідчить, що $N_n(l)$ задовольняє те ж співвідношення

$$N_n(l) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N_{n-k}(l+k-1). \tag{3.15}$$

За індукцією по індексу $l+n$ будемо вважати, що формула (3.14) справджується для $N_{n-k}(l+$ $+k-1)$ при $k = 0, 1, \ldots, n$. Тоді, підставивши у праву частину (3.14) значення $N_{n-k}(l+k-1) =$ $= (l+k-1)(l+n-1)^{n-k-1}$, отримаємо рівність

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (l+k-1)(l+n-1)^{n-k-1} = M_1 + M_2, \tag{3.16}$$

де

$$M_1 := l \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (l+n-1)^{n-k-1} =$$

$$= l(l+n-1)^{-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(l+n-1)^{n-k} = l(l+n-1)^{-1}(l+n)^n,$$

а

$$M_2 := \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-1)(l+n-1)^{n-k-1} =$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(l+n-1)^{n-k-1} - (l+n-1)^{-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(l+n-1)^{n-k} =$$

$$= n(l+n-1)^{-1}(l+n)^{n-1} - (l+n-1)^{-1}(l+n)^n =$$

$$= -l(l+n-1)^{-1}(l+n)^{n-1}.$$

В результаті $M_1 + M_2 = l(l+n)^{n-1}$, що й завершує доведення.

Проведений аналіз властивостей ядер $Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma)$ (формули (3.11)–(3.16)) дозволяє сформулювати таку лему.

Лема 3.2. *Нехай* $|j(x)| \le 1,\ x \in \mathbb{R}^d$ *і*

$$hC_\nu e < 1,$$

тоді

$$\int_{\Gamma_0} Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma) e_\lambda(j;\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma) \le (eh)^{|\eta|}(1 - hC_\nu e)^{-1}.$$

Доведення. За означенням інтеграла Лебега–Пуассона (2.2)

$$\int_{\Gamma_0} Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma) e_\lambda(j;\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^{dn}} Q_{h,\nu}(\eta \mid \{y_1,\ldots,y_n\})\prod_{y\in\gamma} j(y)dy_1\ldots dy_n.$$

Врахувавши (3.11)–(3.13), отримаємо нерівність

$$\int_{\Gamma_0} Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma) e_\lambda(j;\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma) \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{N_n(|\eta|)}{n!}h^{|\eta|+n}C_\nu^n.$$

Завершує доведення оцінка

$$\frac{N_n(|\eta|)}{n!} = \frac{l(l+n)^{n-1}}{n!} < \frac{l(l+n)^{n-1}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \frac{l}{l+n}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}e^n\left(1+\frac{l}{n}\right)^n < e^{l+n},$$

в якій ми позначили $|\eta| = l$, врахували лему 3.1 і скористались формулою Стірлінга.

Інтегровність ядра $T(\eta \mid \gamma)$ забезпечує інтегровність ядра $Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma)$. Це випливає з такої леми.

Лема 3.3. *Нехай параметри* $\beta > 0,\ z > 0$ *і потенціал взаємодії* ϕ *такі, що*

$$ze^{2\beta B} \le h, |e^{-\beta\phi(|x|)} - 1| \le \nu(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

тоді

$$|T(\eta \mid \gamma)| \le Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma). \tag{3.17}$$

Доведення. Внаслідок (3.6) із рекурентного співвідношення (3.7) випливає, що

$$\big|T(\eta \mid \gamma)\big| \leq ze^{2\beta B} \sum_{\xi \subseteq \gamma} \big|K(\pi(\eta);\xi)\big| \big|T\big(\eta \setminus \{\pi(\eta)\} \cup \xi \mid \gamma \setminus \xi\big)\big|. \tag{3.18}$$

Тепер нерівність (3.17) встановлюється за індукцією по числу $|\eta| + |\gamma|$ з рекурентної нерівності (3.18) для ядра $T(\eta;\gamma)$ і рекурентної формули (3.10) для ядра $Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma)$.

Основним результатом цього пункту є така теорема.

Теорема 3.1. *Нехай потенціал взаємодії ϕ задовольняє умови стійкості* (2.7) *і регулярності* (2.8). *Тоді існує єдиний розв'язок рівняння Кірквуда – Зальцбурга* (3.4) *в термодинамічній границі $j \to 1$, який можна записати у вигляді інтеграла Лебега – Пуассона*

$$\rho(\eta) = \rho(\eta; z, \beta) = \int\limits_{\Gamma_0} T(\eta \mid \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma), \tag{3.19}$$

де ядра $T(\eta \mid \gamma)$, $\eta, \gamma \in \Gamma_0$, — мономи за змінною z, а інтеграл (3.19) *є збіжним за умови*

$$|z| < e^{-2\beta B - 1} C(\beta)^{-1}.$$

Аналітичний вираз ядер $T(\eta \mid \gamma) = T\big(\{x_1, \ldots, x_l\} \mid \{y_1, \ldots, y_n\}\big)$ можна записати за допомогою графів-лісів (3.11), (3.12), *але внеском кожної вершини є активність z, а кожній лінії, що з'єднує вершини x та y* (*або y та y'*), *відповідають функції $C_{xy} = e^{-\beta\phi(|x-y|)} - 1$. Крім того, потрібно записати додаткові функції Больцмана $e^{-\beta\phi(|x-y|)}$ між окремими вершинами, які не з'єднані лініями графа*

$$T(\eta|\gamma) = \sum_{f \in \mathfrak{F}_{\eta,\gamma}} G_C(f), \tag{3.20}$$

$$G_C(f) = z^{|\eta|+|\gamma|} e^{-\beta U(\eta)} e^{-\beta \widetilde{W}_f(\eta;\gamma)} \prod_{(x,y) \in E(f)} C_{xy} \prod_{(y,y') \in E(f^*) \setminus E(f)} e^{-\beta\phi(|y-y'|)}, \tag{3.21}$$

де $E(f)$ — множина всіх ліній графа f,

$$\widetilde{W}_f(\eta;\gamma) = \sum_{i=1}^{l} W\big(x_i; \widetilde{\gamma}_f(x_i)\big), \quad \widetilde{\gamma}_f(x_1) = \varnothing, \tag{3.22}$$

$$\widetilde{\gamma}_f(x_i) = \big\{y \in \gamma \mid \text{які з'єднані у графі } f \text{ з вершинами } x_1, \ldots, x_{i-1}\big\} \tag{3.23}$$

для $i > 1$, а f^* — максимальний граф, який будується з графа Келі f домальовуванням „ліній" за процедурою Пенроуза [7], *і кожній такій „лінії" співставляється фактор Больцмана $e^{-\beta\phi(|y-y'|)}$.*

Доведення ґрунтується на лемах 3.1 і 3.3 та оцінках з леми 3.2. Формули (3.21) – (3.23) і єдиність розв'язку є наслідком рекурентних співвідношень (3.7).

***Зауваження* 3.2.** Відмітимо ще одну перевагу розв'язків у вигляді (3.5). У роботі [22] таким способом було знайдено розв'язки більш складного рівняння для частково зв'язних кореляційних функцій, які описують взаємодію кластерів.

3.3. Про зв'язок з операторним методом Рюеля. В монографії [1] рівняння (3.4) записано у банаховому просторі E_ξ (див. [1], гл. 4):

$$\rho = z\hat{K}\rho + \rho_0, \rho_0(x_1) = z, \qquad \rho_0(x_1, \ldots, x_l) = 0 \quad \text{для} \quad l \geq 2.$$

Оператор $\hat{K}$ діє на функцію $f \in E_\xi$ таким чином:

$$(\hat{K}f)(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathbb{R}^{dn}} (dy)^n K(x_1; \{y_1, \ldots, y_n\}) f(y_1, \ldots, y_n),$$

$$(\hat{K}f)(x_1, \ldots, x_l) = e^{-\beta W(x_1; x_2, \ldots, x_l)} \Bigg[f(x_2, \ldots, x_l) + \tag{3.24}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathbb{R}^{dn}} (dy)^n K(x_1; \{y_1, \ldots, y_n\}) f(x_2, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_n) \Bigg].$$

Зв'язок цих двох підходів встановлює така лема.

Лема 3.4. *Для довільних* n *і* $l \leq n+1$

$$\frac{1}{(n-l+1)!} \int (dy)^{n-l+1} T\big(\{x_1, \ldots, x_l\} \mid \{y_1, \ldots, y_{n-l+1}\}\big) = z^n \big(\hat{K}^n \rho_0\big)(x_1, \ldots, x_l). \tag{3.25}$$

Доведення проведемо за індукцією. Формулу (3.25) легко перевірити для $l + n = 1, 2, 3$, використавши формули (3.7), (3.24). Позначимо ліву частину рівності (3.25) через $J_{l,n-l+1}$. Припустимо, що для довільних $k \leq n - l + 1$, що відповідає умові леми з $n - 1$ замість n і $l + k - 1$ замість l, бо $l + k - 1 < (n-1) + 1$, виконується рівність

$$\frac{1}{(n-l-k+1)!} \int (dy)^{n-l-k+1} T\big(\eta' \cup \{y'_1, \ldots, y'_k\} \mid \{y_1, \ldots, y_{n-l+1}\}\big) =$$

$$= z^{n-1} \big(\hat{K}^{n-1} \rho_0\big)\big(\eta' \cup \{y'_1, \ldots, y'_k\}\big), \tag{3.26}$$

де $\eta' = \eta \setminus \{x_1\}$, $\eta = \{x_1, \ldots, x_l\}$.

Потрібно довести рівність (3.25). Запишемо ліву частину рівності (3.25), використавши визначення інтеграла Лебега – Пуассона (2.2):

$$J_{l,n-l+1} = \int\limits_{\Gamma_0^{(n-l+1)}} T(\eta \mid \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma) = \int\limits_{\Gamma_0} \mathbb{1}_{\{\Gamma_0^{(n-l+1)}\}}(\gamma) T(\eta \mid \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma).$$

Ядро $T(\eta \mid \gamma)$ задовольняє рекурентне співвідношення (3.7) з $\pi(\eta) = x_1$, тому

$$J_{l,n-l+1} = z e^{-\beta W(x_1; \eta')} \int\limits_{\Gamma_0} \mathbb{1}_{\{\Gamma_0^{(n-l+1)}\}}(\gamma) \sum_{\xi \subseteq \gamma} K(x_1; \xi) T\big(\eta' \cup \xi \mid \gamma \setminus \xi\big) \lambda_\sigma(d\gamma).$$

Застосуємо до правої частини формулу (2.4) з $G(\gamma) = \mathbb{1}_{\{\Gamma_0^{(n-l+1)}\}}(\gamma)$ і $H(\xi, \gamma \setminus \xi) = K(x_1; \xi) T(\eta' \cup$ $\cup\, \xi \mid \gamma \setminus \xi)$. Тоді

$$J_{l,n-l+1} = ze^{-\beta W(x_1;\eta')} \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \mathbb{1}_{\{\Gamma_0^{(n-l+1)}\}}(\gamma \cup \xi) K(x_1;\xi) T(\eta' \cup \xi \mid \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma) \lambda_\sigma(d\xi) =$$

$$= ze^{-\beta W(x_1;\eta')} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \delta_{k+m,n-l+1} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{dk}} (dy')^k K(x_1;\{y'_1,\ldots,y'_k\}) \int_{\mathbb{R}^{dm}} (dy)^m T\big(\eta' \cup \{y'_1,\ldots,y'_k\} \mid \{y_1,\ldots,y_m\}\big) =$$

$$= ze^{-\beta W(x_1;\eta')} \sum_{k=0}^{n-l+1} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^{dk}} (dy')^k K\big(x_1;\{y'_1,\ldots,y'_k\}\big) \frac{1}{(n-l-k+1)!} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{d(n-l-k+1)}} (dy)^{(n-l-k+1)} T\big(\eta' \cup \{y'_1,\ldots,y'_k\} \mid \{y_1,\ldots,y_{n-l-k+1}\}\big).$$

Враховуючи (3.26), маємо

$$J_{l,n-l+1} = z^n e^{-\beta W(x_1;\eta')} \Bigg[(\hat{K}^{n-1}\rho_0)(\eta') +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-l+1} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^{dk}} (dy')^k K(x_1;\{y'_1,\ldots,y'_k\}) (\hat{K}^{n-1}\rho_0)(\eta' \cup \{y'_1,\ldots,y'_k\}) \Bigg] =$$

$$= z^n (\hat{K}^n \rho_0)(\eta). \tag{3.27}$$

Остання рівність справджується завдяки тому, що $(\hat{K}^{n-1}\rho_0)\big(\eta' \cup \{y'_1,\ldots,y'_k\}\big) = 0$ для $k > n-l+1$, і суму можна поширити до нескінченності. Тоді права частина рівності (3.27) буде збігатися з виразом дії оператора $\hat{K}$ на функцію $(\hat{K}^{n-1}\rho_0)$.

4. Висновок. У цілому робота має методологічний характер. Новими результатами є леми 3.1 і 3.4 та формули (3.20) – (3.23), які встановлюють вигляд ядра $T(\eta \mid \gamma)$.

Література

1. Д. Рюэль, *Статистическая механика. Строгие результаты*, Мир, Москва (1971).
2. Р. А. Минлос, С. К. Погосян, *Оценки функций Урселла, групповых функций и их производных*, Теор. и мат. физика, **31**, № 2, 199 – 213 (1977).
3. D. Ruelle, *Correlation functions of classical gases*, Ann. Phys., **25**, № 1, 109 – 120 (1963).
4. Н. Н. Боголюбов, Д. Я. Петрина, Б. И. Хацет, *Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля*, Теор. и мат. физика, **1**, № 2, 251 – 274 (1969).
5. Н. Н. Боголюбов, Б. И. Хацет, *О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия*, Докл. АН СССР, **66**, № 3, 321 – 324 (1949).
6. Б. И. Хацет, *Асимптотичні розклади за степенями густини функції розподілу систем у стані статистичної рівноваги*, Наук. зап. Житомир. пед. ін-ту, фіз.-мат. сер., **3**, 113 – 139 (1956).
7. O. Penrose, *Convergence of fugacity expansions for classical systems*, Statistical Mechanics: Foundations and Applications, W.A. Benjamin, Inc., New York (1967).
8. R. Fernandez, A. Procacci, *Cluster expansion for abstract polymer models. New bounds from an old approach*, Commun. Math. Phys., **274**, 123 – 140 (2007).

9. S. Ramawadh, S. J. Tate, *Virial expansion bounds through tree partition schemes*, Online preprint, arXiv: 1501.00509 [math-ph] (2015).
10. Yu. G. Kondratiev, T. Pasurek, M. Röckner, *Gibbs measures of continuous systems: an analytic approach*, Rev. Math. Phys., **24**, № 10, Article 1250026-1 (2012).
11. S. Albeverio, Y. G. Kondratiev, M. Röckner, *Analysis and geometry on configuration spaces*, J. Funct. Anal., **154**, № 2, 444 – 500 (1998).
12. K. R. Parthasarathy, *Probability measure on metric spaces. Probability and mathematical statistics*, Acad. Press, New York, London (1967).
13. Р. Л. Добрушин, *Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности*, Теор. вероятностей и ее применения, **13**, вып. 2, 201 – 229 (1968).
14. Р. Л. Добрушин, *Гиббсовские поля. Общий случай*, Функцион. анализ и прил., **3**, вып. 1, 27 – 35 (1969).
15. O. E. Lanford, D. Ruelle, *Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics*, Commun. Math. Phys., **13**, № 3, 194 – 215 (1969).
16. D. Ruelle, *Superstable interactions in classical statistical mechanics*, Commun. Math. Phys., **18**, № 2, 127 – 159 (1970).
17. Д. Я. Петрина, В. И. Герасименко, П. В. Малышев, *Математические основы классической статистической механики*, Наук. думка, Киев (1985); *англ. переклад*: Gordon and Breach, New York (1995).
18. T. Kuna, *Studies in configuration space analysis and applications*, PhD Thesis, Univ. Bonn (1999).
19. О. Л. Ребенко, В. А. Болух, *Нескінченновимірний аналіз і статистична механіка*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **11**, № 1, 257 – 315 (2014).
20. Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, Гостехиздат, Москва (1946).
21. Ю. М. Березанский, Ю. Г. Кондратьев, *Спектральные методы в бесконечномерном анализе*, Наук. думка, Киев (1988); *англ. переклад*: Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1995).
22. T. C. Dorlas, A. L. Rebenko, B. Savoie, *Correlation of clusters: partially truncated correlation functions and their decay*, J. Math. Phys., **61**, № 3, Article 033301 (2020).

Одержано 24.10.20