УДК 517.9

А. А. Бойчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
С. М. Чуйко, Я. В. Калиниченко (Донбас. гос. пед. ун-т, Славянск)

ЛИНЕЙНАЯ НЕТЕРОВА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ*

We establish constructive conditions for the solvability and propose a scheme for constructing solutions of a linear Noetherian boundary-value problem for a matrix difference equation. We suggest an original scheme of regularization of a linear Noetherian boundary-value problem for a linear degenerate system of difference equations.

Встановлено конструктивні умови розв'язності та наведено схему побудови розв'язків лінійної нетерової крайової задачі для матричного різницевого рівняння. Запропоновано оригінальну схему регуляризації лінійної нетерової крайової задачі для лінійної виродженої системи різницевих рівнянь.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о нахождении ограниченных решений [1, 2] $Z(k) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ k \in \Omega := \{0,1,2,\dots,\omega\}$ линейной нетеровой $(\alpha \neq \beta \neq \lambda \neq \mu)$ краевой задачи [3]

$$Z(k+1) = AZ(k) + Z(k)B + F(k), \qquad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A}. \tag{1}$$

Компоненты $Z^{(i,j)}(k),\ F^{(i,j)}(k)\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$ матриц $Z(k)$ и $F(k) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ предполагаем ограниченными на множестве Ω функциями. Здесь $A \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha},\ B \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta}$ и $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}$ — постоянные матрицы, $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot)\colon\ \big\{Z(k)\colon \Omega \to \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}\big\} \to \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}.$$

Конструктивные условия разрешимости и структура решения общей нетеровой краевой задачи были получены в монографии [1]. Условия разрешимости, а также конструкция оператора Грина нетеровой краевой задачи (1) для традиционного $(\beta = \mu = 1)$ разностного уравнения были получены в статье [3], как обобщение классических результатов для систем разностных уравнений [4]. В свою очередь, условия разрешимости и структура периодического решения систем матричного дифференциального уравнения получены в статье [2] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [5].

Общее решение полуоднородной задачи Коши

$$Z(k+1) = AZ(k) + Z(k)B + F(k), \qquad Z(0) = \Theta, \tag{2}$$

представимо в виде [6]

$$Z(k) = W(k,\Theta) + K\big[F(s)\big](k),$$

где

$$W(k,\Theta) := \sum_{j=0}^{k} C_k^{k-j} A^{k-j}\,\Theta\, B^j$$

— общее решение однородной части матричного разностного уравнения (1) и

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0118U003390).

$$K\big[F(s)\big](k) := \sum_{j=0}^{k-1} W\big[j, F(k-1-j)\big]$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши (2).

Лемма 1. *Общее решение линейной полуоднородной задачи Коши* (2)

$$Z(k) = W(k, \Theta) + K\big[F(s)\big](k), \qquad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

определяет обобщенный оператор Грина задачи Коши (2).

Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить общее решение в матричное разностное уравнение (1).

Подставляя общее решение задачи Коши (2) в краевое условие (1), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{L}W(\cdot, \Theta) = \mathcal{A} - \mathcal{L}K\big[F(s)\big](\cdot) \tag{3}$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Обозначим через $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ j = 1, 2, \ldots, \alpha\,\beta$, базис пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, а через $c_j,\ j = 1, 2, \ldots, \alpha\,\beta$, константы, определяющие разложение матрицы

$$\Theta = \sum_{j=1}^{\alpha\,\beta} \Xi^{(j)} c_j, \qquad c_j \in \mathbb{R}^1, \qquad j = 1, 2, \ldots, \alpha\,\beta,$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при этом

$$\mathcal{L}W(\cdot, \Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha\,\beta} \mathcal{L}W\big[\cdot, \Xi^{(j)}\big] c_j.$$

Итак, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\sum_{j=1}^{\alpha\,\beta} \mathcal{L}W\big[\cdot, \Xi^{(j)}\big] c_j = \mathcal{A} - \mathcal{L}K\big[F(s)\big](\cdot)$$

относительно $\alpha\,\beta$ констант $c_j \in \mathbb{R}^1,\ j = 1, 2, \ldots, \alpha\,\beta$. Определим оператор [7, 8]

$$\mathcal{M}[\mathcal{B}]\colon\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\,n},$$

как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{mn}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$, а также обратный оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\big\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\big\}\colon\ \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору-столбцу $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{mn}$ матрицу $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{mn}$. Заметим, что оператор $\mathcal{M}[A]$, как и обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$, могут быть представлены в явном виде [7, 8].

2. Условие разрешимости нетеровой краевой задачи для матричного разностного уравнения. В новых обозначениях приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{Q}c = \mathcal{M}\big[\mathcal{A}\big] - \mathcal{M}\big\{\mathcal{L}K\big[F(s)\big](\cdot)\big\}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha\,\beta}$. Здесь

$$\mathcal{Q} := \big[\ \mathcal{M}\big[\mathcal{Q}^{(1)}\big]\ \ \mathcal{M}\big[\mathcal{Q}^{(2)}\big]\ \ldots\ \mathcal{M}\big[\mathcal{Q}^{(\alpha\,\beta)}\big]\ \big],$$

где

$$\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{\lambda\mu\times\alpha\beta}, \qquad \mathcal{Q}^{(j)} := \mathcal{L}W\big[\cdot, \Xi^{(j)}\big] \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}, \qquad j = 1, 2, \ldots, \alpha\,\beta.$$

Как известно [1, 7], последнее уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\big\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K\big[F(s)\big](\cdot)\big\} = 0. \tag{4}$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\lambda\mu} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$, матрица $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк матрицы-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. При условии (4), и только при нем, общее решение уравнения (3)

$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}\big\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K\big[F(s)\big](\cdot)\big\} + P_{\mathcal{Q}_r}c_r, \qquad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

определяет общее решение нетеровой краевой задачи (1)

$$Z(k, \Theta_r) = W(k, \Theta_r) + G\big[F(s); \mathcal{A}\big](k), \qquad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}\big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\big],$$

где [6]

$$\Theta = \mathcal{M}^{-1}\big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}\big\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K\big[F(s)\big](\cdot)\big\}\big\} + \mathcal{M}^{-1}\big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\big],$$

$P_{\mathcal{Q}}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha\,\beta\times\alpha\,\beta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q})$, матрица $P_{\mathcal{Q}_r} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$,

$$G\big[F(s); \mathcal{A}\big](k) := W\big\{k, \mathcal{M}^{-1}\big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}\big[\mathcal{A} - \mathcal{L}K\big[F(s)\big](\cdot)\big]\big\}\big\} + K\big[F(s)\big](k)$$

— обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи (1).

Таким образом, доказана следующая теорема [6].

Теорема. *При условии* (4), *и только при нем, общее решение линейной нетеровой краевой задачи* (1)

$$Z(k, \Theta_r) = W(k, \Theta_r) + G\big[F(s); \mathcal{A}\big](k),$$

$$\Theta_r := \mathcal{M}^{-1}\big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\big], \qquad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

определяет обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи (1).

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для краевой задачи (1) имеет место критический случай, при этом задача (1) разрешима лишь для тех неоднородностей $F(k)$ и $\mathcal{A}$, для которых выполнено условие (4). При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для краевой задачи (1) имеет место некритический случай, при этом задача (1) разрешима для любых неоднородностей $F(k)$ и $\mathcal{A}$.

Доказанная теорема является обобщением [6] соответствующих утверждений [3] на случай матричной краевой задачи (1).

***Пример* 1.** Условия теоремы выполнены для матричной трехточечной разностной краевой задачи

$$Z(k+1) = AZ(k) + Z(k)B + F(k), \qquad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A}, \tag{5}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_1 := 1,\ \tau_2 := 2,\ \tau_3 := 4,$$

а также

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \sum_{i=1}^{3} M_i Z(\tau_i) N_i, \qquad M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной части матричного разностного уравнения (5) определяют матрицы

$$W(0,\Theta) = \Theta := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(1,\Theta) = \begin{pmatrix} c_{11}+c_{12}+c_{21} & c_{12}+c_{22} & c_{11}+2c_{13}+c_{23} \\ c_{21}+c_{22} & c_{22} & c_{21}+2c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(2,\Theta) = \begin{pmatrix} c_{11}+2(c_{12}+c_{21}+c_{22}) & c_{12}+2c_{22} & 3c_{11}+c_{12}+4c_{13}+2c_{21}+4c_{23} \\ c_{21}+2c_{22} & c_{22} & 3c_{21}+c_{22}+4c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(3,\Theta) =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11}+3(c_{12}+c_{21}+2c_{22}) & c_{12}+3c_{22} & 7c_{11}+4c_{12}+8c_{13}+9c_{21}+3c_{22}+12c_{23} \\ c_{21}+3c_{22} & c_{22} & 7c_{21}+4c_{22}+8c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(4,\Theta) :=$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11}+4(c_{12}+c_{21}+3c_{22}) & c_{12}+4c_{22} & 15c_{11}+11c_{12}+4(4c_{13}+7c_{21}+4c_{22}+8c_{23}) \\ c_{21}+4c_{22} & c_{22} & 15c_{21}+11c_{22}+16c_{23} \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \qquad \Xi^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— естественный базис [9] пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$ и $c_j,\ j = 1, 2, \ldots, 6,$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Поскольку

$$P_{Q^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

то для краевой задачи (5) имеет место критический случай. Общее решение

$$W(k, \Theta_r), \qquad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}\big[P_{\mathcal{Q}_r} c_r\big], \qquad c_r \in \mathbb{R}^4,$$

однородной части задачи (5) определяют матрица

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 15 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 37 & 14 & 21 & 20 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 15 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и ее ортопроектор

$$P_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} \frac{741\,273}{819\,892} & -\frac{34\,744}{204\,973} & -\frac{28\,595}{819\,892} & \frac{8\,715}{819\,892} & -\frac{22\,500}{204\,973} & -\frac{173\,119}{819\,892} \\ -\frac{34\,744}{204\,973} & \frac{139\,590}{204\,973} & -\frac{20\,873}{204\,973} & -\frac{22\,992}{204\,973} & -\frac{37\,740}{204\,973} & -\frac{74\,371}{204\,973} \\ -\frac{28\,595}{819\,892} & -\frac{20\,873}{204\,973} & \frac{741\,069}{819\,892} & -\frac{219\,837}{819\,892} & -\frac{3\,960}{204\,973} & -\frac{45\,227}{819\,892} \\ \frac{8\,715}{819\,892} & -\frac{22\,992}{204\,973} & -\frac{219\,837}{819\,892} & \frac{92\,089}{819\,892} & \frac{16\,260}{204\,973} & \frac{77\,007}{819\,892} \\ -\frac{22\,500}{204\,973} & -\frac{37\,740}{204\,973} & -\frac{3\,960}{204\,973} & \frac{16\,260}{204\,973} & \frac{178\,173}{204\,973} & -\frac{50\,640}{204\,973} \\ -\frac{173\,119}{819\,892} & -\frac{74\,371}{204\,973} & -\frac{45\,227}{819\,892} & \frac{77\,007}{819\,892} & -\frac{50\,640}{204\,973} & \frac{434\,085}{819\,892} \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$P_{\mathcal{Q}_r} = \begin{pmatrix} \dfrac{741\,273}{819\,892} & -\dfrac{34\,744}{204\,973} & -\dfrac{28\,595}{819\,892} & \dfrac{8\,715}{819\,892} \\[2ex] -\dfrac{34\,744}{204\,973} & \dfrac{139\,590}{204\,973} & -\dfrac{20\,873}{204\,973} & -\dfrac{22\,992}{204\,973} \\[2ex] -\dfrac{28\,595}{819\,892} & -\dfrac{20\,873}{204\,973} & \dfrac{741\,069}{819\,892} & -\dfrac{219\,837}{819\,892} \\[2ex] \dfrac{8\,715}{819\,892} & -\dfrac{22\,992}{204\,973} & -\dfrac{219\,837}{819\,892} & \dfrac{92\,089}{819\,892} \\[2ex] -\dfrac{22\,500}{204\,973} & -\dfrac{37\,740}{204\,973} & -\dfrac{3\,960}{204\,973} & \dfrac{16\,260}{204\,973} \\[2ex] -\dfrac{173\,119}{819\,892} & -\dfrac{74\,371}{204\,973} & -\dfrac{45\,227}{819\,892} & \dfrac{77\,007}{819\,892} \end{pmatrix}$$

составлена из $r = 4$ линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$. Частное решение полуоднородной задачи Коши $Z(0) = \Theta$ для системы (5) представляет обобщенный оператор Грина задачи Коши

$$K\big[F(s)\big](0) = 0, \qquad K\big[F(s)\big](1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K\big[F(s)\big](2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$K\big[F(s)\big](3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad K\big[F(s)\big](4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 37 \\ 4 & 0 & 22 \end{pmatrix}.$$

Условие (4) в случае неоднородной задачи (5) выполнено, поэтому общее решение

$$Z(k, \Theta_r) = W(k, \Theta_r) + G\big[F(s); \mathcal{A}\big](k), \qquad c_r \in \mathbb{R}^4,$$

неоднородной задачи (5) определяет обобщенный оператор Грина

$$G\big[F(s); \mathcal{A}\big](k) := W\big\{k, \mathcal{M}^{-1}\big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}\big[\mathcal{A} - \mathcal{L}K\big[F(s)\big](\cdot)\big]\big\}\big\} + K\big[F(s)\big](k)$$

краевой задачи (5). Здесь

$$G\big[F(s); \mathcal{A}\big](0) = -\frac{1}{204\,973}\begin{pmatrix} 29\,982 & 49\,551 & 24\,780 \\ 71\,607 & 122\,634 & 56\,001 \end{pmatrix},$$

$$G\big[F(s); \mathcal{A}\big](1) = \frac{1}{204\,973}\begin{pmatrix} -151\,140 & -172\,185 & 69\,430 \\ 10\,732 & -122\,634 & 183\,609 \end{pmatrix},$$

$$G\big[F(s); \mathcal{A}\big](2) = \frac{1}{204\,973}\begin{pmatrix} -107\,620 & -294\,819 & 9\,084 \\ 93\,071 & -122\,634 & -151\,513 \end{pmatrix},$$

$$G\big[F(s); \mathcal{A}\big](3) = \frac{1}{204\,973}\begin{pmatrix} 100\,578 & -417\,453 & -35\,992 \\ 175\,410 & -122\,634 & 199\,991 \end{pmatrix},$$

$$G\big[F(s); \mathcal{A}\big](4) = \frac{1}{204\,973}\begin{pmatrix} 473\,454 & -540\,087 & 433\,558 \\ 257\,749 & -122\,634 & 1\,190\,311 \end{pmatrix}.$$

В некритическом случае, при условии $P_{Q^*} = 0$, задача (1) разрешима для любых неоднородностей $F(k)$ и $\mathcal{A}$.

3. Регуляризация нетеровой краевой задачи для матричного разностного уравнения. Для решения задачи о нахождении ограниченных решений линейной матричной краевой задачи (1) в критическом случае применима техника регуляризации [10–12]. Таким образом, поставим задачу о нахождении малого возмущения краевого условия (1) таким образом, чтобы возмущенная краевая задача стала разрешимой для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (1). Возмущение функционала

$$\mathcal{L}Z(\cdot): \ \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}$$

будем искать в виде линейного ограниченного векторного функционала

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\sum_{j=1}^{q}\Phi_j Z(\tau_j)\Psi_j, \qquad \tau_j \in \Omega,$$

определенного на пространстве ограниченных функций $z(k,\varepsilon)$. Здесь

$$\Phi_j \in \mathbb{R}^{\lambda\times\alpha}, \qquad \Psi_j \in \mathbb{R}^{\mu\times\beta}, \qquad j = 1,\ 2,\ldots,q,$$

— неизвестные постоянные матрицы. Таким образом, возмущенную матрицу $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ будем искать в виде

$$\mathcal{Q}(\varepsilon) := Q+\varepsilon\left[\mathcal{M}\sum_{j=1}^{q}\Phi_j\, W(\tau_j,\Xi^{(1)})\Psi_j\ \mathcal{M}\sum_{j=1}^{q}\Phi_j\, W(\tau_j,\Xi^{(2)})\Psi_j\ \ldots\ \mathcal{M}\sum_{j=1}^{q}\Phi_j\, W(\tau_j,\Xi^{(1)})\Psi_j\right],$$

предполагая матрицу $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ матрицей полного ранга:

$$P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon) = 0, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

в частности, в случае $\alpha\beta = \lambda\mu$ невырожденной матрицей. В общем случае $\alpha\beta \neq \lambda\mu$ условие полноты ранга матрицы $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ равносильно уравнению

$$\mathcal{Q}(\varepsilon)\mathcal{Q}^+(\varepsilon) = I_{\lambda\mu} \tag{6}$$

относительно матриц $\Phi_j,\ \Psi_j$, определяющих матрицу $\mathcal{Q}(\varepsilon)$. Заметим, что в случае $P_{Q^*} \neq 0$ уравнение (6) разрешимо лишь для $\alpha\beta \leq \lambda\mu$. Таким образом, приходим к задаче о нахождении ограниченных решений

$$Z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

регуляризованной краевой задачи для системы матричных разностных уравнений

$$Z(k+1,\varepsilon) = AZ(k,\varepsilon) + Z(k,\varepsilon)B + F(k), \qquad \check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) = \mathcal{A}. \tag{7}$$

В силу равенства $P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon) = 0$ для любого действительного корня $\Phi_j,\ \Psi_j$ уравнения (6) регуляризованная краевая задача (7) разрешима для любых неоднородностей краевого условия и системы разностных уравнений (7).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие. *Линейная нетерова краевая задача для линейной системы разностных уравнений первого порядка* (1) *в критическом случае*

$$P_{Q^*} \neq 0, \qquad \alpha\beta \leq \lambda\mu$$

может быть регуляризована возмущением краевого условия

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\sum_{j=1}^{q}\Phi_j Z(\tau_j)\Psi_j, \qquad \tau_j \in \mathbb{N}\cap[a,b].$$

Для любых действительных корней $\Phi_j,\ \Psi_j$ *уравнения* (6) *регуляризованная краевая задача* (7) *разрешима для любых неоднородностей краевого условия и системы разностных уравнений* (7), *при этом решение* $Z(k,\varepsilon)$ *линейной нетеровой краевой задачи* (7) *представимо в виде*

$$Z(k,\varepsilon) = W(k,\Theta_r(\varepsilon)) + \mathcal{G}\big[F(s);\mathcal{A}\big](k,\varepsilon), \qquad \Theta_r(\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\big[P_{\mathcal{Q}_r}(\varepsilon)c_r\big],$$

где

$$\Theta(\varepsilon) = \mathcal{M}^{-1}\big\{\mathcal{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\big\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K\big[F(s)\big](\cdot)\big\}\big\} + \mathcal{M}^{-1}(\varepsilon)\big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\big],$$

$P_{\mathcal{Q}}(\varepsilon)$ — *ортопроектор:*

$$\mathbb{R}^{\alpha\,\beta\times\alpha\,\beta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}(\varepsilon)),$$

матрица $P_{\mathcal{Q}_r}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta\times r}$ *составлена из* r *линейно независимых столбцов ортопроектора* $P_{\mathcal{Q}}(\varepsilon)$,

$$G\big[F(s);\mathcal{A}\big](k,\varepsilon) := W\big\{k,\mathcal{M}^{-1}\big\{\mathcal{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\big[\mathcal{A} - \check{\mathcal{L}}K\big[F(s)\big](\cdot,\varepsilon)\big]\big\}\big\} + K\big[F(s)\big](k)$$

— *обобщенный оператор Грина регуляризованной краевой задачи* (7) *для системы матричных уравнений.*

***Пример* 2.** Условия следствия выполнены для матричной трехточечной разностной краевой задачи (5), исследованной в примере 1.

Поскольку $P_{Q^*} \neq 0$, то для краевой задачи (5) имеет место критический случай, кроме того, в силу равенства $\alpha\beta = \lambda\mu$ для любых действительных корней $\Phi_j,\ \Psi_j$ уравнения (6) регуляризованная краевая задача разрешима для любых неоднородностей краевого условия и системы разностных уравнений (5). В данном случае корнями уравнения (6) являются матрицы

$$\Phi_1 = \Phi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_2 = \Phi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а также константы $\tau_1 := 0,\ \tau_2 := 1,\ \tau_3 := 2,\ \tau_4 := 3$. Таким образом, получаем непрерывную матрицу

$$\mathcal{Q}(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\mathcal{Q}_1(\varepsilon) & \mathcal{Q}_2(\varepsilon)\end{pmatrix}\in\mathbb{C}_{5\times6}[0,\varepsilon_0]$$

полного ранга:

$$P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon)=0,\qquad 0<\varepsilon_0\ll 1.$$

Здесь

$$\mathcal{Q}_1(\varepsilon):=\begin{pmatrix}2+3\varepsilon & 3+5\,\varepsilon & 6+4\,\varepsilon\\ 8\,\varepsilon & 12\,\varepsilon & 10\,\varepsilon\\ 16+10\,\varepsilon & 27+17\,\varepsilon & 10+9\,\varepsilon\\ \varepsilon & 0 & 6\,\varepsilon\\ 2+7\,\varepsilon & 3+12\,\varepsilon & 6+4\,\varepsilon\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_2(\varepsilon)=\begin{pmatrix}11+8\,\varepsilon & \varepsilon & 1+2\,\varepsilon\\ 12\,\varepsilon & 11\,\varepsilon & 16\,\varepsilon\\ 15+13\,\varepsilon & 18+11\,\varepsilon & 29+18\,\varepsilon\\ 8\,\varepsilon & \varepsilon & 0\\ 11+6\,\varepsilon & 9\,\varepsilon & 1+15\,\varepsilon\end{pmatrix}.$$

Так как

$$P_{\mathcal{Q}_r}(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\dfrac{2\left(-224-107\varepsilon+25\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4}\\ -\dfrac{\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)\left(-400-201\varepsilon+46\varepsilon^2\right)}{2\,(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4)}\\ \dfrac{\left(-220-76\varepsilon+17\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{2\,(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4)}\\ -\dfrac{\left(-200-72\varepsilon+17\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{2\,(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4)}\\ -\dfrac{11\left(-28-14\varepsilon+3\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4}\\ \dfrac{\left(288+155\varepsilon-32\varepsilon^2\right)^2}{2\,(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4)}\end{pmatrix}\neq 0,$$

то регуляризованная краевая задача разрешима для любых неоднородностей краевого условия и системы разностных уравнений (5), причем неоднозначно: решение $Z(k,\varepsilon)$ однородной части возмущенной нетеровой краевой задачи (5) представимо в виде

$$Z(k,\varepsilon)=W(k,\Theta_r(\varepsilon)),\qquad \Theta_r(\varepsilon):=\mathcal{M}^{-1}\big[P_{\mathcal{Q}_r}(\varepsilon)c_r\big],\quad c_r\in\mathbb{R}^1,$$

где

$$W^*(k,\Theta_r(\varepsilon))=\begin{pmatrix}W_1(k,\Theta_r(\varepsilon)) & W_2(k,\Theta_r(\varepsilon))\end{pmatrix}\in\mathbb{C}_{3\times2}[0,\varepsilon_0];$$

$$W_1(1,\Theta_r(\varepsilon)) = \begin{pmatrix} -\dfrac{51\,840+63\,900\varepsilon+5\,263\varepsilon^2-8\,495\varepsilon^3+928\varepsilon^4}{2\left(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4\right)} \\ -\dfrac{\left(-200-72\varepsilon+17\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{2\left(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4\right)} \\ \dfrac{163\,584+167\,240\varepsilon+5\,441\varepsilon^2-19\,030\varepsilon^3+2\,112\varepsilon^4}{2\left(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4\right)} \end{pmatrix},$$

$$W_2(1,\Theta_r(\varepsilon)) = \begin{pmatrix} \dfrac{85\,248+90\,520\varepsilon+3\,897\varepsilon^2-10\,695\varepsilon^3+1\,184\varepsilon^4}{2\left(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4\right)} \\ \dfrac{2\,880+2\,126\varepsilon-10\varepsilon^2-64\varepsilon^3}{756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4} \\ -\dfrac{126\,720+125\,512\varepsilon+2\,941\varepsilon^2-13\,808\varepsilon^3+1\,536\varepsilon^4}{2\left(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4\right)} \end{pmatrix};$$

$$W_1(2,\Theta_r(\varepsilon)) = \begin{pmatrix} \dfrac{27\,648+38\,784\varepsilon+4\,033\varepsilon^2-5\,756\varepsilon^3+640\varepsilon^4}{2\left(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4\right)} \\ \dfrac{2\,880+2\,126\varepsilon-10\varepsilon^2-64\varepsilon^3}{756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4} \\ -\dfrac{14\,976+22\,172\varepsilon+2\,763\varepsilon^2-3\,273\varepsilon^3+352\varepsilon^4}{2\left(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4\right)} \end{pmatrix},$$

$$W_2(2,\Theta_r(\varepsilon)) = \begin{pmatrix} \dfrac{19\,584+15\,436\varepsilon-693\varepsilon^2-1\,164\varepsilon^3+128\varepsilon^4}{756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4} \\ -\dfrac{\left(-180-68\varepsilon+17\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{2\left(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4\right)} \\ \dfrac{-4\,608+6\,736\varepsilon+3\,456\varepsilon^2-2\,109\varepsilon^3+224\varepsilon^4}{2\left(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4\right)} \end{pmatrix};$$

$$W_1(3,\Theta_r(\varepsilon)) = \begin{pmatrix} \dfrac{22\,464+17\,562\varepsilon-703\varepsilon^2-1\,228\varepsilon^3+128\varepsilon^4}{756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4} \\ -\dfrac{\left(-180-68\varepsilon+17\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{2\left(756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4\right)} \\ \dfrac{4\,032+11\,674\varepsilon+2\,363\varepsilon^2-2\,296\varepsilon^3+256\varepsilon^4}{756\,808+729\,376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\,850\varepsilon^3+9\,037\varepsilon^4} \end{pmatrix},$$

$$W_2(3,\Theta_r(\varepsilon)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\left(-52-49\varepsilon+11\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)} \\[2ex] -\dfrac{\left(-160-64\varepsilon+17\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)} \\[2ex] \dfrac{14\ 976+22\ 172\varepsilon+2\ 763\varepsilon^2-3\ 273\varepsilon^3+352\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)} \end{pmatrix};$$

$$W_1(4,\Theta_r(\varepsilon)) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\left(-128-19\varepsilon+6\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)} \\[2ex] -\dfrac{\left(-160-64\varepsilon+17\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)} \\[2ex] \dfrac{67\ 968+80\ 644\varepsilon+6\ 083\varepsilon^2-10\ 321\varepsilon^3+1\,120\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)} \end{pmatrix},$$

$$W_2(4,\Theta_r(\varepsilon)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\left(-48-23\varepsilon+2\varepsilon^2\right)\left(-288-155\varepsilon+32\varepsilon^2\right)}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)} \\[2ex] \dfrac{-48\ 960-45\ 358\varepsilon+106\varepsilon^2+4\ 747\varepsilon^3-544\varepsilon^4}{756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4} \\[2ex] \dfrac{52\ 992+89\ 864\varepsilon+13\ 015\varepsilon^2-14\ 411\varepsilon^3+1\,568\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)} \end{pmatrix}.$$

Решение $Z(k,\varepsilon)$ неоднородной возмущенной нетеровой краевой задачи (5) представимо в виде

$$Z(k,\varepsilon) = W(k,\Theta_r(\varepsilon)) + \mathcal{G}\big[F(s);\mathcal{A}\big](k,\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{G}^*\big[F(s);\mathcal{A}\big](k,\varepsilon) = \big(\mathcal{G}_1\big[F(s);\mathcal{A}\big](k,\varepsilon) \qquad \mathcal{G}_2\big[F(s);\mathcal{A}\big](k,\varepsilon)\big)\,;$$

$$\mathcal{G}_1\big[F(s);\mathcal{A}\big](0) = \begin{pmatrix} \dfrac{557\ 152+1\,045\ 392\varepsilon+544\ 532\varepsilon^2+54\ 060\varepsilon^3-27\ 576\varepsilon^4}{756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4} \\[2ex] \dfrac{354\ 688-1\,929\ 512\varepsilon-1\,251\,740\varepsilon^2+145\ 189\varepsilon^3+20\ 627\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)} \\[2ex] \dfrac{1\,319\ 776+1\,573\ 512\varepsilon+544\ 296\varepsilon^2-7\ 639\varepsilon^3-24\ 093\varepsilon^4}{756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}_2\big[F(s);\mathcal{A}\big](0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2\,227\,304 + 2\,979\,216\varepsilon + 548\,281\varepsilon^2 - 246\,869\varepsilon^3 + 12\,224\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \\[2ex] \dfrac{-735\,248 + 792\,408\varepsilon + 666\,598\varepsilon^2 - 120\,497\varepsilon^3 - 2\,553\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \\[2ex] -\dfrac{1\,696\,024 + 1\,639\,328\varepsilon + 619\,823\varepsilon^2 + 89\,341\varepsilon^3 - 43\,080\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{G}_1\big[F(s);\mathcal{A}\big](1) = \begin{pmatrix} \dfrac{-1\,872\,616 - 4\,908\,728\varepsilon - 1\,800\,021\varepsilon^2 + 392\ \ 058\varepsilon^3 + 8403\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \\[2ex] \dfrac{-735\,248 + 792\,408\varepsilon + 666\,598\varepsilon^2 - 120\,497\varepsilon^3 - 2\,553\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \\[2ex] \dfrac{3\,571\,448 + 5\,057\,232\varepsilon + 1\,581\,243\varepsilon^2 - 156\,199\varepsilon^3 - 42\,184\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}_2\big[F(s);\mathcal{A}\big](1) = \begin{pmatrix} \dfrac{-334\,632 + 1\,362\,728\varepsilon + 123\,0791\varepsilon^2 + 74\,792\varepsilon^3 - 51\,855\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \\[2ex] \dfrac{-190\,280 - 568\,552\varepsilon - 292\,571\varepsilon^2 + 12\,346\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4}{756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4} \\[2ex] \dfrac{-2\,979\,800 - 3\,110\,848\varepsilon - 699\,335\varepsilon^2 + 52\,909\varepsilon^3 + 25\,750\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{G}_1\big[F(s);\mathcal{A}\big](2) = \begin{pmatrix} \dfrac{443\,736 + 3\,613\,888\varepsilon + 1\,920\,799\varepsilon^2 - 205\,405\varepsilon^3 - 36\,334\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \\[2ex] \dfrac{-190\,280 - 568\,552\varepsilon - 292\,571\varepsilon^2 + 12\,346\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4}{756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4} \\[2ex] \dfrac{232\,648 - 1\,503\,592\varepsilon - 894\,703\varepsilon^2 + 129\,068\varepsilon^3 + 10\,043\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}_2\big[F(s);\mathcal{A}\big](2) = \begin{pmatrix} -\dfrac{537\,096 + 1\,612\,176\varepsilon + 565\,481\varepsilon^2 - 165\,921\varepsilon^3 + 3\,652\varepsilon^4}{756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4} \\[2ex] \dfrac{-1\,115\,808 - 344\,696\varepsilon + 81\,456\varepsilon^2 - 95\,805\varepsilon^3 + 15\,521\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \\[2ex] \dfrac{-1\,209\,168 + 1\,657\,016\varepsilon + 1\,436\,774\varepsilon^2 - 135\,289\varepsilon^3 - 24\,465\varepsilon^4}{2\,(756\,808 + 729\,376\varepsilon + 11\,705\varepsilon^2 - 79\,850\varepsilon^3 + 9\,037\varepsilon^4)} \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{G}_1\big[F(s);\mathcal{A}\big](3)=\begin{pmatrix}\dfrac{786\ 240-721\,976\varepsilon-834\ 642\varepsilon^2+18\ 567\varepsilon^3+23\ 459\varepsilon^4}{756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4}\\[2mm] \dfrac{-1\,115\ 808-344\ 696\varepsilon+81\,456\varepsilon^2-95\ 805\varepsilon^3+15\ 521\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)}\\[2mm] \dfrac{490\ 416+2\ 613\ 032\varepsilon+1\,243\ 140\varepsilon^2-185\ 663\varepsilon^3-16\ 341\varepsilon^4}{756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}_2\big[F(s);\mathcal{A}\big](3)=\begin{pmatrix}\dfrac{-232\ 648+1\,503\ 592\varepsilon+894\ 703\varepsilon^2-129\ 068\varepsilon^3-10\ 043\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)}\\[2mm] -\dfrac{1496\ 368+1\,481\,800\varepsilon+503\ 686\varepsilon^2+71\,113\varepsilon^3-33\ 595\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)}\\[2mm] \dfrac{-232\ 648+1\,503\ 592\varepsilon+894\ 703\varepsilon^2-129\ 068\varepsilon^3-10\ 043\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)}\end{pmatrix};$$

$$\mathcal{G}_1\big[F(s);\mathcal{A}\big](4)=\begin{pmatrix}\dfrac{3\ 192\ 392+5\ 535\ 152\varepsilon+1\,046\ 389\varepsilon^2-703\ 973\varepsilon^3+59\ 700\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)}\\[2mm] -\dfrac{1\,496\ 368+1\,481\,800\varepsilon+503\ 686\varepsilon^2+71\,113\varepsilon^3-33\ 595\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)}\\[2mm] \dfrac{3\ 834\ 280+6\ 744\ 456\varepsilon+1\,735\ 109\varepsilon^2-622\ 960\varepsilon^3+22\ 267\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}_2\big[F(s);\mathcal{A}\big](4)=\begin{pmatrix}\dfrac{1\,357\ 080+36\ 592\varepsilon-1\,254\ 857\varepsilon^2-322\ 747\varepsilon^3+88\ 544\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)}\\[2mm] -\dfrac{1\,306\ 088+913\ 248\varepsilon+211\,115\varepsilon^2+83\ 459\varepsilon^3-24\ 558\varepsilon^4}{756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4}\\[2mm] \dfrac{4\ 823\ 736+14\ 113\ 096\varepsilon+5\ 240\ 619\varepsilon^2-1\,237\ 630\varepsilon^3-8\ 589\varepsilon^4}{2\,(756\ 808+729\ 376\varepsilon+11\,705\varepsilon^2-79\ 850\varepsilon^3+9\ 037\varepsilon^4)}\end{pmatrix}.$$

Найденное ограниченное решение $Z(k,\varepsilon)$ регуляризованной краевой задачи для матричной краевой задачи (5) определяет ограниченное решение $\mathcal{Z}(k)$ этой краевой задачи:

$$\mathcal{Z}(k):=Z(k,0)=W(k,\Theta_r(0))+\mathcal{G}\big[F(s);\mathcal{A}\big](k,0),\quad c_r\in\mathbb{R}^1,$$

где

$$W(0,\Theta_r(0))=\Theta_r(0)\,c_r=\begin{pmatrix}\dfrac{16\ 128}{94\ 601} & \dfrac{3\ 960}{94\ 601} & -\dfrac{11\,088}{94\ 601}\\[2mm] -\dfrac{7\ 200}{94\ 601} & -\dfrac{3\ 600}{94\ 601} & \dfrac{5\ 184}{94\ 601}\end{pmatrix}c_r,$$

$$W(1,\Theta_r(0)) = \begin{pmatrix} -\dfrac{3\,240}{94\,601} & -\dfrac{3\,600}{94\,601} & \dfrac{10\,224}{94\,601} \\ \dfrac{5\,328}{94\,601} & \dfrac{360}{94\,601} & -\dfrac{7\,920}{94\,601} \end{pmatrix} c_r,$$

$$W(2,\Theta_r(0)) = \begin{pmatrix} \dfrac{1\,728}{94\,601} & \dfrac{360}{94\,601} & -\dfrac{72}{7\,277} \\ \dfrac{2\,448}{94\,601} & -\dfrac{3\,240}{94\,601} & -\dfrac{288}{94\,601} \end{pmatrix} c_r,$$

$$W(3,\Theta_r(0)) = \begin{pmatrix} \dfrac{216}{7\,277} & -\dfrac{3\,240}{94\,601} & \dfrac{504}{94\,601} \\ \dfrac{72}{7\,277} & -\dfrac{2\,880}{94\,601} & \dfrac{72}{7\,277} \end{pmatrix} c_r,$$

$$W(4,\Theta_r(0)) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2\,304}{94\,601} & -\dfrac{2\,880}{94\,601} & \dfrac{4\,248}{94\,601} \\ \dfrac{864}{94\,601} & -\dfrac{6\,120}{94\,601} & \dfrac{3\,312}{94\,601} \end{pmatrix} c_r,$$

кроме того,

$$\mathcal{G}\big[F(s);\mathcal{A}\big](0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{69\,644}{94\,601} & \dfrac{22\,168}{94\,601} & \dfrac{164\,972}{94\,601} \\ -\dfrac{278\,413}{189\,202} & -\dfrac{45\,953}{94\,601} & -\dfrac{212\,003}{189\,202} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}\big[F(s);\mathcal{A}\big](1,0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{234\,077}{189\,202} & -\dfrac{45\,953}{94\,601} & \dfrac{446\,431}{189\,202} \\ -\dfrac{41\,829}{189\,202} & -\dfrac{23\,785}{94\,601} & -\dfrac{372\,475}{189\,202} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}\big[F(s);\mathcal{A}\big](2,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{55\,467}{189\,202} & -\dfrac{23\,785}{94\,601} & \dfrac{2\,237}{14\,554} \\ -\dfrac{67\,137}{94\,601} & -\dfrac{69\,738}{94\,601} & -\dfrac{75\,573}{94\,601} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}\big[F(s);\mathcal{A}\big](3,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{7\,560}{7\,277} & -\dfrac{69\,738}{94\,601} & \dfrac{61\,302}{94\,601} \\ -\dfrac{2\,237}{14\,554} & -\dfrac{93\,523}{94\,601} & -\dfrac{2\,237}{14\,554} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}\big[F(s);\mathcal{A}\big](4,0)=\begin{pmatrix}\dfrac{399\,049}{189\,202} & -\dfrac{93\,523}{94\,601} & \dfrac{479\,285}{189\,202}\\[2ex] \dfrac{169\,635}{189\,202} & -\dfrac{163\,261}{94\,601} & \dfrac{602\,967}{189\,202}\end{pmatrix}.$$

Найденное с помощью техники регуляризации ограниченное решение $\mathcal{Z}(k)$ матричной краевой задачи (5) однопараметрично в отличие от ограниченного решения краевой задачи (5), найденного в примере 1, содержащего четыре произвольные скалярные константы.

Полученные в статье результаты исследования задачи о построении решений матричной разностной краевой задачи (1) могут быть аналогично [13 – 15] перенесены на матричные краевые задачи для разностно-алгебраических уравнений.

Литература

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2th ed., De Gruyter, Berlin; Boston (2016).
2. A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *A critical periodic boundary value problem for a matrix Riccati equations*, Different. Equat., **37**, № 4, 464 – 471 (2001).
3. А. А. Бойчук, *Краевые задачи для систем разностных уравнений*, Укр. мат. журн., **49**, № 6, 832 – 835 (1997).
4. Д. И. Мартынюк, *Лекции по качественной теории разностных уравнений*, Наук. думка, Киев (1972).
5. A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type*, Ukr. Math. J., **50**, № 8, 1162 – 1169 (1998).
6. С. М. Чуйко, *Обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного разностного уравнения*, Тавр. вестн. информатики и математики, № 1 (26), 104 – 116 (2015).
7. С. М. Чуйко, *Обобщенное матричное дифференциально-алгебраическое уравнение*, Укр. мат. вiсн., **12**, № 1, 11 – 26 (2015).
8. S. M. Chuiko, *The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem*, Siberian Math. J., **56**, № 4, 752 – 760 (2015).
9. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, Москва (1984).
10. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
11. А. Н.Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, Москва (1986).
12. S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, A. V. Belushenko, *On a regularization method for solving linear matrix equation*, Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. Ser. Math., **1**, 12 – 14 (2014).
13. A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, V. F. Chistyakov, *Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations*, Comput. Math. and Math. Phys., **53**, № 6, 777 – 788 (2013).
14. S. M. Chuiko, *On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem*, J. Math. Sci., **220**, № 5, 591 – 602 (2017).
15. S. Chuiko, *Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation*, Miskolc Math. Notes, **17**, № 1, 139 – 150 (2016).

Получено 06.01.19