DOI: 10.37863/umzh.v73i4.6354

УДК 512.552.4

Н. Д. Попова, О. В. Стрілець (Ін-т математики НАН України, Київ)

КРИТЕРІЇ ІСНУВАННЯ СИСТЕМ ПІДПРОСТОРІВ, ЩО ПОВ'ЯЗАНІ З ПЕВНИМ КЛАСОМ УНІЦИКЛІЧНИХ ГРАФІВ

We study the configurations of subspaces of a Hilbert space associated with a unicyclic graph, which is a cycle of length $m \geq 3$ and has, at each vertex of the cycle, a chains of length $s \geq 1$ glued to the vertex. There is a one-to-one correspondence between the vertices and subspaces. If an edge connects two vertices, then the angle between subspaces is equal to $\psi \in (0;\pi/2)$, otherwise the subspaces are orthogonal. Applying the theorem on reduction of unicyclic graph, we prove that nonzero configurations exist if and only if $\cos\psi \in (0;\tau_{m,s}]$. We obtain formulas for $\tau_{m,s}$ and show that $\bigcap\limits_{m,s}(0;\tau_{m,s}] = (0;2/5]$.

Досліджуються конфігурації підпросторів гільбертового простору, пов'язані з уніциклічним графом, що є циклом довжини $m \geq 3$, до кожної вершини якого приєднано ланцюги довжини $s \geq 1$. Вершинам графа відповідають підпростори. Якщо вершини поєднані ребром, то кут між підпросторами дорівнює деякому числу ψ з інтервалу $(0;\pi/2)$, інакше підпростори ортогональні. За допомогою теореми про редукцію уніциклічного графа доведено, що такі ненульові конфігурації існують тоді і тільки тоді, коли $\cos\psi \in (0;\tau_{m,s}]$. Отримано формули для підрахунку $\tau_{m,s}$ і показано, що $\bigcap\limits_{m,s}(0;\tau_{m,s}] = (0;2/5]$.

1. Попередні відомості. У цій статті ми продовжуємо вивчення конфігурацій підпросторів у гільбертовому просторі. А саме, нехай H — комплексний сепарабельний гільбертів простір, H_k, $1 \leq k \leq n$, — набір його підпросторів такий, що кут між кожними двома підпросторами є фіксованим. Будемо казати, що кут між H_j та H_k фіксований і дорівнює $\psi_{jk} \in [0;\pi/2]$, якщо для ортопроекторів P_{H_j}, P_{H_k} на ці підпростори маємо

$$P_{H_j}P_{H_k}P_{H_j} = \cos^2(\psi_{jk})P_{H_j}, \qquad P_{H_k}P_{H_j}P_{H_k} = \cos^2(\psi_{jk})P_{H_k}.$$

Зауважимо, що у випадку, коли простори H_j і H_k є скінченновимірними, ця умова означає, що *серія канонічних кутів* складається з однакових чисел, що дорівнюють ψ_{jk}. У подальшому ми виключаємо випадок, коли підпростори H_j і H_k збігаються між собою, тобто вважаємо, що $\psi_{jk} \neq 0$.

Вивчення конфігурацій підпросторів, або, більш загально, систем підпросторів

$$S = (H; H_1, \ldots, H_n)$$

гільбертового простору H (наборів відповідних ортопроекторів $P_1, \ldots, P_n$) є важливою задачею функціонального аналізу, якій присвячено багато робіт (див., наприклад, бібліографію в [1]). Пов'язані з цією задачею питання виникають при дослідженні багатьох проблем сучасної математики, зокрема статистичної механіки (алгебра Темперлі – Ліба), теорії наближень, теорії інформації (фрейми), томографії, теорії сингулярних інтегральних рівнянь тощо.

Конфігурації підпросторів зручно задавати за допомогою скінченного неорієнтованого графа Γ без кратних ребер і петель з числами на його ребрах. Підпростори відповідають вершинам графа, а кут $\psi_{jk} \in (0;\pi/2)$ між двома підпросторами задається числом $\tau_{jk} \in (0;1)$ з рівняння $\tau_{jk} = \cos\psi_{jk}$, що стоїть на відповідному ребрі. Якщо вершини не є суміжними, вважаємо, що відповідні підпростори є ортогональними. Вивчення конфігурацій є вивченням $*$-зображень відповідних алгебр

$$TL_{\Gamma,\tau,\perp} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, \ldots, p_n \mid p_j^2 = p_j^* = p_j,\ j \in V;$$

$$p_j p_k p_j = \tau_{jk}^2 p_j,\ p_k p_j p_k = \tau_{jk}^2 p_k,\ \text{якщо } \gamma_{jk} \in E;$$

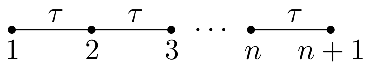
$$p_j p_k = p_k p_j = 0 \text{ в іншому випадку}\Big\rangle,$$

де $\Gamma = (V, E)$ — скінченний неорієнтований зв'язний граф без кратних ребер та петель: $V = \{1, \ldots, n\}$ — множина вершин графа, а $E = \{\gamma_{jk} = \gamma_{kj}\}$ — множина його ребер; $\tau(\cdot)$ — функція, означена на ребрах графа:

$$\tau : E \to (0; 1) : \gamma_{jk} \mapsto \tau_{jk}.$$

Питання про існування конфігурації з заданими параметрами зводиться до питання невід'ємної визначеності відповідної (операторної) матриці Грама (див. [1]).

Нагадаємо (див. [1–3]), що для ланцюжка довжини n за умови, що функція $\tau(\cdot)$ є сталою,



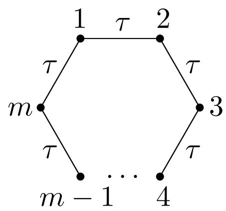
матриця Грама має вигляд

$$B_{A_{n+1},\tau} = \begin{pmatrix} 1 & -\tau & 0 & \ldots & 0 \\ -\tau & 1 & -\tau & \ldots & 0 \\ 0 & -\tau & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведено, що вона є невід'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\tau \in (0; \lambda_{n+2}^{-1}]$, де

$$\lambda_k = 2\cos\frac{\pi}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Також нагадаємо (див. [1, 4]), що у випадку, коли Γ є циклом довжини $m \geq 3$ і функція $\tau(\cdot)$ є сталою,

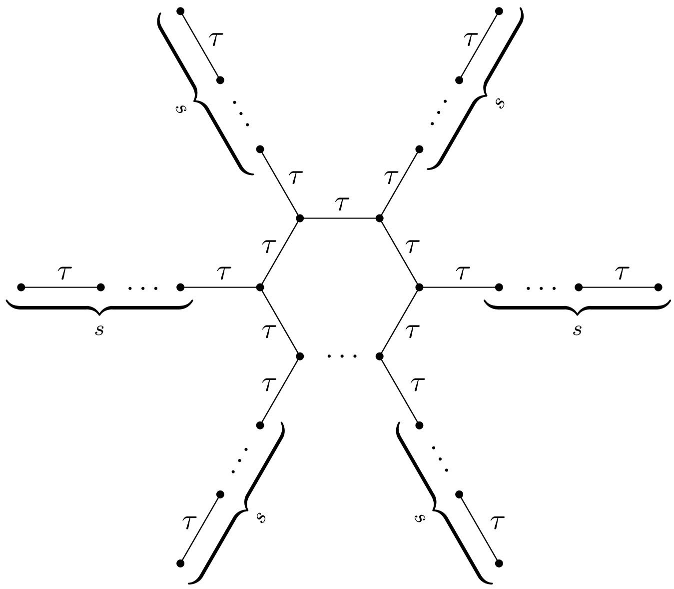


матриця Грама має вигляд

$$B_{C,\tau,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -\tau & 0 & \ldots & -\tau e^{i\varphi} \\ -\tau & 1 & -\tau & \ldots & 0 \\ 0 & -\tau & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tau e^{-i\varphi} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0; 2\pi),$$

і відповідна нетривіальна система $S_{C,\tau,\varphi}$ існує хоча б при одному φ тоді і тільки тоді, коли $\tau \in (0; \lambda_m^{-1}]$.

У цій статті ми будемо досліджувати випадок уніциклічного графа $\Gamma_{m,s}$, $m, s \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, такого, що цикл має m вершин і до кожної вершини циклу приєднано ланцюг довжини s, всі числа τ_{jk} рівні між собою і дорівнюють τ:



Ми нагадаємо теорему про редукцію уніциклічного графа до циклу (пункт 2) і, застосувавши її до розглядуваного випадку, покажемо (пункт 4), що множини $\Omega_{m,s}$ тих τ, для яких існують відповідні нетривіальні конфігурації, є непорожніми для всіх m та s і дорівнюють певним інтервалам $(0; \tau_{m,s}]$, а також підрахуємо $\tau_{m,s}$ (пункт 5). Крім того, покажемо (пункт 3), що відповідні нетривіальні конфігурації існують для довільного s тоді і тільки тоді, коли τ не перевищує

$$\tau_{m,\infty} = \frac{1}{\lambda_m^{-1} + \lambda_m}.$$

2. Редукція уніциклічного графа до циклу. Нехай $\Gamma = (C; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)$, C — цикл, до кожної вершини $j \in \{1, \ldots, m\}$ якого приєднано дерево Γ_j. Тоді для кожної вершини j уніциклічного графа можна визначити відстань $d(j)$ від вершини до циклу як довжину відповідного найкоротшого шляху. Для кожної вершини j, що не належить вершинам циклу, однозначно визначається попередня вершина $p(j)$ — вершина, що поєднана з j і знаходиться ближче до циклу. Тоді (можливо порожня) множина наступних вершин $\mathcal{V}_j$ визначається формулою

$$\mathcal{V}_j = \{k \in V \mid p(k) = j\}.$$

Матриця Грама $B_{\Gamma,\tau,\varphi} = (b_{jk})$ для уніциклічного графа Γ має вигляд (див. [1, 2])

$$b_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ -\tau_{jk}, & \gamma_{jk} \in E \setminus \{\gamma_{1,m}\}, \\ -e^{i\varphi}\tau_{1m}, & j = 1, \quad k = m, \\ -e^{-i\varphi}\tau_{1m}, & j = m, \quad k = 1, \\ 0, & j \ \text{ і } \ k \quad \text{не поєднані ребром.} \end{cases}$$

У роботі [5] доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай Γ — уніциклічний граф. Матриця $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ невід’ємно визначена тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови*:

(i) *для всіх вершин $j \in V$ числа*

$$\nu_j = 1 - \sum_{k \in \mathcal{V}_j} \frac{\tau_{jk}^2}{\nu_k}$$

є додатними;

(ii) *матриця $B_{C,\mu,\varphi}$, де μ визначено на ребрах E_0 циклу C рівністю*

$$\mu_{jk} = \frac{\tau_{jk}}{\sqrt{\nu_j \nu_k}},$$

є невід’ємно визначеною.

Через $S_{\Gamma_{m,s},\tau,\varphi}$ позначимо конфігурацію підпросторів, пов’язану з уніциклічним графом

$$\Gamma_{m,s} = (C; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m),$$

де C — цикл довжини m, Γ_i — ланцюжки довжини $s, \varphi \in [0; 2\pi)$.

Зважаючи на те, що в розглядуваному випадку всі дерева Γ_i є ланцюгами довжини s і всі числа на ребрах графа однакові, маємо рівність

$$\nu_j = \begin{cases} 1, & d(j) = s, \\ 1 - \tau^2/\nu_k, & d(j) < s, \quad \mathcal{V}_j = \{k\}. \end{cases}$$

Таким чином, числа ν_j залежать тільки від відстані вершини j до циклу:

$$\nu_j = \hat{\nu}_{s-d(j)}, \qquad \text{де} \quad \hat{\nu}_0 = 1, \qquad \hat{\nu}_r = 1 - \frac{\tau^2}{\hat{\nu}_{r-1}}, \quad r = 1, \ldots, s,$$

а μ_{jk} — від довжини ланцюжків

$$\mu_{jk} = \mu_s = \mu_s(\tau) = \frac{\tau}{\hat{\nu}_s}.$$

Позначимо $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, зафіксуємо $\tau > 0$ і розглянемо послідовність $c_j = c_j(\tau)$, що задана рекурентними співвідношеннями

$$c_0 = 0, \qquad c_{j+1} = f_\tau(c_j), \quad j \in \Lambda_\tau,$$

де функція $f_\tau(x)$ і множина Λ_τ задаються формулами

$$f_\tau(x) = \frac{\tau^2}{1-x}, \qquad \Lambda_\tau = \big\{ j \in \mathbb{N}_0 \mid c_k < 1,\ k \in \{0, \ldots, j\} \big\}.$$

Множина Λ_τ є непорожньою, можливо, скінченною множиною. Зауважимо, що $c_j < c_{j+1}$ для довільного $j \in \Lambda_\tau$, оскільки $c_0 = 0 < \tau^2 = c_1$, а функція $f_\tau(x)$ при фіксованому $\tau > 0$ є зростаючою на інтервалі $[0; 1)$.

Лема 1. *За умови $s \in \Lambda_\tau$ виконуються рівності*

$$\hat{\nu}_r = 1 - c_r, \quad r \in \{0, \ldots, s\}, \qquad \mu_s(\tau) = \frac{\tau}{1 - c_s} = \frac{c_{s+1}}{\tau}.$$

Доведення. *База індукції*: $\hat{\nu}_0 = 1 = 1 - c_0$. *Індуктивний крок*:

$$\hat{\nu}_r = 1 - \frac{\tau^2}{\hat{\nu}_{r-1}} = 1 - \frac{\tau^2}{1 - c_{r-1}} = 1 - f_\tau(c_{r-1}) = 1 - c_r.$$

Друга рівність доводиться безпосередньо:

$$\mu_s(\tau) = \frac{\tau}{\hat{\nu}_s} = \frac{1}{\tau} \frac{\tau^2}{1 - c_s} = \frac{c_{s+1}}{\tau}.$$

Таким чином, множина чисел $\tau \in (0; 1)$, для яких існують $\varphi \in [0; 2\pi)$ такі, що матриця $B_{\Gamma_{m,s,\tau,\varphi}}$ є невід'ємно визначеною, збігається з множиною

$$\Omega_{m,s} = \big\{ \tau \in (0; 1) \mid \ s \in \Lambda_\tau,\ \mu_s(\tau) \le \lambda_m^{-1} \big\}.$$

Дослідимо, як влаштовані множини $\Omega_{m,s}$ та їхні перетини

$$\Omega_{m,\infty} = \bigcap_{s=1}^{\infty} \Omega_{m,s}, \qquad \Omega_{\infty,s} = \bigcap_{m=3}^{\infty} \Omega_{m,s}, \qquad \Omega = \bigcap_{m=3}^{\infty} \Omega_{m,\infty}.$$

3. Критерій існування конфігурацій з ланцюгами довільної довжини. Почнемо з дослідження множини $\Omega_{m,\infty}$. Зрозуміло, що довільне s повинно належати Λ_τ, якщо $\tau \in \Omega_{m,\infty}$.

Лема 2. $\Lambda_\tau = \mathbb{N}_0$ *тоді і тільки тоді, коли* $\tau \in (0; 1/2]$. *За цих умов існує границя*

$$c = \lim_{j \to \infty} c_j = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tau^2}}{2}.$$

Доведення. Нехай $\Lambda_\tau = \mathbb{N}_0$, тоді c_j, $j \in \mathbb{N}_0$, є зростаючою обмеженою зверху послідовністю, отже, існує границя

$$c = \lim_{j \to \infty} c_j = \lim_{j \to \infty} c_{j+1} = \lim_{j \to \infty} f_\tau(c_j) \le 1.$$

Оскільки функція $f_\tau(x)$ є неперервною в інтервалі $[0; 1)$ і зростає необмежено в околі одиниці, переконуємося, що $c < 1$ і є нерухомою точкою функції $f_\tau(x)$.

Квадратне рівняння $f_\tau(x) = x$ не має розв'язків, якщо $\tau > 1/2$. Таким чином, $\tau \le 1/2$, а числа

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\tau^2}}{2}$$

є розв'язками цього рівняння. Оскільки обидва корені додатні, а послідовність c_j стартує з 0, то вона прямує до меншого з коренів, отже,

$$c = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tau^2}}{2}.$$

Навпаки, якщо $\tau \in (0; 1/2]$, то c є нерухомою точкою $f_\tau(x)$ і $c_j < c < 1$ для довільного $j \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 2. *Множина* $\Omega_{m,\infty}$ *збігається з інтервалом* $(0; \tau_{m,\infty}]$, *де*

$$\tau_{m,\infty} = \frac{1}{\lambda_m^{-1} + \lambda_m}.$$

Доведення. Якщо $\tau \in \Omega_{m,\infty}$, то за попередньою лемою $\tau \in (0; 1/2]$ і $\lim_{j\to\infty} c_j = c$.

Покажемо, що $\tau \in \Omega_{m,\infty}$ тоді і тільки тоді, коли $c \leq \tau/\lambda_m$. Справді, за цієї умови

$$\mu_s = \frac{c_{s+1}}{\tau} < \frac{c}{\tau} \leq \frac{1}{\lambda_m}.$$

Таким чином, умова є достатньою. Припустимо, що $c > \tau/\lambda_m$, тоді $\varepsilon = c - \tau/\lambda_m > 0$ і знайдеться таке s_0, що для довільного $s > s_0$

$$c - c_{s+1} < \varepsilon = c - \frac{\tau}{\lambda_m} \ \Rightarrow\ \mu_s(\tau) = \frac{c_{s+1}}{\tau} > \frac{1}{\lambda_m}.$$

Отже, умова є також необхідною.

Безпосередньо підраховується, що умова $c \leq \tau/\lambda_m$ виконується тоді і тільки тоді, коли

$$1 - 2\tau\lambda_m^{-1} \leq \sqrt{1 - 4\tau^2} \ \Leftrightarrow\ \tau^2(\lambda_m + \lambda_m^{-1}) - \tau \leq 0,$$

що, в свою чергу, еквівалентно умові $\tau \in [0; \tau_{m,\infty}]$.

***Наслідок* 1.** $\Omega = (0; 2/5]$.

Доведення. Зауважимо, що послідовність $\tau_{m,\infty}$ спадає і збігається до $2/5$.

4. Властивості множин $\boldsymbol{\Omega_{m,s}}$. Із доведеної у попередньому пункті теореми випливає, що всі множини $\Omega_{m,s}$ є непорожніми.

Наступна лема та її наслідки дозволяють дослідити множини $\Omega_{m,s}$.

Лема 3. *Для довільних* $r \in \mathbb{N}$ *і* $\tau \in (1/2; \lambda_{r+1}^{-1})$ *маємо рівність*

$$c_r = c_r\big(\tau(\theta)\big) = \frac{\sin r\theta}{2\cos\theta \sin(r+1)\theta}, \qquad \tau(\theta) = \frac{1}{2\cos\theta}, \quad \theta \in \left(0; \frac{\pi}{r+1}\right).$$

При цьому $c_r < 1$ *тоді і тільки тоді, коли* $\theta < \pi/(r+2)$.

Доведення. *База індукції.* Якщо $r = 1$ і $\tau \in (1/2; +\infty)$, то виконуються рівності

$$c_1 = \tau^2(\theta) = \frac{1}{4\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta\sin 2\theta}, \quad \theta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right),$$

при цьому $c_1 < 1$ тоді і тільки тоді, коли $\theta < \pi/3$.

Індуктивний крок. Припустимо, що лема справджується для $r - 1 \in \mathbb{N}$ і $\tau \in \big(1/2; \lambda_r^{-1}\big)$.

Тоді

$$c_{r-1}=\frac{\sin(r-1)\theta}{2\cos\theta\sin r\theta},\quad \theta\in\left(0;\frac{\pi}{r}\right),$$

при цьому $c_{r-1}<1$ тоді і тільки тоді, коли $\theta<\pi/(r+1)$. Зважаючи на те, що

$$1-c_{r-1}=\frac{2\cos\theta\sin r\theta-\sin(r-1)\theta}{2\cos\theta\sin r\theta}=\frac{\sin(r+1)\theta}{2\cos\theta\sin r\theta},$$

за умови $\theta\in\bigl(0;\pi/(r+1)\bigr)$ маємо

$$c_r=\frac{\tau^2}{1-c_{r-1}}=\frac{1}{4\cos^2\theta}\frac{2\cos\theta\sin r\theta}{\sin(r+1)\theta}=\frac{\sin r\theta}{2\cos\theta\sin(r+1)\theta}.$$

При цьому $c_r<1$ тоді і тільки тоді, коли

$$1-c_r=\frac{\sin(r+2)\theta}{2\cos\theta\sin(r+1)\theta}>0\ \Leftrightarrow\ \sin(r+2)\theta>0,$$

що еквівалентно умові $\theta<\pi/(r+2)$.

Наслідок 2. *Для довільного $s\in\mathbb{N}$ включення $s\in\Lambda_\tau$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\tau\in\bigl(0;\lambda_{s+2}^{-1}\bigr)$.*

Доведення. Випадок $\tau>1/2$ є безпосереднім наслідком попередньої леми. Якщо ж $\tau\le 1/2$, то за лемою 2 $\Lambda_\tau=\mathbb{N}_0$, а з іншого боку, $1/2<\lambda_{s+2}^{-1}$.

Наслідок 3. *Для довільного $r\in\mathbb{N}_0$ функції $c_{r+1}(\tau)$ і $\mu_r(\tau)$ є зростаючими та неперервними на інтервалі $\bigl(0;\lambda_{r+2}^{-1}\bigr)$.*

Доведення. *База індукції.* Функції $c_1(\tau)=\tau^2$ і $\mu_0(\tau)=\tau$ є очевидно зростаючими та неперервними на інтервалі $(0;+\infty)$.

Індуктивний крок. Скористаємось тим, що на множині $(0;+\infty)\times(0;1)$ функція

$$\Phi(t,x)=\frac{t}{1-x}$$

є зростаючою по кожному аргументу та неперервною. Тоді функції

$$c_{r+1}(\tau)=\Phi\bigl(\tau^2,c_r(\tau)\bigr)\qquad\text{і}\qquad \mu_r(\tau)=\Phi(\tau,c_r(\tau))$$

є неперервними та зростаючими на інтервалі $\bigl(0;\lambda_{r+2}^{-1}\bigr)$.

Твердження 1. *Для довільних $s,m\in\mathbb{N}$, $m\ge 3$, існує число $\tau_{m,s}\in\bigl(0;\lambda_{s+3}^{-1}\bigr)$ таке, що $\Omega_{m,s}=(0;\tau_{m,s}]$. При цьому $\mu_s(\tau_{m,s})=\lambda_m^{-1}$.*

Доведення. Нехай $\tau\in\Omega_{m,s}$, тобто $\tau<\lambda_{s+2}^{-1}$ і $\mu_s(\tau)\le\lambda_m^{-1}$. Зважаючи на те, що функція $\mu_s(\tau)$ зростає, приходимо до висновку, що $\tau'\in\Omega_{m,s}$ для довільного $\tau'<\tau$.

Покажемо, що $\Omega_{m,s}\subset\bigl(0;\lambda_{s+3}^{-1}\bigr)$. Справді, якщо $\tau\in\Omega_{m,s}$, то

$$c_{s+1}(\tau)=\tau\mu_s(\tau)<\lambda_{s+2}^{-1}\lambda_m^{-1}\le 1,$$

таким чином, $s+1\in\Lambda_\tau$, отже, $\tau\in\bigl(0;\lambda_{s+3}^{-1}\bigr)$.

Покладемо $\tau_{m,s}=\sup\Omega_{m,s}$. Тоді $\tau_{m,s}\le\lambda_{s+3}^{-1}<\lambda_{s+2}^{-1}$, отже, $s\in\Lambda_{\tau_{m,s}}$. Оскільки функція $\mu_s(\tau)$ є неперервною, то $\mu_s(\tau_{m,s})\le\lambda_m^{-1}$. Таким чином, $\tau_{m,s}\in\Omega_{m,s}$, а отже, $\Omega_{m,s}=(0;\tau_{m,s}]$.

Припустимо, що $\mu_s(\tau_{m,s})<\lambda_m^{-1}$. Тоді завдяки неперервності функції $\mu_s(\tau)$ існує число $\tau'\in\bigl(\tau_{m,s};\lambda_{s+2}^{-1}\bigr)$ таке, що $\mu_s(\tau')<\lambda_m^{-1}$. Отже, $\tau'\in\Omega_{m,s}$, але це означає, що $\tau'\le\tau_{m,s}$, і ми прийшли до суперечності. Таким чином, $\mu_s(\tau_{m,s})=\lambda_m^{-1}$.

***Наслідок* 4.** *Мають місце точні включення*

$$\Omega_{m',s} \subset \Omega_{m,s}, \quad m' > m \geq 3, \qquad i \qquad \Omega_{m,s'} \subset \Omega_{m,s}, \quad s' > s \geq 1.$$

Доведення. Якщо $m' > m$, то $\mu_s(\tau_{m',s}) = \lambda_{m'}^{-1} < \lambda_m^{-1} = \mu_s(\tau_{m,s})$, отже, $\tau_{m',s} < \tau_{m,s}$.

Для довільного фіксованого $\tau \in \big(0; \lambda_{s'+2}^{-1}\big)$ послідовність $\mu_r = c_{r+1}/\tau,\ r = 1, 2, \ldots, s'$, зростає. Таким чином, якщо $s' > s$, то $\mu_s(\tau_{m,s'}) < \mu_{s'}(\tau_{m,s'}) = \lambda_m^{-1} = \mu_s(\tau_{m,s})$, отже, $\tau_{m,s'} <$ $< \tau_{m,s}$.

5. Критерії існування конфігурацій, пов'язаних із графом $\boldsymbol{\Gamma_{m,s}}$. Наступні два твердження дають повну відповідь для граничних випадків ($s = 1$ або $m = 3$).

Твердження 2. *Для довільного* $m \geq 3$

$$\Omega_{m,1} = \left(0; \frac{\sqrt{\lambda_m^2 + 4} - \lambda_m}{2}\right].$$

Доведення. Згідно з твердженням 1 потрібно знайти таке $\tau \in \big(0; \lambda_4^{-1}\big)$, що $\mu_1(\tau) = \lambda_m^{-1}$:

$$\mu_1(\tau) = \frac{\tau}{1 - \tau^2} = \lambda_m^{-1} \ \Leftrightarrow\ \tau^2 + \lambda_m \tau - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \left(\tau + \frac{\lambda_m}{2}\right)^2 - \frac{\lambda_m^2 + 4}{4} = 0.$$

Таким чином, $\tau_{m,1} = \left(\sqrt{\lambda_m^2 + 4} - \lambda_m\right)\Big/2$.

***Наслідок* 5.** $\Omega_{\infty,1} = \big(0; \sqrt{2} - 1\big]$.

Доведення. Достатньо зауважити, що $\lim_{m\to\infty} \tau_{m,1} = \sqrt{2} - 1$.

Твердження 3. *Для довільного* $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_{3,s} = \big(0; \lambda_{2s+3}^{-1}\big].$$

Доведення. Згідно з твердженням 1 потрібно знайти таке $\tau \in \big(0; \lambda_{s+3}^{-1}\big)$, що $\mu_s(\tau) = 1$. Зауважимо, що

$$(0; 1/2] = \Omega_{3,\infty} \subset \Omega_{3,s},$$

отже, шукаємо $\tau > 1/2$.

За цієї умови за лемою 3 маємо

$$\mu_s = \frac{c_{s+1}}{\tau} = \frac{\sin(s+1)\theta}{\sin(s+2)\theta}, \quad \theta \in \left(0; \frac{\pi}{s+2}\right).$$

Отже, рівняння $\mu_s(\tau) = 1,\ \tau \in \big(1/2; \lambda_{s+3}^{-1}\big)$, еквівалентне умові

$$0 = \sin(s+2)\theta - \sin(s+1)\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{(2s+3)\theta}{2}, \quad \theta \in \left(0; \frac{\pi}{s+3}\right).$$

Таким чином, отримуємо $\tau_{3,s} = \lambda_{2s+3}^{-1}$.

Наступна теорема містить алгоритм підрахунку $\tau_{m,s}$ для решти випадків.

Теорема 3. *Для довільних* $s, m \in \mathbb{N},\ s \geq 2,\ m \geq 4,$

$$\Omega_{m,s} = \left(0; \frac{1}{u_{m,s}^{-1} + u_{m,s}}\right], \quad u_{m,s} = \lim_{k\to\infty} u_{m,s}^{(k)},$$

де послідовності $u_k = u_{m,s}^{(k)}$ *задано рекурентними формулами*

$$u_1 = \lambda_m^{-1}, \qquad u_{k+1} = u_k - \frac{g_{m,s}(u_k)}{g'_{m,s}(u_k)},$$

$$g_{m,s}(u) = u^{2s+4} - \lambda_m u^{2s+3} + \lambda_m u - 1.$$

Доведення. 1. За лемою 1 маємо $c_s = \tau\mu_{s-1}$, отже, μ_s визначаються рекурентно:

$$\mu_0(\tau) = \tau, \qquad \mu_s(\tau) = \frac{1}{\tau^{-1} - \mu_{s-1}(\tau)}.$$

2. Безпосередньо підраховується, що

$$\mu_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \lambda_4^{-1},$$

отже, за умов $s \geq 2$ і $m \geq 4$ маємо вкладення $\Omega_{m,s} \subset \Omega_{4,2} \subset (0; 1/2) \subset \left(0; \lambda_{s+3}^{-1}\right)$.

3. За індукцією легко показати, що

$$\mu_s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{s+1}{s+2}.$$

Отже, за умов $s \geq 2$ і $m \geq 4$

$$\lambda_m \cdot \frac{s+1}{s+2} > 1.$$

4. В подальшому розглядаємо $\tau \in (0; 1/2)$. Функція

$$h(u) = \frac{1}{u^{-1} + u}$$

зростає на інтервалі $(0; 1)$ і відображає його в інтервал $(0; 1/2)$. Отже, можна перейти від параметра τ до параметра u:

$$\tau(u) = \frac{1}{u^{-1} + u}, \quad u \in (0; 1).$$

Покажемо, що

$$\mu_s = \mu_s(\tau(u)) = \frac{u^{-(s+1)} - u^{s+1}}{u^{-(s+2)} - u^{s+2}}.$$

База індукції:

$$\mu_0 = \tau = \frac{1}{u^{-1} + u} = \frac{u^{-1} - u^1}{u^{-2} - u^2}.$$

Індуктивний крок:

$$\mu_s = \frac{1}{\tau^{-1} - \mu_{s-1}} = \frac{1}{(u^{-1} + u) - \dfrac{u^{-s} - u^s}{u^{-(s+1)} - u^{s+1}}} =$$

$$= \frac{u^{-(s+1)} - u^{s+1}}{(u^{-1} + u)(u^{-(s+1)} - u^{s+1}) - (u^{-s} - u^s)} = \frac{u^{-(s+1)} - u^{s+1}}{u^{-(s+2)} - u^{s+2}}.$$

5. Таким чином, рівність $\mu_s(u) = \lambda_m^{-1},\ u \in (0;1)$, виконується тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $g_{m,s}(u) = 0,\ u \in (0;1)$.

Похідна функції $g_{m,s}(u)$

$$g'_{m,s}(u) = (2s+4)u^{2s+3} - \lambda_m(2s+3)u^{2s+2} + \lambda_m$$

на інтервалі $(0;1)$ монотонно спадає, оскільки

$$g''_{m,s}(u) = (2s+4)(2s+3)u^{2s+2} - \lambda_m(2s+3)(2s+2)u^{2s+1} =$$

$$= 2(s+2)(2s+3)u^{2s+1}\left(u - \lambda_m \frac{s+1}{s+2}\right) < 0.$$

Зважаючи на те, що

$$g_{m,s}(0) = -1, \qquad g'_{m,s}(0) = \lambda_m > 0,$$

$$g_{m,s}(1) = 0, \qquad g'_{m,s}(1) = 2(s+2)\left(1 - \lambda_m \frac{s+1}{s+2}\right) < 0,$$

приходимо до висновку, що функція $g_{m,s}(u)$ на інтервалі $(0;1)$ спочатку монотонно зростає, а потім монотонно спадає, прямуючи до 0, отже, вона має єдиний максимум на цьому інтервалі. Позначимо його через $u_{\max}$ і зауважимо, що $g_{m,s}(u_{\max}) > 0$. Тоді на інтервалі $(0;1)$ функція $g_{m,s}(u)$ має єдиний корінь $u_{m,s}$, і він лежить зліва від $u_{\max}$. На інтервалі $[0; u_{\max})$ функція $g_{m,s}(u)$ монотонно зростає, отже, можемо застосувати алгоритм Ньютона для знаходження кореня $u_{m,s}$:

$$u_{m,s} = \lim_{k\to\infty} u_k, \qquad u_{k+1} = u_k - \frac{g_{m,s}(u_k)}{g'_{m,s}(u_k)},$$

при цьому в якості u_0 можна взяти довільну точку інтервалу $[0; u_{\max})$. Покладемо $u_0 = 0$, тоді $u_1 = \lambda_m^{-1}$, що завершує доведення теореми.

Література

1. Ю. С. Самойленко, А. В. Стрелец, *О простых n-ках подпространств гильбертова пространства*, Укр. мат. журн., **61**, № 12, 1668–1703 (2009).
2. М. А. Власенко, Н. Д. Попова, *О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксированными углами между ними*, Укр. мат. журн., **56**, № 5, 606–615 (2004).
3. H. Wenzl, *On sequences of projections*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can., **9**, № 1, 5–9 (1987).
4. N. D. Popova, *On finite-dimensional representations of one algebra of Temperley–Lieb type*, Methods Funct. Anal. and Topology, **7**, № 3, 80–92 (2001).
5. Н. Д. Попова, О. В. Стрілець, *Про системи підпросторів гільбертового простору, що пов'язані з уніциклічним графом*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **1**, № 1, 166–177 (2015).

Одержано 02.11.20