

ПЕРЕКЛАДАЛЬНІ АНСАМБЛІ ІНТЕРВАЛІВ

We introduce a new concept of interval rearrangement ensembles (IRE), which is a generalization of interval exchange transformations (IET). This construction expands the space of IETs in accordance with the natural duality that we pinpoint. Induction of Rauzy–Veech kind is applicable to IREs. It is conjugate to the reverse operation by the duality mentioned above. A natural extension of an IRE is associated with two transversal flows on a flat translation surface with branching points.

Запропоновано нову концепцію перекладального ансамблю інтервалів (ПАІ), що є узагальненням класичного перекладання інтервалів (ПІ). Ця конструкція розширює простір ПІ відповідно до природної дуальності, на яку ми вказуємо. Індукція типу Розі–Віча є застосовною до ПАІ, і згадана вище дуальність спрягає її з оберненою операцією. Натуральне розширення ПАІ може бути реалізоване як пара трансверсальних потоків на плоскій трансляційній поверхні з особливими точками.

1. Вступ. Перекладання інтервалів (ПІ) — це одновимірні динамічні системи, які широко досліджуються з 1970-х років, починаючи з робіт [1–6]. Просте та наочне викладення предмету можна знайти, наприклад, у [7].

Але мотивація до узагальнення цієї конструкції прийшла до нас із нещодавніх досягнень у дослідженні дифеоморфізмів кола зі зламами [8–12], які можуть розглядатися як окремий випадок нелінійного ПІ. Ренормалізаційний підхід веде до вивчення динаміки дії оператора ренормалізації на граничній скінченновимірній області параметрів. Одним із ключових спостережень, які зробили результати статті [10] можливими, було відкриття авторами важливої симетрії (представленої у вигляді нескладної інволюції на згаданій вище граничній множині, деталі див. у [9]), яка спрягає оператор ренормалізації з оберненням до нього. Ця оборотність часу дозволила авторам зрештою довести гіперболічність ренормалізації. Вони назвали цю симетрію „дуальністю”.

Якщо випадок єдиного зламу, досліджений у [10], приводив до розгляду (нелінійного) перекладання лише двох інтервалів, тобто до ПІ з дуже простою дискретною компонентою, то випадок багатьох зламів вимагав розуміння того, яким чином трансформуються набагато складніші ПІ на багатьох проміжках при застосуванні до них процедури індукції. Авторам вдалося розширити дуальність, знайдену для найпростішого випадку, на простір усіх ротаційних ПІ (це клас ПІ на багатьох проміжках, індуктованих ірраціональними поворотами кола). Ця дуальність обертає індукцію на дискретних даних, на лінійних натуральних розширеннях та на дробово-лінійних ПІ.

У випадку ротаційного ПІ дуальною до нього системою також є ротаційне ПІ. Але що буде, якщо операцію дуальності застосувати до неротаційного ПІ? Відповідь на це питання виявилася дещо неочікуваною: результатом є не ПІ, і навіть не динамічна система, а більш загальний об’єкт, який автори назвали „перекладальним ансамблем інтервалів” (ПАІ). Простір усіх таких ансамблів є замкненим щодо нашої дуальності і виявляється дуже природним у багатьох сенсах, про що йдеться у цій статті.

¹ E-mail: teplinsky.a@gmail.com.

Опишемо коротко будову статті. У пп. 2 і 3 охарактеризовано класичні ПІ (на одному проміжку) та ПІ на багатьох проміжках, у п. 4 наведено означення ПАІ. Далі показано, які динамічні системи відповідають ПАІ (п. 5), обраховано розмірності дійсних компонент (п. 6), означено елементарні кроки індукції (п. 7) і дуальність, що обертає час (п. 8). Натуральні розширення ПАІ наведено у п. 9, а відповідні до них трансляційні поверхні й потоки — у п. 10 (який також включає докладний аналіз одного класичного прикладу). У п. 11 підсумовано отримані результати.

2. Класичні перекладання інтервалів. Наведемо класичне означення ПІ.

Нехай є алфавіт $\mathcal{A}$ з $d \geq 1$ символів, два дискретних бієктивних відображення π_b і π_e , що діють з $\mathcal{A}$ на множину $\{1, \dots, d\}$, та вектор довжин $\mathbf{v} = (v_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$. Перекладання інтервалів із цими даними $(\pi_b, \pi_e, \mathbf{v})$ — це одновимірна динамічна система на напіввідкритому проміжку $J = \left[0, \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} v_\alpha\right)$, яка визначається розривним бієктивним відображенням

$$f : x \mapsto x - x_b(\alpha) + x_e(\alpha) \quad \text{для} \quad x \in I_{\alpha b}, \alpha \in \mathcal{A}, \quad (1)$$

де $I_{\alpha b} = [x_b(\alpha), x_b(\alpha) + v_\alpha)$, $x_b(\alpha) = \sum_{\beta : \pi_b(\beta) < \pi_b(\alpha)} v_\beta$, $x_e(\alpha) = \sum_{\beta : \pi_e(\beta) < \pi_e(\alpha)} v_\beta$. Індеси b та e тут походять від слів beginning („початковий”) та ending („кінцевий”) відповідно.

Неважко перевірити, що дія цього відображення полягає в розділенні проміжку J на d початкових інтервалів $I_{\alpha b}$ (тут і далі ми використовуємо терміни „проміжок” та „інтервал” невзаємозамінно, називаючи ними різні за змістом об’єкти) довжин v_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, упорядкованих відповідно до π_b (у тому сенсі, що початковий інтервал $I_{\alpha b}$ займає $\pi_b(\alpha)$ -ту позицію, рахуючи зліва направо), і зсуві кожного з них окремо на відповідні кінцеві інтервали $I_{\alpha e} = [x_e(\alpha), x_e(\alpha) + v_\alpha)$ тих самих довжин, але тепер упорядкованих відповідно до π_e .

Важливо зауважити, що набір даних $(\pi_b, \pi_e, \mathbf{v})$, які визначають ПІ (J, f) , є гібридним об’єктом, що складається з дискретної компоненти (або схеми) (π_b, π_e) та дійсної компоненти $\mathbf{v}$.

Схему ПІ часто подають у вигляді так званого дворядкового запису

$$\begin{pmatrix} \pi_b^{-1}(1) & \pi_b^{-1}(2) & \dots & \pi_b^{-1}(d) \\ \pi_e^{-1}(1) & \pi_e^{-1}(2) & \dots & \pi_e^{-1}(d) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Наприклад, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ позначає схему ПІ, що перекладає чотири інтервали у протилежному порядку.

Зауважимо, що якщо розглядати ПІ лише як одну конкретну динамічну систему, то наведена вище схема нічим не відрізняється від, скажімо, схеми $\begin{pmatrix} \beta & \alpha & \gamma & \delta \\ \delta & \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Але для маніпуляцій з ПІ, які ми опишемо нижче, корисно слідкувати за мітками інтервалів, і власне математичний об’єкт ПІ варто розглядати не просто як одновимірну динамічну систему (J, f) , а саме як набір даних $(\pi_b, \pi_e, \mathbf{v})$, що є елементом певного параметричного простору, на якому діють метадинамічні системи.

Однією з класичних метасистем у просторі ПІ є індукція Розі–Віча. Вона перетворює вихідне ПІ $(\pi_b, \pi_e, \mathbf{v})$ на нове $(\pi'_b, \pi'_e, \mathbf{v}')$, яке в динамічному сенсі є відображенням першого повернення траєкторій на зменшений проміжок, що визначається шляхом порівняння довжин крайнього правого початкового інтервалу і крайнього правого кінцевого інтервалу та відрізання більш короткого з них від вихідного проміжку J . У вигляді формул: якщо $v_{\pi_b^{-1}(d)} < v_{\pi_e^{-1}(d)}$,

то проміжком нового ПІ буде $J' = \left[0, \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_b^{-1}(d)\}} v_\alpha\right)$; у протилежному випадку ним буде $J' = \left[0, \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_e^{-1}(d)\}} v_\alpha\right)$. Незавжно порахувати, яким буде відображення першого повернення на цей проміжок.

У випадку $v_{\pi_b^{-1}(d)} < v_{\pi_e^{-1}(d)}$:

$$\begin{aligned}\pi'_b(\alpha) &= \pi_b(\alpha) \text{ для таких } \alpha, \text{ що } \pi_b(\alpha) \leq \pi_b(\pi_e^{-1}(d)), \\ \pi'_b(\alpha) &= \pi_b(\alpha) + 1 \text{ для таких } \alpha, \text{ що } \pi_b(\pi_e^{-1}(d)) < \pi_b(\alpha) < d, \\ \pi'_b(\pi_b^{-1}(d)) &= \pi_b(\pi_e^{-1}(d)) + 1, \\ \pi'_e(\alpha) &= \pi_e(\alpha) \text{ для всіх } \alpha \in \mathcal{A}, \\ v'_{\pi_e^{-1}(d)} &= v_{\pi_e^{-1}(d)} - v_{\pi_b^{-1}(d)}, \\ v'_\alpha &= v_\alpha \text{ для } \alpha \neq \pi_e^{-1}(d).\end{aligned}$$

У випадку $v_{\pi_b^{-1}(d)} > v_{\pi_e^{-1}(d)}$:

$$\begin{aligned}\pi'_b(\alpha) &= \pi_b(\alpha) \text{ для всіх } \alpha \in \mathcal{A}, \\ \pi'_e(\alpha) &= \pi_e(\alpha) \text{ для таких } \alpha, \text{ що } \pi_e(\alpha) \leq \pi_e(\pi_b^{-1}(d)), \\ \pi'_e(\alpha) &= \pi_e(\alpha) + 1 \text{ для таких } \alpha, \text{ що } \pi_e(\pi_b^{-1}(d)) < \pi_e(\alpha) < d, \\ \pi'_e(\pi_e^{-1}(d)) &= \pi_e(\pi_b^{-1}(d)) + 1, \\ v'_{\pi_b^{-1}(d)} &= v_{\pi_b^{-1}(d)} - v_{\pi_e^{-1}(d)}, \\ v'_\alpha &= v_\alpha \text{ для } \alpha \neq \pi_b^{-1}(d).\end{aligned}$$

Це перетворення ПІ простіше зрозуміти у дворядковому записі (2): якщо інтервал з міткою $\pi_b^{-1}(d)$ є строго коротшим за інтервал з міткою $\pi_e^{-1}(d)$, то у верхньому рядку символ $\pi_b^{-1}(d)$ видаляється зі своєї крайньої правої позиції і вставляється в той самий рядок просто праворуч від $\pi_e^{-1}(d)$, а нижній рядок залишається без змін; якщо ж інтервал з міткою $\pi_b^{-1}(d)$ є строго довшим за інтервал з міткою $\pi_e^{-1}(d)$, то верхній рядок змін не зазнає, а в нижньому символ $\pi_e^{-1}(d)$ переміщується зі своєї крайньої правої позиції у позицію просто праворуч від $\pi_b^{-1}(d)$ у цьому ж рядку. Після такої зміни дискретної компоненти довжина довшого з двох інтервалів зменшується на довжину коротшого.

Зауваження 1. Описане перетворення є невизначеним у випадку $v_{\pi_b^{-1}(d)} = v_{\pi_e^{-1}(d)}$. При застосуванні індукції Розі–Віча спеціально припускається, що такий випадок ніколи не трапиться. Зазвичай це робиться шляхом накладання умови Кіна [1], яка формулюється таким чином: траєкторії всіх точок розриву $x_b(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_b^{-1}(1)\}$, попарно не перетинаються. З умови Кіна також випливає мінімальність ПІ (J, f) : кожна траєкторія цієї динамічної системи є скрізь щільною на проміжку J .

3. Перекладання інтервалів на багатьох проміжках. Класичні ПІ, означені у попередньому пункті, діють на одному проміжку, і першим кроком із узагальнення є позбуття цього обмеження, тобто перехід до розгляду ПІ на багатьох проміжках. Ми також позбудемося фіксації лівого краю в точці 0. У подальшому будемо називати ПІ на багатьох проміжках просто ПІ.

Розглянемо алфавіт $\mathcal{A}$ із $d \geq 1$ символів і два бієктивних відображення π_b та π_e , що діють з $\mathcal{A}$ на $\{1, \dots, d\}$, як і раніше. Але тепер додамо до цих даних два впорядкованих набори з $N \geq 1$ натуральних чисел $\mathbf{k}_b = (k_{1b}, \dots, k_{Nb})$ і $\mathbf{k}_e = (k_{1e}, \dots, k_{Ne})$, суми яких дають d , тобто $\sum_{s=1}^N k_{sb} = \sum_{s=1}^N k_{se} = d$. Нехай ми маємо вектор довжин $\mathbf{v} = (v_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$, що задовольняють умови

$$\sum_{i=1}^{k_{sb}} v_{\pi_b^{-1}(k_{1b} + \dots + k_{(s-1)b} + i)} = \sum_{i=1}^{k_{se}} v_{\pi_e^{-1}(k_{1e} + \dots + k_{(s-1)e} + i)}, \quad 1 \leq s \leq N.$$

Позначимо записані вище суми як ℓ_s , $1 \leq s \leq N$. Легко бачити, що якщо будь-які $N - 1$ серед рівностей вище виконуються, то вони виконуються всі, оскільки, підсумувавши всі N рівностей, одержимо тотожність із виразом $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} v_\alpha$ з обох боків.

Для заданого набору проміжків $J_s = [A_s, B_s]$ довжин $B_s - A_s = \ell_s$, $1 \leq s \leq N$, ПІ (на багатьох проміжках) з даними $(\pi_b, \pi_e, \mathbf{k}_b, \mathbf{k}_e, \mathbf{v})$ означається на їхньому диз'юнктному об'єднанні $\bigsqcup_{s=1}^N J_s$ відображенням, яке розділяє N проміжків J_s на d початкових інтервалів $I_{\alpha b}$ довжин v_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, упорядкованих відповідно до π_b і $\mathbf{k}_b$ (в тому сенсі, що інтервал $I_{\alpha b}$ займає позицію під номером $\pi_b(\alpha) - (k_{1b} + \dots + k_{(s-1)b})$, рахуючи зліва направо, на проміжку J_s , $1 \leq s \leq N$), і зсуває кожен із них окремо на відповідні кінцеві інтервали $I_{\alpha e}$ таких самих довжин v_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, які впорядковані відповідно до π_e і $\mathbf{k}_e$. Формально це відображення задається тим самим записом (1), але тепер лівий край початкового інтервалу $I_{\alpha b}$ задається рівністю $x_b(\alpha) = A_{s_b(\alpha)} + \sum_{\beta: k_{1b} + \dots + k_{(s_b(\alpha)-1)b} < \pi_b(\beta) < \pi_b(\alpha)} v_\beta$, де $s_b(\alpha) = \min\{s: \pi_b(\alpha) \leq k_{1b} + \dots + k_{sb}\}$ — номер того проміжку, якому цей початковий інтервал належить, а лівий край кінцевого інтервалу $I_{\alpha e}$ задається рівністю $x_e(\alpha) = A_{s_e(\alpha)} + \sum_{\beta: k_{1e} + \dots + k_{(s_e(\alpha)-1)e} < \pi_e(\beta) < \pi_e(\alpha)} v_\beta$, де $s_e(\alpha) = \min\{s: \pi_e(\alpha) \leq k_{1e} + \dots + k_{se}\}$ — номер того проміжку, якому належить даний кінцевий інтервал.

Легко переконатися, що для $N = 1$ та $A_1 = 0$ це означення є еквівалентним означенню класичного ПІ з попереднього пункту. Також варто зауважити, що у випадку $N \neq 1$ саме дискретна компонента даних ПІ $(\pi_b, \pi_e, \mathbf{k}_b, \mathbf{k}_e)$ підносить складність усієї конструкції на новий рівень.

Цю схему природно візуалізувати у вигляді дворядкового запису таким чином:

$$\left(\begin{bmatrix} \pi_b^{-1}(1) & \dots & \pi_b^{-1}(k_{1b}) \\ \pi_e^{-1}(1) & \dots & \pi_e^{-1}(k_{1e}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_b^{-1}(k_{1b} + 1) & \dots & \pi_b^{-1}(k_{1b} + k_{2b}) \\ \pi_e^{-1}(k_{1e} + 1) & \dots & \pi_e^{-1}(k_{1e} + k_{2e}) \end{bmatrix} \dots \right. \\ \left. \dots \begin{bmatrix} \pi_b^{-1}(k_{1b} + \dots + k_{(N-1)b} + 1) & \dots & \pi_b^{-1}(d) \\ \pi_e^{-1}(k_{1e} + \dots + k_{(N-1)e} + 1) & \dots & \pi_e^{-1}(d) \end{bmatrix} \right). \quad (3)$$

У цьому записі N блоків у квадратних дужках відповідають поділу проміжків J_s , $1 \leq s \leq N$, на початкові (верхній рядок) та кінцеві (нижній рядок) інтервали із вказаними (зліва направо, тобто так само, як лежать відповідні інтервали) мітками.

Індукцію Розі–Віча також потрібно узагальнити на нову конструкцію. Зберігати недоторканими ліві краї проміжків більше не має сенсу, тому природно дозволити відрізати інтервали з обох боків, а не лише з правого, як це зроблено у класичній індукції Розі–Віча, описаній у попередньому пункті. Зараз ми означимо елементарні індукційні кроки чотирьох типів: „обрізання початкового інтервалу справа”, „обрізання кінцевого інтервалу справа”, „обрізання початкового інтервалу зліва” і „обрізання кінцевого інтервалу зліва”, позначивши ці операції $\Pi_{\alpha\beta}^{rb}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{re}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{lb}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{le}$ відповідно. Тут у верхніх індексах літери r та l походять від слів right („правий”) та left („лівий”), а α , β , $\alpha \neq \beta$, — мітки задіяних в операції початкового та кінцевого інтервалів відповідно.

Елементарні індукційні кроки $\Pi_{\alpha\beta}^{rb}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{re}$ є застосовними лише тоді, коли для якогось $1 \leq s^* \leq N$ мають місце рівності $s_b(\alpha) = s_e(\beta) = s^*$, $\pi_b(\alpha) = k_{1b} + \dots + k_{s^*b}$, $\pi_e(\beta) =$

$= k_{1e} + \dots + k_{s^*e}$, тобто початковий $I_{\alpha b}$ та кінцевий $I_{\beta e}$ інтервали прилягають до правого краю проміжку J_{s^*} . Як і у класичній індукції Розі–Віча, ми обрізаємо довший із цих двох інтервалів на довжину коротшого, тобто якщо $v_\alpha > v_\beta$, то застосовується операція $\Pi_{\alpha\beta}^{rb}$, тоді як при $v_\alpha < v_\beta$ застосовується $\Pi_{\alpha\beta}^{re}$. Для $v_\alpha = v_\beta$ ці операції не означені.

Кроки $\Pi_{\alpha\beta}^{lb}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{le}$ застосовуються, коли $s_e(\alpha) = s_b(\beta) = s^*$, $\pi_b(\alpha) = k_{1b} + \dots + k_{(s^*-1)b} + 1$, $\pi_e(\beta) = k_{1e} + \dots + k_{(s^*-1)e} + 1$ для $1 \leq s^* \leq N$, тобто початковий $I_{\alpha b}$ та кінцевий $I_{\beta e}$ інтервали прилягають до лівого краю проміжку J_{s^*} . Якщо $v_\alpha > v_\beta$, то застосовується $\Pi_{\alpha\beta}^{lb}$, а якщо $v_\alpha < v_\beta$, то $\Pi_{\alpha\beta}^{le}$. Для випадку $v_\alpha = v_\beta$ операції не означаються.

Позначимо дискретні дані ПІ до застосування індукційного кроку як $(\pi_b, \pi_e, \mathbf{k}_b, \mathbf{k}_e)$, а після застосування як $(\pi'_b, \pi'_e, \mathbf{k}'_b, \mathbf{k}'_e)$. Дія елементарних індукційних кроків означається таким чином (у кожному з чотирьох випадків ми спочатку описуємо цю дію словами з огляду на дворядковий запис схеми, а потім формально).

$\Pi_{\alpha\beta}^{rb}$ переміщує символ β з його крайньої правої позиції у нижньому рядку s^* -го блоку на позицію просто праворуч від символу α у нижньому рядку того блоку, де він є знизу:

$$\pi'_b = \pi_b, \mathbf{k}'_b = \mathbf{k}_b,$$

$\pi'_e(\gamma) = \pi_e(\gamma)$ для таких γ , що або $\pi_e(\gamma) < \pi_e(\beta)$ і $\pi_e(\gamma) \leq \pi_e(\alpha)$, або ж $\pi_e(\gamma) > \pi_e(\beta)$ і $\pi_e(\gamma) > \pi_e(\alpha)$,

$$\pi'_e(\gamma) = \pi_e(\gamma) + 1 \text{ для таких } \gamma, \text{ що } \pi_e(\alpha) < \pi_e(\gamma) < \pi_e(\beta),$$

$$\pi'_e(\gamma) = \pi_e(\gamma) - 1 \text{ для таких } \gamma, \text{ що } \pi_e(\beta) < \pi_e(\gamma) \leq \pi_e(\alpha),$$

$$\pi'_e(\beta) = \pi_e(\alpha) + 1, \text{ якщо } \pi_e(\alpha) < \pi_e(\beta), \text{ інакше } \pi'_e(\beta) = \pi_e(\alpha),$$

$$k'_{se} = k_{se} \text{ для } s \notin \{s^*, s_e(\alpha)\} \text{ або } s = s^* = s_e(\alpha),$$

$$k'_{s^*e} = k'_{s^*e} - 1, \text{ якщо } s^* \neq s_e(\alpha),$$

$$k'_{s_e(\alpha)e} = k'_{s_e(\alpha)e} + 1, \text{ якщо } s^* \neq s_e(\alpha).$$

$\Pi_{\alpha\beta}^{re}$ переміщує символ α з його крайньої правої позиції у верхньому рядку s^* -го блоку на позицію просто праворуч від символу β у верхньому рядку того блоку, де він є зверху:

$$\pi'_e = \pi_e, \mathbf{k}'_e = \mathbf{k}_e,$$

$\pi'_b(\gamma) = \pi_b(\gamma)$ для такого γ , що або $\pi_b(\gamma) < \pi_b(\alpha)$ і $\pi_b(\gamma) \leq \pi_b(\beta)$, або ж $\pi_b(\gamma) > \pi_b(\alpha)$ і $\pi_b(\gamma) > \pi_b(\beta)$,

$$\pi'_b(\gamma) = \pi_b(\gamma) + 1 \text{ для такого } \gamma, \text{ що } \pi_b(\beta) < \pi_b(\gamma) < \pi_b(\alpha),$$

$$\pi'_b(\gamma) = \pi_b(\gamma) - 1 \text{ для такого } \gamma, \text{ що } \pi_b(\alpha) < \pi_b(\gamma) \leq \pi_b(\beta),$$

$$\pi'_b(\alpha) = \pi_b(\beta) + 1, \text{ якщо } \pi_b(\beta) < \pi_b(\alpha), \text{ інакше } \pi'_b(\alpha) = \pi_b(\beta),$$

$$k'_{sb} = k_{sb} \text{ для } s \notin \{s^*, s_b(\beta)\} \text{ або } s = s^* = s_b(\beta),$$

$$k'_{s^*b} = k'_{s^*b} - 1, \text{ якщо } s^* \neq s_b(\beta),$$

$$k'_{s_b(\beta)b} = k'_{s_b(\beta)b} + 1, \text{ якщо } s^* \neq s_b(\beta).$$

$\Pi_{\alpha\beta}^{lb}$ переміщує β з його крайньої лівої позиції у нижньому рядку s^* -го блоку на позицію просто ліворуч від α у нижньому рядку того блоку, де він є знизу:

$$\pi'_b = \pi_b, \mathbf{k}'_b = \mathbf{k}_b,$$

$\pi'_e(\gamma) = \pi_e(\gamma)$ для такого γ , що або $\pi_e(\gamma) < \pi_e(\alpha)$ і $\pi_e(\gamma) < \pi_e(\beta)$, або ж $\pi_e(\gamma) \geq \pi_e(\alpha)$ і $\pi_e(\gamma) > \pi_e(\beta)$,

$$\pi'_e(\gamma) = \pi_e(\gamma) + 1 \text{ для такого } \gamma, \text{ що } \pi_e(\alpha) \leq \pi_e(\gamma) < \pi_e(\beta),$$

$$\pi'_e(\gamma) = \pi_e(\gamma) - 1 \text{ для такого } \gamma, \text{ що } \pi_e(\beta) < \pi_e(\gamma) < \pi_e(\alpha),$$

$\pi'_e(\beta) = \pi_e(\alpha) - 1$, якщо $\pi_e(\beta) < \pi_e(\alpha)$, інакше $\pi'_e(\beta) = \pi_e(\alpha)$,

$k'_{se} = k_{se}$ для $s \notin \{s^*, s_e(\alpha)\}$ або $s = s^* = s_e(\alpha)$,

$k'_{s^*e} = k'_{s^*e} - 1$, якщо $s^* \neq s_e(\alpha)$,

$k'_{s_e(\alpha)e} = k'_{s_e(\alpha)e} + 1$, якщо $s^* \neq s_e(\alpha)$.

$\Pi_{\alpha\beta}^{le}$ переміщує α з його крайньої лівої позиції у верхньому рядку s^* -го блоку на позицію просто ліворуч від β у верхньому рядку того блоку, де він є зверху:

$\pi'_e = \pi_e$, $\mathbf{k}'_e = \mathbf{k}_e$,

$\pi'_b(\gamma) = \pi_b(\gamma)$ для такого γ , що або $\pi_b(\gamma) < \pi_b(\beta)$ і $\pi_b(\gamma) < \pi_b(\alpha)$, або ж $\pi_b(\gamma) \geq \pi_b(\beta)$ і $\pi_b(\gamma) > \pi_b(\alpha)$,

$\pi'_b(\gamma) = \pi_b(\gamma) + 1$ для такого γ , що $\pi_b(\beta) \leq \pi_b(\gamma) < \pi_b(\alpha)$,

$\pi'_b(\gamma) = \pi_b(\gamma) - 1$ для такого γ , що $\pi_b(\alpha) < \pi_b(\gamma) < \pi_b(\beta)$,

$\pi'_b(\alpha) = \pi_b(\beta) - 1$, якщо $\pi_b(\alpha) < \pi_b(\beta)$, інакше $\pi'_b(\alpha) = \pi_b(\beta)$,

$k'_{sb} = k_{sb}$ для $s \notin \{s^*, s_b(\beta)\}$ або $s = s^* = s_b(\beta)$,

$k'_{s^*b} = k'_{s^*b} - 1$, якщо $s^* \neq s_b(\beta)$,

$k'_{s_b(\beta)b} = k'_{s_b(\beta)b} + 1$, якщо $s^* \neq s_b(\beta)$.

Слід зауважити, що для кожного з чотирьох кроків можлива ситуація $(\pi_b, \pi_e, \mathbf{k}_b, \mathbf{k}_e) = (\pi'_b, \pi'_e, \mathbf{k}'_b, \mathbf{k}'_e)$, тобто коли дискретні дані залишаються повністю без змін (для кроку $\Pi_{\alpha\beta}^{rb}$ це той випадок, коли символ α у нижньому рядку s^* -го блоку вже знаходиться просто зліва від β ; для інших кроків аналогічно).

Дійсну компоненту Π можна означити як поєднання вектора довжин інтервалів $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^A$ із вектором лівих країв проміжків $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_N) \in \mathbb{R}^N$. Разом це складає $d+N$ дійсних чисел; вони не є незалежними, але до питання розмірностей відповідних просторів ми повернемося у п. 6.

Зміни у дійсних даних від $(\mathbf{v}, \mathbf{A})$ до $(\mathbf{v}', \mathbf{A}')$ при застосуванні чотирьох елементарних індукційних кроків записуються значно простіше за зміни у дискретних даних, а саме:

для $\Pi_{\alpha\beta}^{rb}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{lb}$ маємо $v'_\alpha = v_\alpha - v_\beta$, тоді як для $\Pi_{\alpha\beta}^{re}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{le}$ $v'_\beta = v_\beta - v_\alpha$, всі інші довжини не змінюються;

для $\Pi_{\alpha\beta}^{lb}$ маємо $A'_{s^*} = A_{s^*} + v_\beta$, а для $\Pi_{\alpha\beta}^{le}$ $A'_{s^*} = A_{s^*} + v_\alpha$, і ліві краї всіх інших проміжків, крім J_{s^*} , не змінюються, тоді як для обрізань справа $\Pi_{\alpha\beta}^{rb}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{re}$ жоден із лівих країв проміжків J_s , $1 \leq s \leq N$, не змінюється.

Зауважимо, що елементарні індукційні кроки діють на дискретну компоненту даних Π $(\pi_b, \pi_e, \mathbf{k}_b, \mathbf{k}_e)$ незалежно від значення дійсної компоненти його даних $(\mathbf{v}, \mathbf{A})$.

4. Означення перекладального ансамблю інтервалів. У наступних пунктах мотивація для узагальнюючої конструкції, яку ми зараз опишемо, стане більш зрозумілою, але зараз поглянемо на дискретну компоненту даних Π з дещо іншої точки зору.

Для початку перетворимо дворядковий запис (3) на запис в один рядок, спорядивши символи алфавіту з верхнього та нижнього рядків літерами b та e відповідно і записавши їх у N скінченних послідовностях, по одній для кожного проміжку J_s : спочатку символи верхнього рядка зліва направо, а за ними (тобто праворуч від них) символи нижнього рядка, але справа наліво. Наприклад, замість $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \\ \gamma & \delta & \varepsilon \end{pmatrix}$ пишемо $(\alpha b, \beta b, \varepsilon e, \delta e, \gamma e)$.

Відповідно до цієї форми запису, кодуємо кожен проміжок J_s , $1 \leq s \leq N$, який є об'єднанням початкових інтервалів з мітками (зліва направо) $\pi_b^{-1}(k_{1b} + \dots + k_{(s-1)b} + 1), \dots, \pi_b^{-1}(k_{1b} + \dots + k_{sb})$ і водночас об'єднанням кінцевих інтервалів з мітками $\pi_e^{-1}(k_{1e} + \dots + k_{(s-1)e} + 1), \dots, \pi_e^{-1}(k_{1e} + \dots + k_{se})$, як один цикл

$$\left(\pi_b^{-1}(k_{1b} + \dots + k_{(s-1)b} + 1)b, \dots, \pi_b^{-1}(k_{1b} + \dots + k_{sb})b, \right. \\ \left. \pi_e^{-1}(k_{1e} + \dots + k_{se})e, \dots, \pi_e^{-1}(k_{1e} + \dots + k_{(s-1)e} + 1)e \right)$$

у подвоєному алфавіті $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \{b, e\}$. (Далі позначатимемо елементи $\bar{\mathcal{A}}$ як $\bar{\xi} = \alpha m = (\alpha, m)$, де $\alpha \in \mathcal{A}$, $m \in \{b, e\}$.) Ми називаємо ці скінченні послідовності циклами, маючи на увазі цикли у перестановці множини $\bar{\mathcal{A}}$. Мова йде про відношення порядку, за яким кожна з таких скінченних послідовностей є зімкнутою в кільце (тобто її перший елемент слідує за її останнім елементом).

Зрозуміло, що в нашій конструкції для ПІ кожен елемент подвоєного алфавіту $\bar{\mathcal{A}}$ належить в точності до одного циклу, а отже схема (дискретні дані) ПІ може бути означена як перестановка на $\bar{\mathcal{A}}$ така, що кожен її цикл можна розбити на дві дуги, одна з яких містить лише елементи з множини $\mathcal{A} \times \{b\}$, а друга — лише елементи з $\mathcal{A} \times \{e\}$.

Наше узагальнення позбувається останнього обмеження: ми розглядаємо будь-яку перестановку σ на $\bar{\mathcal{A}}$ як схему ПАІ, де остання аббревіатура позначає перекладальний ансамбль інтервалів — новий математичний об'єкт, який ми презентуємо.

Формально схема ПАІ σ може еквівалентно розглядатися або як бієктивне відображення $\bar{\mathcal{A}}$ на себе, або як $(2d \times 2d)$ -матриця $\bar{\mathcal{A}}^2 \rightarrow \{0, 1\}$, у якій кожен рядок і кожен стовпчик містять рівно по одній одиниці, або ж як відповідний орієнтований граф із $2d$ вершинами $\bar{\mathcal{A}}$, який є об'єднанням попарно неперетинних циклів. Коли $\sigma(\bar{\xi}) = \bar{\eta}$, кажемо, що $\bar{\xi}$ стоїть просто (чи одразу) перед $\bar{\eta}$, а $\bar{\eta}$ стоїть одразу (чи просто) після $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in \bar{\mathcal{A}}$.

Означення. Перекладальний ансамбль інтервалів — це пара $(\sigma, \mathbf{x})$, у якій $\sigma: \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ є дискретним бієктивним відображенням (перестановкою), а $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\bar{\mathcal{A}}}$ — вектором, координати якого задовольняють рівності

$$x_{\alpha b} + x_{\alpha e} - x_{\sigma(\alpha b)} + x_{\sigma(\alpha e)} = 0 \quad \text{для всіх } \alpha \in \mathcal{A}. \quad (4)$$

Зрозуміло, що для кожної заданої перестановки σ множина всіх векторів країв $\mathbf{x}$, що задовольняють рівності (4) (ми називаємо такі вектори *дозволеними* схемою σ), складає лінійний простір $X_\sigma \subset \mathbb{R}^{\bar{\mathcal{A}}}$.

Вектор довжин $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\bar{\mathcal{A}}}$ для даного ПАІ $(\sigma, \mathbf{x})$ означається як

$$v_\alpha = x_{\sigma(\alpha b)} - x_{\alpha b} = x_{\alpha e} - x_{\sigma(\alpha e)}, \quad \alpha \in \mathcal{A}, \quad (5)$$

відповідно до (4). Множина всіх векторів $\mathbf{v}$, *дозволених* схемою σ (тобто породжених шляхом підстановки у рівності (5) координат дозволених векторів країв $\mathbf{x}$), складає лінійний простір $V_\sigma \subset \mathbb{R}^{\bar{\mathcal{A}}}$.

Ми називаємо пару $(\sigma, \mathbf{v})$, із вектором довжин $\mathbf{v} \in V_\sigma$, *плаваючим* ПАІ, маючи на увазі, що різні проміжки (які відповідають циклам інтервалів у схемі σ) можуть вільним чином соватися уздовж осі координат незалежно один від одного, на відміну від *закріпленого* ПАІ $(\sigma, \mathbf{x})$, де кожен проміжок (цикл) займає фіксоване положення на координатній осі.

Зауваження 2. Можна записати (5) у вигляді $x_{\sigma(\bar{\xi})} = x_{\bar{\xi}} \pm v_{\alpha}$ для кожного $\bar{\xi} = \alpha m \in \bar{\mathcal{A}}$, де знак плюс відповідає випадку $m = b$, а знак мінус — випадку $m = e$. Така форма запису дозволяє відновити вектор x за відомим вектором v і одним-єдиним значенням краю $x_{\bar{\xi}}$ для кожного циклу в перестановці σ ; решта країв у цьому циклі обраховуватимуться за формулами

$$x_{\sigma^i(\bar{\xi})} = x_{\bar{\xi}} \pm v_{\alpha_0} \pm \dots \pm v_{\alpha_{i-1}}, \quad (6)$$

де $\alpha_j \in \mathcal{A}$ є першою компонентою $\sigma^j(\bar{\xi}) \in \bar{\mathcal{A}}$, а знак перед v_{α_j} визначається другою компонентою $\sigma^j(\bar{\xi})$, $0 \leq j < i$.

Будемо називати ПАІ *додатним*, якщо $v_{\alpha} > 0$ для всіх $\alpha \in \mathcal{A}$. Схему ПАІ будемо називати *додатною*, якщо вона дозволяє додатний ПАІ.

Додатний ПАІ слід уявляти як ансамбль із $2d$ інтервалів, спарованих у d пар із мітками $\alpha \in \mathcal{A}$. У кожній такій парі початковий інтервал $I_{\alpha b} = [x_{\alpha b}, x_{\sigma(\alpha b)})$ та кінцевий $I_{\alpha e} = [x_{\sigma(\alpha e)}, x_{\alpha e})$ з тією ж самою міткою α мають однакову довжину v_{α} . Усі ці інтервали відповідно до циклів у схемі є зчепленими своїми краями в одну чи кілька зімкнених одновимірних ламаних ліній, які ми також коротко називатимемо циклами (у випадку ПІ ці ламані вкривають проміжки J_s , $1 \leq s \leq N$, проходячи кожен із них двічі: по початкових та по кінцевих інтервалах).

5. ПАІ як динамічні системи. У цьому пункті ми покажемо, які динамічні системи асоціюються з ПАІ.

Для схеми ПАІ σ називатимемо кожне місце $\sigma(\alpha b) = \beta e$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, *поворотом назад* у βe , і кожне місце $\sigma(\beta e) = \alpha b$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, *поворотом уперед* у αb . Очевидно, що кожен із циклів у перестановці σ містить однакову кількість поворотів назад та поворотів уперед. Назвемо цикл *покрученим*, якщо він містить більше ніж один поворот назад. Означимо *число покручення* циклу як кількість поворотів назад у ньому мінус один. Число покручення $T = T(\sigma)$ схеми ПАІ σ є сумою чисел покручень усіх її циклів, а отже дорівнює загальній кількості поворотів назад у ній мінус кількість циклів у цій схемі $N = N(\sigma)$.

Зауваження 3. У виродженому випадку, коли цикл складається лише з початкових або лише з кінцевих інтервалів, його покручення дорівнює -1 . Кожна схема ПАІ, яка містить у собі такий цикл, не є додатною.

Якщо кожен цикл у схемі додатного ПАІ не є покрученим, то цей ПАІ є ПІ на багатьох проміжках (він є класичним ПІ, якщо його схема складається з єдиного циклу, і єдиний поворот уперед трапляється в ньому на символі αb такому, що $x_{\alpha b} = 0$). ПАІ такого типу визначає динамічну систему, описану в п. 3: цикли відповідають проміжкам, кожен із яких розділено, з одного боку, на початкові, а з іншого — на кінцеві інтервали, і відображення f відображає перші на другі.

Але у випадку, коли додатний ПАІ не є ПІ, тобто його схема містить хоча б один покручений цикл, деякі з початкових інтервалів у цьому циклі обов'язково перекриваються між собою, так само, як і деякі з кінцевих інтервалів цього ж циклу (кожна точка на осі є покритою рівною кількістю початкових і кінцевих інтервалів кожного циклу). Така конструкція не визначає динамічну систему однозначно. Найбільш природно асоціювати ПАІ з сім'єю динамічних систем, що фактично являють собою *ПІ на деревах*. Щоб отримати дерево з кожного окремого циклу додатного ПАІ, треба зафіксувати набір спеціальних точок у кількості, що дорівнює числу покручення цього циклу. Інтервали, що перекриваються, будуть з'єднаними у цих точках і роз'єднаними поза ними. Результируючий фазовий простір являтиме собою дерево з диз'юнктними компонентами, які відповідають циклам ПАІ (деякі автори називають дерево з

декількома відокремленими компонентами „лісом”, але ми не будемо цього робити). Це дерево буде об’єднанням усіх початкових інтервалів, а також об’єднанням усіх кінцевих інтервалів, із розгалуженнями у спеціальних точках. Динамічна система на ньому визначатиметься „майже бієктивним” розривним відображенням, що зсуває кожен початковий інтервал на відповідний кінцевий інтервал, але точки розгалуження мають кілька (в загальному розташуванні — два) образів та прообразів.

5.1. Перетворення ПАІ у ПІ на дереві. Опишемо один із можливих алгоритмів, що трансформує додатний ПАІ у динамічну систему, неформально описану в попередньому абзаці як ПІ на дереві. У випадку, коли цикл непокручений, його початкові та кінцеві інтервали наочно розглядати як підклеєні перші до других, бо кожна точка проміжку, покритого цим циклом, є покритою рівно одним початковим і рівно одним кінцевим інтервалом. Якщо ж цикл покручений, то існують цілі підпроміжки точок, покритих більше ніж одним початковим інтервалом (і такою ж кількістю кінцевих), і ми маємо штучно визначити, як саме початкові і кінцеві інтервали будуть підклеєними перші до других у кожній із таких точок. Для цього буде використано наступну індуктивну процедуру, яку слід застосувати окремо до кожного покрученого циклу.

Почнемо з розгляду зімкненої ламаної лінії $(x_{\alpha_1 b}, x_{\beta_1 e}, x_{\alpha_2 b}, x_{\beta_2 e}, \dots, x_{\alpha_{t+1} b}, x_{\beta_{t+1} e}, x_{\alpha_1 b})$ з вершинами у послідовних поворотах нашого циклу (поворот уперед у $\alpha_1 b$, потім назад у $\beta_1 e$, далі вперед у $\alpha_2 b$, назад у $\beta_2 e$ і т. д.). Тут t позначає число покручення циклу. Ланки цієї ламаної складаються по чергові з початкових і кінцевих точок (тобто точок, які належать до початкових і кінцевих інтервалів). Знаходимо найкоротшу з цих $2(t+1)$ ланок. Припустимо, для визначеності, що нею виявилася ланка початкових точок $[x_{\alpha_i b}, x_{\beta_i e}]$ (для ланки кінцевих точок $[x_{\beta_i e}, x_{\alpha_{i+1} b}]$ процедура аналогічна). Виберемо на ній точку c_1 довільним чином і оголосимо, що кожна точка, яка належить до одного з початкових інтервалів із мітками між $\alpha_i b$ і $\beta_i e$ у нашому циклі ($\beta_i e$ не включається, а всі решта є початковими, оскільки між вершинами означеної ламаної немає інших поворотів циклу) та лежить ліворуч від c_1 , підклеюється до відповідної точки з такою ж координатою, яка належить до одного з кінцевих інтервалів із мітками між $\beta_{i-1} e$ та $\alpha_i b$ у цьому циклі. Кожна ж точка, яка належить до одного з початкових інтервалів із мітками між $\alpha_i b$ і $\beta_i e$ та лежить праворуч від c_1 , підклеюється до відповідної точки з такою ж координатою, яка належить до одного з кінцевих інтервалів із мітками між $\beta_i e$ та $\alpha_{i+1} b$; власне початкова точка з координатою c_1 при цьому підклеюється до обох відповідних кінцевих водночас, вона буде точкою розгалуження майбутнього дерева. (Тут ми вважаємо $\beta_0 e = \beta_{t+1} e$, $\alpha_{t+2} b = \alpha_1 b$, оскільки вся конструкція циклічна.) Тепер, вирішивши долю склеєних на описаному кроці початкових і кінцевих точок, ми виключаємо їх з розгляду і повертаємо c_1 як кінцеву (об’єднану з колишніх двох), зводячи нашу задачу до коротшої ламаної $(x_{\alpha_1 b}, x_{\beta_1 e}, \dots, x_{\alpha_{i-1} b}, x_{\beta_{i-1} e}, x_{\alpha_{i+1} b}, x_{\beta_{i+1} e}, \dots, x_{\alpha_{t+1} b}, x_{\beta_{t+1} e}, x_{\alpha_1 b})$, у якій так само, як і раніше, чергуються ланки з початкових і кінцевих точок, але яка тепер складається лише з $2t$ ланок. Ми знову відшукуємо найкоротшу ланку, вибираємо точку c_2 на ній і робимо аналогічне підклеювання, отримуючи ламану з $2(t-1)$ ланок. Продовжуємо процедуру до тих пір, поки не залишиться ламана з двома ланками $(x_{\alpha_m b}, x_{\beta_n e}, x_{\alpha_m b})$. Тоді ми підклеюємо кожен початковий інтервал до кінцевої точки з такою ж координатою, завершуючи процес. Точки розгалуження $c_1, \dots, c_t$ визначено, і цикл став деревом.

Застосувавши описану процедуру до кожного з циклів у σ , одержимо динамічну систему (зі скінченною кількістю траєкторій, що розгалужуються), яка по суті є перекладанням інтервалів на дереві. Загальна кількість точок розгалуження дорівнює числу покручення $T(\sigma)$. Важливою рисою цього алгоритму є те, що кожен початковий (кінцевий) інтервал розбивається на скін-

ченну кількість підінтервалів, кожен з яких цілком підклеюється до якогось одного кінцевого (початкового) інтервалу. Докладний опис прикладу такого підклеювання наведено в п. 10.

Зауваження 4. Розумним питанням могло б бути таке: для чого вивчати ПІ на дереві, якщо його можна трансформувати в ПІ на багатьох проміжках шляхом відрізання всіх гілок у точках розгалуження із перетворенням їх на окремі проміжки? Відповідь на нього стане більш зрозумілою після того, як ми опишемо індукцію, дуальність, натуральне розширення та відповідні потоки для ПАІ в наступних пунктах. Кажучи коротко, ПАІ має розглядатися як одновимірний переріз Пуанкаре для певної двовимірної системи з неперервним часом, і відрізання гілок на цьому перерізі не може спростити розширену картину: якщо поверхня містить спеціальні точки, то їх не можна з неї усунути, а можна лише зсунути з або на обраний конкретний переріз.

Докладніше пояснимо це в наступних пунктах, а зараз дослідимо простори X_σ і V_σ .

6. Розмірності просторів дійсних даних. Назвемо схему ПАІ σ з алфавітом $\mathcal{A}$ *звідною*, якщо існує підмножина $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0 \notin \{\emptyset, \mathcal{A}\}$, така, що $\sigma(\bar{\mathcal{A}}_0) = \bar{\mathcal{A}}_0$ (тут $\bar{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{A}_0 \times \{b, e\}$). Обмеження σ на $\bar{\mathcal{A}}_0$ являє собою окрему схему ПАІ, так само, як і обмеження σ на $\bar{\mathcal{A}} \setminus \bar{\mathcal{A}}_0$, і будь-який ПАІ з цією схемою σ можна звести до двох незалежних ПАІ зі зменшеними алфавітами $\mathcal{A}_0$ та $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$. Якщо ж такої підмножини не існує, називатимемо схему ПАІ *незвідною*. Зрозуміло, що для будь-якої схеми σ її алфавіт $\mathcal{A}$ єдиним чином розкладається на підалфавіти $\mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq P$, такі, що $\bigcup_{i=1}^P \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$, і кожне обмеження $\sigma_i = \sigma|_{\bar{\mathcal{A}}_i}$, $1 \leq i \leq P$, є незвідним. Назвемо $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq P}$ *розкладом σ на незвідні компоненти*. Трохи зловживаючи термінологією, будемо й самі множини символів $\mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq P$, називати незвідними компонентами (алфавіту). Очевидно, що кількість $P = P(\sigma)$ незвідних компонент схеми σ лежить у межах $1 \leq P \leq d$.

Твердження 1. $\dim(X_\sigma) = d + P$.

Доведення. Запишемо систему лінійних рівнянь (4) у матричній формі

$$\Delta x = 0$$

і зазначимо деякі властивості означеної таким чином матриці Δ розміру $d \times 2d$, розмірність ядра якої необхідно порахувати. Легко бачити, що кожен її стовпчик містить або один елемент 1, один елемент -1 , а всі решта 0, або ж лише одні 0. Кожен з її рядків Δ_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, містить або два елементи 1, два елементи -1 , всі решта 0, або один елемент 1, один елемент -1 , всі решта 0, або ж усі 0. Сума її рядків $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} \Delta_\alpha$ по будь-якій підмножині $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ містить рівну кількість елементів 1 та -1 , всі решта 0; $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} \Delta_\alpha = 0$ тоді й лише тоді, коли $\sigma(\bar{\mathcal{A}}_0) = \bar{\mathcal{A}}_0$, тобто коли $\mathcal{A}_0$ є об'єднанням незвідних компонент. З останнього твердження, зокрема, випливає, що коядро матриці Δ містить вектори $c^{(i)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ із $c_\alpha^{(i)} = 1$ для $\alpha \in \mathcal{A}_i$ і рештою елементів 0, де $\mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq P$, — незвідні компоненти. Доведемо, що ці P лінійно незалежних векторів породжують усе коядро матриці Δ .

Припустимо, що $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_\alpha \Delta_\alpha = 0$ з певними коефіцієнтами $c \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ і $c_{\alpha^{(1)}} = c \neq 0$ для деякого $\alpha^{(1)} \in \mathcal{A}$. Якщо $\Delta_{\alpha^{(1)}} = 0$, то $\{\alpha^{(1)}\}$ є незвідною компонентою. В іншому випадку $\Delta_{\alpha^{(1)}}$ містить елемент 1, й існує єдине $\alpha^{(2)} \in \mathcal{A}$ таке, що рядок $\Delta_{\alpha^{(2)}}$ містить -1 у цій самій позиції. Звідси маємо $c_{\alpha^{(2)}} = c$. Якщо сума $\Delta_{\alpha^{(1)}} + \Delta_{\alpha^{(2)}} = 0$, то $\{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}\}$ є об'єднанням незвідних компонент. В іншому випадку $\Delta_{\alpha^{(1)}} + \Delta_{\alpha^{(2)}}$ містить елемент 1, й існує єдине $\alpha^{(3)} \in \mathcal{A}$ таке, що $\Delta_{\alpha^{(3)}}$ містить -1 у цій самій позиції. Звідси $c_{\alpha^{(3)}} = c$. Продовжуємо цей процес до тих пір, поки він не зупиниться. Зупинкою є визначення об'єднання незвідних компонент такого

$\mathcal{A}_0$, що $c_\alpha = c$ для всіх $\alpha \in \mathcal{A}_0$. Оскільки $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} \Delta_\alpha = 0$, ми видаляємо ці компоненти з вихідної суми й отримуємо натомість суму $\sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0} c_\alpha \Delta_\alpha = 0$ по зменшеній множині індексів. Якщо в ній ще залишився ненульовий коефіцієнт, то за такою ж процедурою виділимо ще одне об'єднання незвідних компонент. Продовжуючи відділяти такі об'єднання, врешті-решт одержимо, що вектор коефіцієнтів c справді є лінійною комбінацією векторів $c^{(i)}$, $1 \leq i \leq P$.

Отже, ми в явному вигляді описали коядро матриці Δ і показали, що його розмірність дорівнює P . Ранг цієї матриці є $d - P$ і розмірність ядра — $d + P$.

Твердження 1 доведено.

Вище ми позначили $N = N(\sigma)$ кількість циклів у перестановці σ . Маємо обмеження $N \geq P$, оскільки кожна незвідна компонента σ_i , $1 \leq i \leq P$, є перестановкою, а отже містить хоча б один цикл.

Твердження 2. $\dim(V_\sigma) = d + P - N$.

Доведення. Лінійний простір V_σ є образом лінійного простору X_σ під дією лінійного оператора, визначеного за рівностями (5). Ми в явному вигляді опишемо ядро цього лінійного оператора. Перестановка σ складається з N циклів, і розширений алфавіт $\bar{\mathcal{A}}$ розкладається на відповідні підмножини S_i , $1 \leq i \leq N$. Для кожного $\bar{\xi} \in S_i$ маємо $S_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} \sigma^j(\bar{\xi})$. З рівностей (5) випливає, що $\mathbf{v} = 0$ тоді й лише тоді, коли $x_{\sigma(\bar{\xi})} = x_{\bar{\xi}}$ для всіх $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}}$. Отже, описуване нами ядро складається з усіх векторів $\sum_{i=1}^N c_i \mathbf{x}^{(i)}$, де $x_{\bar{\xi}}^{(i)} = 1$ для $\bar{\xi} \in S_i$, а решта елементів 0, $c_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$. Оскільки вектори $\mathbf{x}^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, належать до X_σ , є лінійно незалежними і породжують усе ядро, його розмірність дорівнює N . Тепер із твердження 1 випливає, що розмірність V_σ є $d + P - N$.

Твердження 2 доведено.

Зауважимо, що з цього доведення випливає неочевидна нерівність $N \leq d + P$.

Воно також виправдовує концепцію плаваючих ПАІ $(\sigma, \mathbf{v})$ як результат факторизації простору закріплених ПАІ $(\sigma, \mathbf{x})$ щодо вільного совання їхніх циклів уздовж осі координат (хоча кількість циклів різна для різних схем).

7. Індукція для ПАІ. Означимо чотири елементарних індукційних кроки $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}$ в рамках концепції ПАІ. Їхній зміст є безпосереднім узагальненням таких кроків, що ми означили для ПІ у п. 3. Отже, ми залишимо для них ті ж самі позначення, хоча зараз ці оператори діють на інші дані, як дискретні, так і дійсні. Взагалі, не вдаючися до зайвих формальностей, будемо однаково позначати і називати ці кроки індукції в їхній дії на схеми ПАІ σ (а на схему вони діють незалежно від дійсної компоненти), на власне ПАІ, як закріплені $(\sigma, \mathbf{x})$, так і плаваючі $(\sigma, \mathbf{v})$, і навіть окремо на дійсні компоненти ПАІ (якщо схему зафіксовано контекстом). У п. 9 ми означимо натуральні розширення ПАІ, на які також діятимуть ці чотири кроки індукції.

Кроки $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}$ застосовуються у випадку $\sigma(\alpha\beta) = \beta\alpha$ (поворот назад у $\beta\alpha$, див. п. 5), а кроки $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}$ — у випадку $\sigma(\beta\alpha) = \alpha\beta$ (поворот назад у $\alpha\beta$).

У термінах циклів перестановки σ елементарні кроки індукції діють таким чином: крок $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$ (кроки $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}$) переміщує елемент $\beta\alpha$ (елементи $\alpha\beta$, $\beta\alpha$) з його поточної позиції у позицію просто перед $\alpha\alpha$ (просто після $\beta\beta$, просто після $\alpha\alpha$, просто перед $\beta\beta$). Можливі ситуації, в яких початкова і кінцева позиції переміщуваного елемента збігаються (наприклад, коли застосовується крок $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$, а $\beta\alpha$ вже стоїть просто перед $\alpha\alpha$), тоді схема залишається без

змін. (Кажучи, що $\bar{\xi}$ стоїть просто перед $\bar{\eta}$, а $\bar{\eta}$ стоїть просто після $\bar{\xi}$, ми маємо на увазі, що $\sigma(\bar{\xi}) = \bar{\eta}$, $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in \bar{\mathcal{A}}$.)

Формально, нехай σ' — схема ПАІ, яку отримано зі схеми σ в результаті індукційного кроку. Дія чотирьох кроків на схемах описується таким чином:

$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$: якщо $\sigma(\beta e) = \alpha e$, то $\sigma' = \sigma$; інакше $\sigma'(\alpha b) = \sigma(\beta e)$, $\sigma'(\beta e) = \alpha e$, $\sigma'(\sigma^{-1}(\alpha e)) = \beta e$, $\sigma'(\bar{\xi}) = \sigma(\bar{\xi})$ для $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\alpha b, \beta e, \sigma^{-1}(\alpha e)\}$,

$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}$: якщо $\sigma(\beta b) = \alpha b$, то $\sigma' = \sigma$; інакше $\sigma'(\sigma^{-1}(\alpha b)) = \beta e$, $\sigma'(\beta b) = \alpha b$, $\sigma'(\alpha b) = \sigma(\beta b)$, $\sigma'(\bar{\xi}) = \sigma(\bar{\xi})$ для $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\sigma^{-1}(\alpha b), \beta b, \alpha b\}$,

$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}$: якщо $\sigma(\alpha e) = \beta e$, то $\sigma' = \sigma$; інакше $\sigma'(\sigma^{-1}(\beta e)) = \alpha b$, $\sigma'(\alpha e) = \beta e$, $\sigma'(\beta e) = \sigma(\alpha e)$, $\sigma'(\bar{\xi}) = \sigma(\bar{\xi})$ для $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\sigma^{-1}(\beta e), \alpha e, \beta e\}$,

$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}$: якщо $\sigma(\alpha b) = \beta b$, то $\sigma' = \sigma$; інакше $\sigma'(\beta e) = \sigma(\alpha b)$, $\sigma'(\alpha b) = \beta b$, $\sigma'(\sigma^{-1}(\beta b)) = \alpha b$, $\sigma'(\bar{\xi}) = \sigma(\bar{\xi})$ для $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\beta e, \alpha b, \sigma^{-1}(\beta b)\}$.

Твердження 3. Елементарний крок індукції $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$ (кроки $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}$) діє на схемах ПАІ як бієкція з множини всіх σ , для яких $\sigma(\alpha b) = \beta e$ (для яких $\sigma(\alpha b) = \beta e$, $\sigma(\beta e) = \alpha b$, $\sigma(\beta e) = \alpha b$), на множину всіх σ' , для яких $\sigma'(\beta e) = \alpha e$ (для яких $\sigma'(\beta b) = \alpha b$, $\sigma'(\alpha e) = \beta e$, $\sigma'(\alpha b) = \beta b$).

Кожен із цих кроків зберігає кількість циклів та множину незвідних компонент схеми.

Доведення проведемо для $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$ (три інших випадки доводяться аналогічно).

Отже, проаналізуємо перший блок із наведених вище формул. За припущення, що $\sigma(\alpha b) = \beta e$, легко бачити, що з них в обох випадках випливає $\sigma'(\beta e) = \alpha e$. Очевидно, що множини перестановок $\{\sigma : \sigma(\alpha b) = \beta e\}$ і $\{\sigma' : \sigma'(\beta e) = \alpha e\}$ містять однакову кількість елементів (а саме, $(2d - 1)!$ елементів), тому достатньо довести, що $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$ відображає першу множину на другу, тобто є сюр'єкцією. Візьмемо довільне σ' таке, що $\sigma'(\beta e) = \alpha e$, і визначимо відповідне σ таким чином:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } \sigma'(\alpha b) = \beta e, \quad \text{то } \sigma = \sigma'; \\ &\text{інакше } \sigma(\beta e) = \sigma'(\alpha b), \quad \sigma(\alpha b) = \beta e, \quad \sigma((\sigma')^{-1}(\beta e)) = \alpha e, \\ &\sigma(\bar{\xi}) = \sigma'(\bar{\xi}) \quad \text{для } \bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\beta e, \alpha b, (\sigma')^{-1}(\beta e)\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Неважко перевірити, що ми отримаємо $\sigma(\alpha b) = \beta e$ в обох випадках, і $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}(\sigma) = \sigma'$, отже, σ' справді має прообраз. (Зазначимо, що ми навели явні формули для оберненого відображення $(\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}})^{-1}$ на схемах і скористаємося ними в наступному пункті.)

Щодо циклів у σ і σ' : один-єдиний елемент βe спочатку видаляється з циклу, що містить αb , а потім вставляється в цикл, що містить αe . Це може бути один і той самий цикл, але жоден із них не є і не стає порожнім, тому загальна кількість циклів не змінюється.

Зрештою, щодо незвідних компонент: два вищезгаданих цикли (які можуть збігатися між собою) належать до однієї й тієї ж незвідної компоненти (а саме тієї, що містить мітку α), і тому переміщення мітки βe не змінює жодної з незвідних компонент.

Твердження 3 доведено.

Тепер опишемо дію елементарних кроків індукції на дійсних даних. Описовою мовою, під дією $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$ ($\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}$) два інтервали з міткою α (β , α , β) обрізаються справа (справа, зліва, зліва) на довжину двох інтервалів із міткою β (α , β , α) і інтервал $I_{\beta e}$ ($I_{\alpha b}$, $I_{\beta e}$, $I_{\alpha b}$) переміщується в положення просто справа (просто справа, просто зліва, просто зліва) від обрізаного вказаним чином інтервалу $I_{\alpha e}$ ($I_{\beta b}$, $I_{\alpha e}$, $I_{\beta b}$).

Формально, нехай $(\sigma', \mathbf{x}')$ — ПАІ, отриманий з ПАІ $(\sigma, \mathbf{x})$ в результаті застосування індукційного кроку, а $\mathbf{v}$ обчислено за формулами (5). Наші чотири індукційних кроки діють на векторах країв таким чином:

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}: x'_{\beta e} = x_{\alpha e}, x'_{\alpha e} = x_{\alpha e} - v_{\beta}, x'_{\xi} = x_{\xi} \text{ для } \bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\beta e, \alpha e\},$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}: x'_{\beta e} = x_{\alpha b}, x'_{\alpha b} = x_{\sigma(\beta b)} - v_{\alpha}, x'_{\xi} = x_{\xi} \text{ для } \bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\beta e, \alpha b\},$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}: x'_{\alpha b} = x_{\beta e}, x'_{\beta e} = x_{\sigma(\alpha e)} + v_{\beta}, x'_{\xi} = x_{\xi} \text{ для } \bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\alpha b, \beta e\},$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}: x'_{\alpha b} = x_{\beta b}, x'_{\beta b} = x_{\beta b} + v_{\alpha}, x'_{\xi} = x_{\xi} \text{ для } \bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\alpha b, \beta b\}.$$

Нехай нарешті $\mathbf{v}'$ — вектор довжин для ПАІ $(\sigma', \mathbf{x}')$. На векторах довжин елементарні кроки індукції діють так:

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}} \text{ і } \Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}: v'_{\alpha} = v_{\alpha} - v_{\beta}, v'_{\xi} = v_{\xi} \text{ для } \xi \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha\},$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}} \text{ і } \Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}: v'_{\beta} = v_{\beta} - v_{\alpha}, v'_{\xi} = v_{\xi} \text{ для } \xi \in \mathcal{A} \setminus \{\beta\}.$$

Твердження 4. Коли елементарний індукційний крок перетворює схему σ на схему σ' , на дійсних компонентах ПАІ він діє як лінійна бієкція між просторами дозволених країв X_{σ} і $X_{\sigma'}$ та як лінійна бієкція між просторами дозволених довжин V_{σ} і $V_{\sigma'}$.

Доведення. Нехай σ — фіксований елемент із множини означення фіксованого кроку індукції (тобто $\sigma(\alpha b) = \beta e$, а крок — це $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$ чи $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}$; або ж $\sigma(\beta e) = \alpha b$, а крок — це $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}$ чи $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}$, з певними $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$).

Наведені вище формули для $\mathbf{x}'$ і $\mathbf{v}'$ справді є лінійними. Внаслідок другої частини твердження 3 та з огляду на твердження 1 і 2 простори дозволених країв X_{σ} і $X_{\sigma'}$ мають однакову розмірність; те ж саме є правильним щодо просторів дозволених довжин V_{σ} і $V_{\sigma'}$. Отже, достатньо показати, що крок індукції відображає X_{σ} на $X_{\sigma'}$ і V_{σ} на $V_{\sigma'}$ сюр'єктивно.

У випадку кроку $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$ для даного $\mathbf{x}' \in X_{\sigma'}$ (і відповідного $\mathbf{v}' \in V_{\sigma'}$, заданого рівностями $v'_{\xi} = x'_{\sigma'(\xi b)} - x'_{\xi b} = x'_{\xi e} - x'_{\sigma'(\xi e)}$, $\xi \in \mathcal{A}$) покладемо

$$x_{\alpha e} = x'_{\beta e}, \quad x_{\beta e} = x'_{\sigma'(\alpha b)} + v'_{\beta}, \quad x_{\bar{\xi}} = x'_{\bar{\xi}} \text{ для } \bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\alpha e, \beta e\},$$

$$v_{\alpha} = v'_{\alpha} + v'_{\beta}, \quad v_{\xi} = v'_{\xi} \text{ для } \xi \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha\}.$$

Неважко перевірити, що $\mathbf{x} \in X_{\sigma}$, $\mathbf{v} \in V_{\sigma}$ узгоджується з $\mathbf{x}$ відповідно до (5) і $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}$ справді перетворює $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}'$, а $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}'$.

Для трьох інших елементарних індукційних кроків обернені формули на дійсних даних можна отримати та перевірити аналогічним чином.

Твердження 4 доведено.

Зауваження 5. Перетворення довжин $V_\sigma \rightarrow V_{\sigma'}$ відбувається незалежно від перетворення країв $X_\sigma \rightarrow X_{\sigma'}$, тому можна з однаковим успіхом досліджувати індукцію на плаваючих ПАІ (σ, v) та на закріплених ПАІ (σ, x) , і кожен має право вибрати той підхід, що більше пасує до мети дослідження.

Зауваження 6. Якщо під час індукції необхідно забезпечувати додатність ПАІ, то кроки $\Pi_{\alpha\beta}^{rb}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{lb}$ можна застосовувати лише за умови $v_\alpha > v_\beta$, а кроки $\Pi_{\alpha\beta}^{re}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{le}$ — лише за умови $v_\alpha < v_\beta$. Легко бачити, що якщо ПАІ (σ, v) є додатним та загального положення (в тому сенсі, що довжини v_ξ , $\xi \in \mathcal{A}$, є попарно різними), то для кожного повороту назад чи вперед у циклі перестановки σ із сусідніми елементами αb і βe , $\alpha \neq \beta$, в точності один із чотирьох елементарних кроків $\Pi_{\alpha\beta}^{\cdot}$ можна застосувати зі збереженням додатності.

8. Дуальність та симетрія обернення часу. Означимо дуальність між схемами ПАІ, яка є наріжним каменем нашої конструкції, тому що дозволяє обертати процес індукції в часі.

Дві схеми ПАІ σ і σ^* назовемо *дуальними* одна до одної (або *взаємодуальними*), якщо

$$\sigma^*(\alpha b) = \sigma(\alpha e), \quad \sigma^*(\alpha e) = \sigma(\alpha b) \quad \text{для всіх} \quad \alpha \in \mathcal{A}. \quad (8)$$

Співвідношення (8) визначають *інволюцію дуальності* $\mathcal{I}$ у просторі всіх схем як $\mathcal{I}\sigma = \sigma^*$. Можна записати її у вигляді $\mathcal{I}\sigma = \sigma \circ \iota$, де ι — перестановка подвоєного алфавіту $\bar{\mathcal{A}}$, яка міняє місцями αb з αe для кожного $\alpha \in \mathcal{A}$.

З означення одразу випливає, що взаємодуальні схеми мають одні й ті самі незвідні компоненти, але кількість циклів у σ й σ^* є, взагалі кажучи, різною.

Наш основний результат описує симетрію обернення часу для індукції на схемах.

Теорема 1. *Кожна з наступних рівностей має місце на множині всіх тих схем, для яких її ліва частина визначена (див. твердження 3):*

$$(\Pi_{\alpha\beta}^{rb})^{-1} = \mathcal{I} \circ \Pi_{\beta\alpha}^{rb} \circ \mathcal{I},$$

$$(\Pi_{\alpha\beta}^{re})^{-1} = \mathcal{I} \circ \Pi_{\alpha\beta}^{lb} \circ \mathcal{I},$$

$$(\Pi_{\alpha\beta}^{lb})^{-1} = \mathcal{I} \circ \Pi_{\alpha\beta}^{re} \circ \mathcal{I},$$

$$(\Pi_{\alpha\beta}^{le})^{-1} = \mathcal{I} \circ \Pi_{\beta\alpha}^{le} \circ \mathcal{I}.$$

Доведення. Встановимо першу рівність (решта доводяться аналогічно).

Відповідно до твердження 3, ліва частина цієї рівності є визначеною на множині схем $\{\sigma' : \sigma'(\beta e) = \alpha e\}$. Розглянемо довільну схему σ' з цієї множини. По-перше, $\mathcal{I}\sigma'(\beta b) = \alpha e$, що робить $\Pi_{\beta\alpha}^{rb}$ визначеним на $\mathcal{I}\sigma'$. Схема $\sigma = (\Pi_{\beta\alpha}^{rb})^{-1}\sigma'$ задається формулами (7). Маємо перевірити, що $\mathcal{I} \circ \Pi_{\beta\alpha}^{rb} \circ \mathcal{I}\sigma'$ є тим самим σ .

Якщо $\sigma'(\alpha b) = \beta e$, то $\sigma = \sigma'$. З іншого боку, $\mathcal{I}\sigma'(\alpha e) = \beta e$, тому $\Pi_{\beta\alpha}^{rb} \circ \mathcal{I}\sigma' = \mathcal{I}\sigma'$, а $\mathcal{I} \circ \Pi_{\beta\alpha}^{rb} \circ \mathcal{I}\sigma' = \mathcal{I} \circ \mathcal{I}\sigma' = \sigma' = \sigma$. Рівність має місце.

Тепер розглянемо випадок, коли $\sigma'(\alpha b) \neq \beta e$. Позначимо $\tau = \mathcal{I}\sigma'$ і $\tau' = \Pi_{\beta\alpha}^{rb}\tau$. Оскільки $\tau(\alpha e) \neq \beta e$, то $\tau'(\beta b) = \tau(\alpha e)$, $\tau'(\alpha e) = \beta e$, $\tau'(\tau^{-1}(\beta e)) = \alpha e$ і $\tau'(\bar{\xi}) = \tau(\bar{\xi})$ для решти $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\beta b, \alpha e, \tau^{-1}(\beta e)\}$. Підставляючи $\tau = \sigma' \circ \iota$, одержуємо $\tau'(\beta b) = \sigma'(\alpha b)$ і $\tau'(\iota((\sigma')^{-1}(\beta e))) = \alpha e$. Отже, маємо $\mathcal{I}\tau'(\beta e) = \sigma'(\alpha b)$, $\mathcal{I}\tau'(\alpha b) = \beta e$, $\mathcal{I}\tau'((\sigma')^{-1}(\beta e)) = \alpha e$ і $\mathcal{I}\tau'(\bar{\xi}) = \sigma'(\bar{\xi})$ для решти $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}} \setminus \{\beta e, \alpha b, (\sigma')^{-1}(\beta e)\}$. Таким чином, знову приходимо до рівності $\mathcal{I}\tau' = \sigma$.

Теорему 1 доведено.

На початку п. 5 ми означили повороти назад і вперед, а також число покручення $T = T(\sigma)$ схеми ПАІ σ .

Твердження 5. Сумарна кількість поворотів назад (як і поворотів уперед) у двох взаємодуальних схемах ПАІ дорівнює d .

Доведення. Розглянемо довільну схему ПАІ σ разом із дуальною до неї схемою $\sigma^* = \mathcal{I}\sigma$. Для кожного $\alpha \in \mathcal{A}$ двоточкові множини $\{\sigma(\alpha b), \sigma(\alpha e)\}$ і $\{\sigma^*(\alpha b), \sigma^*(\alpha e)\}$ збігаються одна з одною; позначимо їх M_α . Поворот (назад або вперед) у схемі σ має місце тоді, коли $\sigma(\xi_1 b) = \xi_2 e$ або $\sigma(\xi_1 e) = \xi_2 b$ для деяких $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{A}$, і аналогічно для σ^* . Два елементи множини M_α можуть мати другою компонентою або обидва b , або обидва e , або ж один b , а другий e . Легко перевіряється, що в усіх трьох випадках сумарна кількість поворотів у елементах M_α і вперед, і назад, і для σ , і для σ^* завжди дорівнює 2. Оскільки є d множин M_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, а $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha(\sigma) = \bar{\mathcal{A}}$, то сумарна кількість поворотів (знову ж таки і вперед, і назад, і для σ , і для σ^*) дорівнює $2d$. Оскільки поворотів уперед і поворотів назад завжди однакова кількість, твердження доведено.

Назвемо повним покрученням схеми ПАІ σ значення суми $T(\sigma) + T(\sigma^*)$, тобто суму чисел покручення взаємодуальних схем σ і $\sigma^* = \mathcal{I}\sigma$. З твердження 5 випливає рівність

$$T(\sigma) + T(\sigma^*) + N(\sigma) + N(\sigma^*) = d, \quad (9)$$

де $N(\sigma)$ і $N(\sigma^*)$ — кількості циклів у σ і σ^* відповідно. Ми приходимо до наступного важливого спостереження.

Твердження 6. Елементарні індукційні кроки $\Pi_{\alpha\beta}^{rb}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{lb}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{re}$ і $\Pi_{\alpha\beta}^{le}$ у своїй дії на схеми ПАІ зберігають їхнє повне покручення.

Доведення. Згідно з теоремою 1, якщо схема σ перетворюється на σ' в результаті застосування кроку індукції, то схема $(\sigma')^*$ перетворюється на σ^* також у результаті застосування кроку індукції. Тому $N(\sigma') = N(\sigma)$, $N((\sigma')^*) = N(\sigma^*)$ за твердженням 3. Тепер із рівності (9) випливає, що $T(\sigma) + T(\sigma^*) = T(\sigma') + T((\sigma')^*)$.

Твердження 6 доведено.

Останнє твердження означає, що кожного разу, коли крок індукції видаляє зі схеми ПАІ поворот, цей поворот насправді не зникає, а швидше передається в дуальну схему. Покажемо як це відбувається.

Розглянемо крок $\Pi_{\alpha\beta}^{rb}$ (нагадаємо, що $\alpha \neq \beta$ за означенням); три інших випадки аналогічні. Легко бачити, що $\Pi_{\alpha\beta}^{rb}$ видаляє поворот зі схеми σ тоді й лише тоді, коли $\sigma(\alpha b) = \beta e$, а $\sigma(\beta e) = \gamma b$ для деякого $\gamma \in \mathcal{A}$. У цьому випадку βe переміщується з позиції проміж αb і γb на позицію просто справа від αe , один поворот назад (як і один поворот уперед) зникає, а число покручення зменшується на одиницю. Формально маємо $\sigma'(\alpha b) = \gamma b$ і $\sigma'(\alpha e) = \beta e$ для $\sigma' = \Pi_{\alpha\beta}^{rb}\sigma$. За дуальністю $\mathcal{I}\sigma(\beta e) = \alpha e$ і $\mathcal{I}\sigma(\beta b) = \gamma b$; $\mathcal{I}\sigma'(\beta b) = \alpha e$ і $\mathcal{I}\sigma'(\alpha e) = \gamma b$, отже, в результаті дії кроку $(\Pi_{\alpha\beta}^{rb})^{-1}$ на $\mathcal{I}\sigma$ елемент αe переміщується з позиції просто справа від βe на позицію проміж βb і γb , один поворот назад (як і один поворот уперед) додається, і число покручення збільшується на одиницю. (Можна перевірити, що це все працює також і у вироджених випадках $\gamma = \alpha$ і $\gamma = \beta$.)

Зауваження 7. Останнє твердження додає ще один аргумент на користь необхідності розглядати саме ПАІ, а не ПІ: як правило, дуальна до непокрученої схеми ПІ схема не є схемою ПІ, будучи покрученою, а повне покручення характеризує пару взаємодуальних схем $(\sigma, \mathcal{I}\sigma)$ як єдине ціле і не змінюється під час індукції. Природно узагальнити класичне поняття класів

Розі для Π на схемі ПАІ: якщо одна схема ПАІ одержується з іншої в результаті застосування елементарного індукційного кроку, то вони належать до одного класу *Розі*. Тепер кожен клас *Розі* може містити як непокручені, так і покручені схеми ПАІ, але повне покручення є однако-вим для всього класу. Індукція може перекидати повороти між схемою ПАІ та дуальною до неї схемою, але повне покручення залишається незмінним.

Твердження 7. *Сумарна кількість циклів у двох взаємодуальних схемах має парність числа d . Повне покручення завжди є парним числом.*

Доведення. Як відомо, кожна перестановка розкладається у добуток транспозицій і є або парною, або непарною відповідно до кількості таких транспозицій. Множення перестановки на транспозицію змінює парність цієї перестановки, а також парність кількості циклів у ній. Кожен цикл довжини $l \geq 1$ є добутком $l - 1$ транспозицій, а тому будь-яка перестановка d елементів є добутком $d - N$ транспозицій, де $N \geq 1$ — кількість циклів у ній. Розглянемо наступну „хірургічну” процедуру на схемах ПАІ.

Для схеми σ припустимо, що $\sigma(\bar{\xi}_0) \neq \bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}_0 \in \bar{\mathcal{A}}$. Позначимо $\bar{\xi}_1 = \sigma^{-1}(\bar{\xi}_0)$, $\bar{\xi}_2 = \sigma(\bar{\xi}_0)$. Відщепимо елемент $\bar{\xi}_0$ від циклу, якому він належить, перетворивши σ на σ' таку, що $\sigma'(\bar{\xi}_1) = \bar{\xi}_2$, $\sigma'(\bar{\xi}_0) = \bar{\xi}_0$, $\sigma'(\bar{\xi}) = \sigma(\bar{\xi})$ для $\bar{\xi} \notin \{\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1\}$. Легко бачити, що $\sigma' = (\bar{\xi}_0 \leftrightarrow \bar{\xi}_2) \circ \sigma$, де $\bar{\xi}_0 \leftrightarrow \bar{\xi}_2$ позначає транспозицію елементів $\bar{\xi}_0$ і $\bar{\xi}_2$. Оскільки за нашим припущенням $\bar{\xi}_2 \neq \bar{\xi}_0$, кількість циклів у схемі σ' має іншу парність, ніж у схемі σ . Для дуальних схем маємо $\mathcal{I}\sigma(\bar{\xi}_1^*) = \bar{\xi}_0$, $\mathcal{I}\sigma(\bar{\xi}_0^*) = \bar{\xi}_2$, $\mathcal{I}\sigma'(\bar{\xi}_1^*) = \bar{\xi}_2$, $\mathcal{I}\sigma'(\bar{\xi}_0^*) = \bar{\xi}_0$, $\mathcal{I}\sigma'(\bar{\xi}) = \mathcal{I}\sigma(\bar{\xi})$ для решти $\bar{\xi} \notin \{\bar{\xi}_0^*, \bar{\xi}_1^*\}$ (тут ми позначили $\bar{\xi}_0^* = \iota(\bar{\xi}_0)$, $\bar{\xi}_1^* = \iota(\bar{\xi}_1)$). Бачимо, що $\mathcal{I}\sigma' = (\bar{\xi}_0 \leftrightarrow \bar{\xi}_2) \circ \mathcal{I}\sigma$, а отже кількість циклів у схемі $\mathcal{I}\sigma'$ має іншу парність, ніж у схемі $\mathcal{I}\sigma$. З цього випливає, що сумарна кількість циклів у схемах σ і $\mathcal{I}\sigma$ має таку ж саму парність, як сумарна кількість циклів у схемах σ' і $\mathcal{I}\sigma'$.

Ми показали, що описана процедура зберігає парність сумарної кількості циклів у схемі та дуальній до неї схемі. Послідовно застосовувавши таке відщеплювання до кожного з елементів $\bar{\mathcal{A}}$, які перестановка не залишає на місці, ми зрештою отримаємо тотожну перестановку, а дуальною до неї є ніщо інше як ι (яку ми означили на початку цього пункту). Кількість циклів у тотожній перестановці дорівнює $2d$, тоді як у ι їх d . Отже, парність сумарної кількості циклів дорівнює парності d .

Друге твердження випливає з першого з огляду на рівність (9).

Твердження 7 доведено.

У п. 10 показано, що натуральне число

$$g = g(\sigma) = \frac{T(\sigma) + T(\mathcal{I}\sigma)}{2} + 1$$

є топологічним родом трансляційних поверхонь, асоційованих із ПАІ зі схемою σ .

Зауваження 8. Дуже особливий клас складають додатні схеми ПАІ з нульовим повним покрученням, які ми називаємо *ротаційними* за їхній зв'язок із ірраціональними поворотами кола. Ротаційні схеми ПАІ можна еквівалентно означити як схеми для Π (на багатьох проміжках) такі, що дуальні до них є так само схемами для Π .

9. Натуральне розширення ПАІ. Показавши дуальність та симетрію обернення часу на схемах ПАІ, природним наступним кроком буде означити *натуральне розширення* ПАІ як пару з двох ПАІ $[(\sigma, \mathbf{x}), (\sigma^*, \mathbf{y})]$ (або, коротко, як трійку $(\sigma, \mathbf{x}, \mathbf{y})$), де $\sigma^* = \mathcal{I}\sigma$, $\mathbf{x} \in X_\sigma$, $\mathbf{y} \in X_{\sigma^*}$, з такою динамікою щодо індукції:

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}[(\sigma, \mathbf{x}), (\sigma^*, \mathbf{y})] = [\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}(\sigma, \mathbf{x}), (\Pi_{\beta\alpha}^{\text{rb}})^{-1}(\sigma^*, \mathbf{y})],$$

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}[(\sigma, \mathbf{x}), (\sigma^*, \mathbf{y})] &= [\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}(\sigma, \mathbf{x}), (\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}})^{-1}(\sigma^*, \mathbf{y})], \\ \Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}[(\sigma, \mathbf{x}), (\sigma^*, \mathbf{y})] &= [\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}(\sigma, \mathbf{x}), (\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}})^{-1}(\sigma^*, \mathbf{y})], \\ \Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}[(\sigma, \mathbf{x}), (\sigma^*, \mathbf{y})] &= [\Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}(\sigma, \mathbf{x}), (\Pi_{\beta\alpha}^{\text{le}})^{-1}(\sigma^*, \mathbf{y})].\end{aligned}$$

Коректність цього означення узгоджується з теоремою 1.

Оскільки кроки індукції перетворюють довжини незалежно від країв, можна так само розглянути плаваючі натуральні розширення ПАІ як пари $[(\sigma, \mathbf{v}), (\sigma^*, \mathbf{w})]$ (або, коротко, як трійки $(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})$), де $\sigma^* = \mathcal{I}\sigma$, $\mathbf{v} \in V_\sigma$, $\mathbf{w} \in V_{\sigma^*}$. Довжини обраховуються з країв за формулами (5) і $w_\alpha = y_{\sigma(\alpha_b)} - y_{\alpha_b} = y_{\alpha_e} - y_{\sigma(\alpha_e)}$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Індукційна динаміка аналогічна:

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}[(\sigma, \mathbf{v}), (\sigma^*, \mathbf{w})] &= [\Pi_{\alpha\beta}^{\text{rb}}(\sigma, \mathbf{v}), (\Pi_{\beta\alpha}^{\text{rb}})^{-1}(\sigma^*, \mathbf{w})], \\ \Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}[(\sigma, \mathbf{v}), (\sigma^*, \mathbf{w})] &= [\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}}(\sigma, \mathbf{v}), (\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}})^{-1}(\sigma^*, \mathbf{w})], \\ \Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}[(\sigma, \mathbf{v}), (\sigma^*, \mathbf{w})] &= [\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}(\sigma, \mathbf{v}), (\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}})^{-1}(\sigma^*, \mathbf{w})], \\ \Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}[(\sigma, \mathbf{v}), (\sigma^*, \mathbf{w})] &= [\Pi_{\alpha\beta}^{\text{le}}(\sigma, \mathbf{v}), (\Pi_{\beta\alpha}^{\text{le}})^{-1}(\sigma^*, \mathbf{w})].\end{aligned}$$

Площа натурального розширення ПАІ — дійсне число

$$S = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} v_\alpha w_\alpha,$$

яке індукція залишає без змін.

Твердження 8. *Елементарні кроки індукції на натуральних розширеннях ПАІ зберігають їхні площі.*

Доведення проведемо для $\Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}$ (для трьох інших кроків доведення аналогічне).

Розглянемо довільну перестановку σ , яка задовольняє $\sigma(\alpha_b) = \beta_e$, $\alpha \neq \beta$ (умова застосовності даного кроку індукції), і довільні вектори $\mathbf{v} \in V_\sigma$, $\mathbf{w} \in V_{\mathcal{I}\sigma}$. Нехай $(\sigma', \mathbf{v}', \mathbf{w}') = \Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}}(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Як ми вже знаємо з п. 7, $\mathbf{v}' = \Pi_{\alpha\beta}^{\text{lb}} \mathbf{v}$ означає, що $v'_\alpha = v_\alpha - v_\beta$, $v'_\xi = v_\xi$ для решти $\xi \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha\}$. З іншого боку, $\mathcal{I}\sigma = \Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}} \mathcal{I}\sigma'$ за теоремою 1, $(\Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}})^{-1}(\mathcal{I}\sigma, \mathbf{w}) = (\mathcal{I}\sigma', \mathbf{w}')$ за означенням індукції на натуральних розширеннях і $\mathbf{w} = \Pi_{\alpha\beta}^{\text{re}} \mathbf{w}'$ означає, що $w_\beta = w'_\beta - w'_\alpha$, $w_\xi = w'_\xi$ для решти $\xi \in \mathcal{A} \setminus \{\beta\}$, а отже, $w'_\beta = w_\beta + w_\alpha$, $w'_\xi = w_\xi$ для решти $\xi \in \mathcal{A} \setminus \{\beta\}$. Відповідно, для площі маємо

$$\begin{aligned}S' = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}' &= \sum_{\xi \notin \{\alpha, \beta\}} v'_\xi w'_\xi + v'_\alpha w'_\alpha + v'_\beta w'_\beta = \\ &= \sum_{\xi \notin \{\alpha, \beta\}} v_\xi w_\xi + (v_\alpha - v_\beta) w_\alpha + v_\beta (w_\beta + w_\alpha) = \sum_{\xi \in \mathcal{A}} v_\xi w_\xi = S.\end{aligned}$$

Твердження 8 доведено.

10. Поверхні та потоки, асоційовані з ПАІ. Віч у [6] запропонував конструкцію поверхні та потоку, підвішеного над (класичним) ПІ, у формі так званих *zippered rectangles* (дослівно „зчеплених застібками-блискавками прямокутників”), яку потім без змін використовували у своїх роботах багато дослідників ПІ (див. добре ілюстрований виклад цієї теорії в оглядовій

статті Віани [7], що є у вільному доступі в мережі інтернет з ініціативи автора). Зараз ми опишемо наше узагальнення цієї класичної конструкції і пояснимо, чому воно є навіть природнішим за оригінал.

Нехай ми маємо *додатне* натуральне розширення ПАІ $(\sigma, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, тобто обидва ПАІ $(\sigma, \mathbf{x})$ і $(\sigma^*, \mathbf{y})$ є додатними, де $\sigma^* = \mathcal{I}\sigma$. Розглянемо диз'юнктний набір із d прямокутників $R_\xi = [0, v_\xi] \times [0, w_\xi]$, $\xi \in \mathcal{A}$. Ідентифікуємо їхні нижні та верхні сторони з початковими і кінцевими інтервалами $I_{\xi b}$ та $I_{\xi e}$, $\xi \in \mathcal{A}$, ПАІ $(\sigma, \mathbf{x})$ відповідно, а їхні ліві та праві сторони — з початковими і кінцевими інтервалами $I_{\xi b}^*$ та $I_{\xi e}^*$, $\xi \in \mathcal{A}$, ПАІ $(\sigma^*, \mathbf{y})$ відповідно.

У п. 5 ми описали алгоритм перетворення додатного ПАІ на динамічну систему на дереві, який включав у себе довільний вибір $T(\sigma)$ точок розгалуження на певних підпроміжках. Застосуємо цей алгоритм спочатку до $(\sigma, \mathbf{x})$, а потім до $(\sigma^*, \mathbf{y})$ (що включатиме вибір точок розгалуження у кількості, яка дорівнює повному покриттю схеми σ).

Тепер склеїмо між собою сторони прямокутників R_ξ , $\xi \in \mathcal{A}$, відповідно до того, як склеєно проміжки у двох ПАІ згідно з нашим вибором точок розгалуження. Тобто якщо початкову точку $x \in I_{\xi b}$ підклеєно до кінцевої точки $x' \in I_{\xi' e}$ для деяких $\xi, \xi' \in \mathcal{A}$, то точка $(x - x_{\xi b}, 0)$ нижньої сторони прямокутника R_ξ підклеюється до точки $(x' - x_{\sigma(\xi' e)}, w_{\xi'})$ верхньої сторони прямокутника $R_{\xi'}$; якщо початкову точку $y \in I_{\eta b}^*$ підклеєно до кінцевої точки $y' \in I_{\eta' e}$ для деяких $\eta, \eta' \in \mathcal{A}$, то точка $(0, y - y_{\eta b})$ лівої сторони прямокутника R_η підклеюється до точки $(v_{\eta'}, y' - y_{\sigma^*(\eta' e)})$ правої сторони прямокутника $R_{\eta'}$.

Внаслідок такої операції внутрішності прямокутників залишаються роз'єднаними, тоді як кожна точка їхніх лівих сторін є ідентифікованою з деякою точкою їхніх правих сторін і навпаки, а кожна точка їхніх нижніх сторін є ідентифікованою з деякою точкою їхніх верхніх сторін і навпаки. Та навіть більше, всі сторони всіх прямокутників можуть бути розділеними на скінченну кількість фрагментів — відрізків, кожен із яких підклеєно до відповідної протилежної сторони цілим, тобто шляхом паралельного переносу на координатній площині.

Топологічна поверхня, яку при цьому отримано, являє собою двовимірний орієнтовний многовид без краю, а геометрично це плоска ріманова поверхня з $T(\sigma) + T(\sigma^*)$ особливими точками з повним кутом 4π у кожній. (Це випадок загального положення, але ніщо не заважає деяким з особливих точок збігатися між собою, і якщо деякі k із них справді збіглися, то вони зливаються в одну особливу точку з повним кутом $2(k+1)\pi$ у ній.) Топологічний рід цієї поверхні g , очевидно, задовольняє рівність

$$2g - 2 = T(\sigma) + T(\mathcal{I}\sigma),$$

як було вказано наприкінці п. 8. (Читач може знайти у [6] чи [7] більш докладну інтерпретацію властивостей таких поверхонь у термінах ріманових многовидів і голоморфних 1-форм.)

На побудованій нами плоскій поверхні розглянемо два трансверсальних потоки: вертикальний потік із вектором швидкості, паралельним $\overrightarrow{(0, 1)}$, і горизонтальний потік із вектором швидкості, паралельним $\overrightarrow{(1, 0)}$ (обидва потоки природно розгалужуються в особливих точках). Обидва потоки можна взяти сталими за швидкістю чи ні, в залежності від мети дослідження. Згідно з конструкцією, горизонтальні сторони прямокутників є склеєними в горизонтальне дерево, і асоційована з ПАІ $(\sigma, \mathbf{x})$ динамічна система є в точності перерізом Пуанкаре для описаного вище вертикального потоку крізь трансверсальне до нього горизонтальне дерево. Аналогічно, вертикальні сторони прямокутників є склеєними у вертикальне дерево, й асоційована з дуальним ПАІ $(\sigma^*, \mathbf{y})$ динамічна система є перерізом Пуанкаре для горизонтального потоку

крізь трансверсальне до нього вертикальне дерево. Вертикальний потік можна розглядати як підвішений потік над асоційованим із ПАІ (σ, x) перекладанням інтервалів на горизонтальному дереві, а горизонтальний потік — як підвішений над асоційованим із дуальним ПАІ (σ^*, y) перекладанням інтервалів на вертикальному дереві.

Оскільки класичне ПІ на одному проміжку є частинним випадком з точки зору концепції ПАІ, наш алгоритм може бути застосований і до класичного ПІ. Цікаво порівняти результат застосування нашого алгоритму з оригінальною конструкцією Віча. Таке порівняння показує, що означена у [6] перестановка (2.1) насправді описує дуальну до вихідної перестановку в нашому розумінні, а вектор висот h у [6] відповідає нашому вектору довжин w для дуального ПАІ. Але основна відмінність полягає у специфічних обмеженнях, накладених Вічем на його конструкцію без жодних пояснень. У нашій термінології: для кожного циклу дуальної схеми ПАІ чомусь вимагається, щоб усі точки розгалуження, належні до інтервалів цього циклу, мали однакову координату, тобто склеювалися всі в одну. (Є також друге обмеження, але воно не настільки важливе: згідно з конструкцією Віча одна з точок розгалуження повинна мати координату $x_{\alpha b}$, де α — мітка крайнього лівого початкового інтервалу ПІ.) Результатом цього неприродного обмеження, з одного боку, є те, що кількість та кратність особливих точок на поверхні зчеплених прямокутників однозначно визначаються за дискретною компонентою ПІ. З іншого боку, це обмеження накладає відповідні обмеження на вектор висот: у нашій конструкції ним може бути будь-який додатний вектор, дозволений дуальною схемою, тоді як у Віча цей вектор повинен належати до певного вужчого конуса в $\mathbb{R}_+^d$ (описаного в п. 3 статті [6]), а якщо не належить, то прямокутники неможливо склеїти так, як хоче автор.

10.1. Приклад. Для кращого розуміння описаних вище відмінностей нашої конструкції від запропонованої Вічем розглянемо найбільш класичний приклад — ПІ на одному проміжку, в якому чотири інтервали перекладаються в оберненому порядку слідування, тобто як

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

у дворядковому записі. У термінах ПАІ його схема σ складається з єдиного циклу

$$(\alpha b, \beta b, \gamma b, \delta b, \alpha e, \beta e, \gamma e, \delta e).$$

Дуальна схема $\sigma^* = \mathcal{I}\sigma = \sigma \circ \iota$ так само складається з єдиного циклу

$$(\alpha b, \beta e, \gamma b, \delta e, \alpha e, \beta b, \gamma e, \delta b).$$

Він містить три повороти назад, отже, число покручення дуальної схеми $T(\sigma^*) = 2$, і оскільки схема σ не є покрученою, то повне покручення $T(\sigma) + T(\sigma^*)$ так само дорівнює 2. Отже, після склеювання прямокутників за нашою процедурою отримана поверхня матиме топологічний рід 2 і міститиме або дві особливі точки з повними кутами 4π у кожній, або єдину особливу точку з повним кутом 6π .

За твердженням 2 для обох схем σ і σ^* всі вектори довжин є дозволеними, тому нехай v і w будуть довільними додатними векторами. Довільний вибір координат $x_{\alpha b}$ і $y_{\alpha b}$ однозначно визначає додатні ПАІ (σ, x) і (σ^*, y) з векторами довжин v і w . (Альтернативою може бути розгляд плаваючих ПАІ (σ, v) і (σ^*, w) без фіксованих координат, лише з фіксованими довжинами.) Склеїмо ці два ПАІ у дерева відповідно до алгоритму з пп. 5.1.

Для непокрученого ПАІ (σ, x) ми просто підклеюємо кожну точку кожного початкового інтервалу до єдиної точки кінцевого сегмента, яка має ту ж саму координату. Дерево у цьому випадку є проміжком.

Для покрученого дуального ПАІ (σ^*, y) почнемо з розгляду зімкненої ламаної з вершинами у точках поворотів: $(y_{\delta b}, y_{\beta e}, y_{\gamma b}, y_{\delta e}, y_{\beta b}, y_{\gamma e}, y_{\delta b})$. Її складають шість послідовних ланок довжин $w_\alpha + w_\delta$, w_β , w_γ , $w_\alpha + w_\delta$, w_β , w_γ . Для визначеності припустимо, що w_β є найменшою з цих довжин (в інших випадках алгоритм діє аналогічно з відповідними змінами). Виберемо довільну точку $c_1 \in [y_{\gamma b}, y_{\beta e}]$ (це найкоротша ланка; насправді їх дві, обидві довжини w_β , і не має значення, з якої починати). Підклеїмо кожну точку інтервалу $I_{\beta e}^*$, яка лежить ліворуч від c_1 , до точки інтервалу $I_{\gamma b}^*$ з такою ж координатою, а кожну точку інтервалу $I_{\beta e}^*$, яка лежить праворуч від c_1 , до точки інтервалу $I_{\delta b}^*$ чи $I_{\alpha b}^*$ з такою ж координатою. Виключивши з розгляду склеєні точки, ми залишимося з чотириланковою ламаною $(y_{\delta b}, y_{\delta e}, y_{\beta b}, y_{\gamma e}, y_{\delta b})$ і виберемо довільну точку $c_2 \in [y_{\beta b}, y_{\gamma e}]$ (це друга найкоротша ланка довжини w_β у початковій ламаній). Підклеїмо кожну точку інтервалу $I_{\beta b}^*$, яка лежить ліворуч від c_2 , до точки інтервалу $I_{\delta e}^*$ чи $I_{\alpha e}^*$ з такою ж координатою, а кожну точку інтервалу $I_{\beta b}^*$, яка лежить праворуч від c_2 , до точки інтервалу $I_{\gamma e}^*$ з такою ж координатою. Не склеєні до сих пір точки складають дволанкову ламану $(y_{\delta b}, y_{\delta e}, y_{\delta b})$, і ми завершуємо процес підклеюванням кожної початкової точки, що залишилася, до кінцевої з такою ж координатою.

Тепер, у випадку $c_1 = c_2 = x_{\alpha b}$, ми одержали в точності зчеплені прямокутники Віча. Звісно, можливість такої рівності вимагає додаткових обмежень на w : $w_\alpha \leq w_\beta \leq w_\alpha + w_\gamma$ і $w_\delta \leq w_\gamma \leq w_\delta + w_\beta$. Результиуюча поверхня (візуалізована на рис. 25 у статті [7]) має єдину особливу точку з повним кутом 6π у ній.

Якщо $c_1 \neq c_2$, то наш алгоритм приводить до геометрично іншої поверхні такого ж топологічного роду. Інтервали дуального ПАІ склеюються в цьому алгоритмі різним чином в залежності від порядку взаєморозташування їхніх країв на координатній прямій (який визначається вектором довжин) і вибору точок c_1 і c_2 в процесі застосування алгоритму.

Як ілюстрацію розглянемо один із багатьох можливих порядків розташування точок, а саме випадок $y_{\delta b} < y_{\beta b} < y_{\gamma b} < y_{\alpha e} < y_{\alpha b} < y_{\gamma e} < y_{\beta e} < y_{\delta e}$ (неважко навести відповідний набір нерівностей між довжинами w_α , w_β , w_γ , w_δ , використавши зображення (6) країв через довжини), і нехай в процесі застосування алгоритму ми вибрали $c_1 \in (y_{\alpha b}, y_{\gamma e})$ і $c_2 \in (y_{\beta b}, y_{\gamma b})$. Тоді, крок за кроком цієї процедури, ми здійснили наступні ідентифікації.

На першому кроці алгоритму вибрано $c_1 \in (y_{\alpha b}, y_{\gamma e}) \subset [y_{\gamma b}, y_{\beta e}]$, після чого на проміжку $[c_1, y_{\beta e}]$ кінцевий інтервал $I_{\beta e}^*$ підклеєно до початкового інтервалу $I_{\alpha b}^*$, а на $[y_{\gamma b}, c_1]$ інтервал $I_{\beta e}^*$ — до $I_{\gamma b}^*$.

На другому кроці вибрано $c_2 \in (y_{\beta b}, y_{\gamma b}) \subset [y_{\beta b}, y_{\gamma e}]$, після чого на проміжку $[c_2, y_{\gamma e}]$ інтервал $I_{\beta b}^*$ підклеєно до $I_{\gamma e}^*$, а на $[y_{\beta b}, c_2]$ інтервал $I_{\beta b}^*$ — до $I_{\alpha e}^*$.

На завершальному кроці здійснено решту ідентифікацій:

- на $[y_{\delta b}, c_2]$ інтервал $I_{\delta b}^*$ підклеєно до $I_{\gamma e}^*$,
- на $[c_2, y_{\alpha e}]$ інтервал $I_{\delta b}^*$ підклеєно до $I_{\alpha e}^*$,
- на $[y_{\alpha e}, y_{\alpha b}]$ інтервал $I_{\delta b}^*$ підклеєно до $I_{\delta e}^*$,
- на $[y_{\alpha b}, c_1]$ інтервал $I_{\alpha b}^*$ підклеєно до $I_{\delta e}^*$,
- на $[c_1, y_{\delta e}]$ інтервал $I_{\gamma b}^*$ підклеєно до $I_{\delta e}^*$.

У точці розгалуження c_1 зійшлися чотири інтервали $I_{\alpha b}^*$, $I_{\gamma b}^*$, $I_{\beta e}^*$ і $I_{\delta e}^*$, а в точці розгалуження c_2 — чотири інтервали $I_{\beta b}^*$, $I_{\delta b}^*$, $I_{\gamma e}^*$ і $I_{\alpha e}^*$.

Нарешті можна перейти до прямокутників R_ξ , $\xi \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, та описати яким чином зчеплюються між собою їхні вертикальні сторони, асоційовані з відповідними початковими $I_{\xi b}^*$ та кінцевими $I_{\xi e}^*$ інтервалами дуальної ПАІ $(\sigma^*, \mathbf{y})$.

Ліва сторона прямокутника R_α , яка є відрізком $\{0\} \times [0, w_\alpha]$, розділюється на два фрагменти: нижній фрагмент $\{0\} \times [0, c_1 - y_{\alpha b}]$ підклеюється до фрагмента $\{v_\delta\} \times [y_{\alpha b} - y_{\alpha e}, c_1 - y_{\alpha e}]$ правої сторони прямокутника R_δ , а верхній $\{0\} \times [c_1 - y_{\alpha b}, w_\alpha]$ — до фрагмента $\{v_\beta\} \times [c_1 - y_{\beta b}, w_\beta]$ правої сторони R_β .

Ліва сторона R_β , яка є відрізком $\{0\} \times [0, w_\beta]$, розділюється на два фрагменти: нижній $\{0\} \times [0, c_2 - y_{\beta b}]$ підклеюється до фрагмента $\{v_\alpha\} \times [0, c_2 - y_{\beta b}]$ правої сторони R_α , а верхній $\{0\} \times [c_2 - y_{\beta b}, w_\beta]$ — до фрагмента $\{v_\gamma\} \times [c_2 - y_{\delta b}, w_\gamma]$ правої сторони R_γ .

Ліва сторона R_γ , яка є відрізком $\{0\} \times [0, w_\gamma]$, розділюється на два фрагменти: нижній $\{0\} \times [0, c_1 - y_{\gamma b}]$ підклеюється до фрагмента $\{v_\beta\} \times [0, c_1 - y_{\gamma b}]$ правої сторони R_β , а верхній $\{0\} \times [c_1 - y_{\gamma b}, w_\gamma]$ — до фрагмента $\{v_\delta\} \times [c_1 - y_{\alpha e}, w_\delta]$ правої сторони R_δ .

Ліва сторона R_δ , яка є відрізком $\{0\} \times [0, w_\delta]$, розділюється на три фрагменти: нижній $\{0\} \times [0, c_2 - y_{\delta b}]$ підклеюється до фрагмента $\{v_\gamma\} \times [0, c_2 - y_{\delta b}]$ правої сторони R_γ , середній $\{0\} \times [c_2 - y_{\delta b}, y_{\alpha e} - y_{\delta b}]$ — до фрагмента $\{v_\alpha\} \times [c_2 - y_{\beta b}, w_\alpha]$ правої сторони R_α , а верхній $\{0\} \times [y_{\alpha e} - y_{\delta b}, w_\delta]$ — до фрагмента $\{v_\delta\} \times [0, y_{\alpha b} - y_{\alpha e}]$ правої сторони R_δ .

Легко перевірити, що дев'ять перелічених вище фрагментів правих сторін прямокутників покривають ці сторони без перекриттів (хіба що крайніми точками) чи пробілів між ними.

Після того, як верхні сторони прямокутників також підклеєно до нижніх відповідно до вихідного класичного ПІ, ми одержуємо многовид топологічного роду 2, що геометрично є плоскою поверхнею з двома особливими точками. Перша відповідає вибраній нами точці розгалуження c_1 і є результатом ідентифікації між собою чотирьох точок $(0, c_1 - y_{\alpha b}) \in R_\alpha$, $(v_\beta, c_1 - y_{\gamma b}) \in R_\beta$, $(0, c_1 - y_{\gamma b}) \in R_\gamma$ і $(v_\delta, c_1 - y_{\alpha e}) \in R_\delta$. Друга особлива точка відповідає c_2 з нашого алгоритму і так само є результатом склеювання в одну чотирьох точок $(v_\alpha, c_2 - y_{\beta b}) \in R_\alpha$, $(0, c_2 - y_{\beta b}) \in R_\beta$, $(v_\gamma, c_2 - y_{\delta b}) \in R_\gamma$ і $(0, c_2 - y_{\delta b}) \in R_\delta$. Повний кут у кожній із цих двох особливих точок дорівнює 4π .

В огляді [7] (який, як зазначено вище, знаходиться у вільному доступі в мережі інтернет) можна знайти ілюстрований опис конструкції Віча для цього ж самого прикладу і наочно побачити відмінність між двома алгоритмами.

11. Висновки. У цій статті ми презентували нову концепцію перекладального ансамблю інтервалів (ПАІ), що є узагальненням класичної конструкції перекладання інтервалів (ПІ). На відміну від останньої, ПАІ, взагалі кажучи, не є динамічною системою, але може бути перетвореним на неї шляхом склеювання його інтервалів у дерево, з певною кількістю ступенів свободи вибору.

Наша конструкція є дуже природною і не була помічена попередніми дослідниками напевно тому, що вони обмежувалися розглядом ПІ на одному проміжку. Її майже реалізував Віч у [6], працюючи з вертикальними сторонами „зчеплених прямокутників”, але не розпізнав їхню конфігурацію як дуальну до вихідного ПІ на горизонтальних сторонах.

До ПАІ є застосовною індукція типу Розі–Віча (а на її базі можна означити і ту чи іншу ренормалізацію). Елементарні кроки індукції на схемах (так ми називаємо дискретну компоненту даних ПАІ) є спряженими з оберненими до них простою інволюцією, яка задає таким чином дуальність між схемами. Натуральне розширення ПАІ можна розглядати як пару ПАІ з взаємодуальними схемами, а елементарні індукційні кроки на натуральних розширеннях також

є оборотними в часі і спряжені з оберненими кроками інволюцією, яка просто міняє місцями елементи такої пари.

Коли ми беремо набір паралельних між собою прямокутників із розмірами, визначеними згідно з довжинами інтервалів у даному натуральному розширенні ПАІ, склеюємо кожне з двох взаємодуальних ПАІ в дерево і відповідним чином зчеплюємо прямокутники між собою сторонами, то одержуємо плоску трансляційну поверхню з певною кількістю особливих точок. На цій поверхні визначено два трансверсальних потоки сталого напрямку. Кожен із цих потоків тече паралельно одному з двох дерев, у які ми склеїли сторони прямокутників, і продукує на другому дереві переріз Пуанкаре, який є нічим іншим, як тією динамічною системою перекладання інтервалів на дереві, в яку ми склеїли відповідний ПАІ.

У спеціальному випадку ротаційного ПАІ (тобто ПІ на багатьох проміжках, що є відображенням першого повернення на об'єднання скінченної кількості дуг для ірраціонального повороту кола) дуальний ПАІ також є ротаційним, і відповідна трансляційна поверхня має топологічний рід 1, тобто є тором, без особливих точок.

Література

1. M. Keane, *Interval exchange transformations*, Math. Z., **141**, 25–31 (1975).
2. W. A. Veech, *Interval exchange transformations*, J. Anal. Math., **33**, 222–272 (1978).
3. G. Rauzy, *Échanges d'intervalles et transformations induites*, Acta Arith., **34**, 315–328 (1979).
4. M. S. Keane, G. Rauzy, *Stricte ergodicité des échanges d'intervalles*, Math. Z., **174**, 203–212 (1980).
5. H. Masur, *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. Math., **115**, 169–200 (1982).
6. W. A. Veech, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, Ann. Math., **115**, 201–242 (1982).
7. M. Viana, *Ergodic theory of interval exchange maps*, Rev. Mat. Complut., **19**, 7–100 (2006).
8. А. Ю. Теплинский, К. М. Ханін, *Жесткость для диффеоморфизмов окружности с особенностями*, Успехи мат. наук, **59**, № 2, 137–160 (2004).
9. О. Ю. Теплінський, *Гіперболічна підкова для диффеоморфізмів кола зі зломом*, Нелінійні коливання, **11**, № 1, 112–127 (2008).
10. K. Khanin, A. Teplinsky, *Renormalization horseshoe and rigidity for circle diffeomorphisms with breaks*, Comm. Math. Phys., **320**, 347–377 (2013).
11. K. Cunha, D. Smania, *Renormalization for piecewise smooth homeomorphisms on the circle*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **30**, 441–462 (2013).
12. K. Cunha, D. Smania, *Rigidity for piecewise smooth homeomorphisms on the circle*, Adv. Math., **250**, 193–226 (2014).

Одержано 14.06.22