DOI: 10.37863/umzh.v73i8.6377

УДК 517.958:512.86

І. А. Єгорченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ, ПРИХОВАНА ТА УМОВНА СИМЕТРІЯ

We provide a review on the development of hidden symmetry concept in the field of partial differential equations including a series of results previously obtained by the author. We also adduce new examples of classes of equations having type II hidden symmetry, and explain the nature of known non-classical symmetry of some equations.

We suggest an algorithm for description of classes of equations having specified conditional or hidden symmetry and/or reducible to equations with smaller number of independent variables by using a specific ansatz. We consider reductions that exist due to Lie, conditional and type II hidden symmetry. We also discuss relations between the concepts of hidden and conditional symmetry. It is proved that the type II hidden symmetry, which is previously regarded to be a special type of non-Lie symmetry, arises from the non-trivial Q-conditional symmetry of reduced equations. This approach allows not only to find the hidden symmetry and new reductions of known equations, but also makes it possible to describe a general form of equations from the specified Q-conditional and type II hidden symmetry.

As an example, we describe the general classes of equations with hidden and conditional symmetry under rotations in the Lorentz and Euclid groups, for which the relevant hidden and conditional symmetry allows reduction to radial equations with a smaller number of independent variables.

Наведено огляд розвитку поняття прихованої симетрії диференціальних рівнянь з частинними похідними та результатів, отриманих автором раніше, а також нові приклади класів рівнянь, що мають приховану симетрію II типу, і пояснено природу раніше знайденої некласичної симетрії деяких рівнянь.

Наведено конструктивний алгоритм для опису класів рівнянь, які мають визначену умовну або приховану симетрію, та/або можуть бути редуковані до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних з використанням заданого анзацу. Розглянуто редукції, які виникають завдяки ліївській та умовній симетрії, а також завдяки прихованій симетрії II типу. Обговорено взаємозв'язки між поняттями прихованої та умовної симетрії. Встановлено, що прихована симетрія II типу, яка раніше розглядалась як окремий тип неліївської симетрії, насправді виникає внаслідок нетривіальної Q-умовної симетрії редукованих рівнянь. Такий підхід дозволяє не тільки знаходити приховану симетрію та нові редукції відомих рівнянь, але й описувати загальний вигляд рівнянь із заданою Q-умовною та прихованою симетрією II типу.

Як приклади описано загальні класи рівнянь, що мають порушену симетрію відносно поворотів у групах Лоренца та Евкліда, для яких відповідна прихована та умовна симетрія дозволяє редукцію до радіальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних.

1. Основні поняття. Однією з ключових проблем у галузі симетрійного аналізу диференціальних рівнянь є опис рівнянь із заздалегідь визначеними симетрійними властивостями. Задачі опису рівнянь, інваріантних відносно певної групи, почав розглядати основоположник симетрійного аналізу диференціальних рівнянь Софус Лі, наприклад, у роботі [1]. Вибір рівнянь із визначеними симетрійними властивостями може означати, що такі рівняння матимуть розв'язки визначеної структури.

Поняття умовної та прихованої симетрії досліджувалися багатьма авторами (щодо умовної симетрії див. роботи [2 – 7]). При цьому розробці теорії та формальних означень передувала поява прикладів, які явно були симетріями диференціальних рівнянь, проте не відповідали класичному означенню симетрії в сенсі Лі. Поняття „прихована симетрія" щодо диференціальних рівнянь або математичних моделей має різні значення у різних контекстах, і звичайно це симетрія, яку не можна отримати шляхом застосування якоїсь стандартної процедури. Використання цього терміна є подібним до інших термінів типу „умовна симетрія", „наближена симетрія" та „симетрія" або „інваріантність", коли однакові слова у різних авторів можуть означати різні поняття.

Для розгляду умовної симетрії будемо використовувати поняття Q-умовної симетрії в тому сенсі, в якому воно описане в книзі В. І. Фущича, В. М. Штеленя та М. І. Сєрова [8].

Поняття прихованої симетрії I та II типу для звичайних диференціальних рівнянь (далі ЗДР) введено в роботах [9, 10]. Щодо ЗДР така симетрія виникає як симетрія рівнянь меншого порядку, яка не породжується симетрією початкового рівняння. Подібним чином, для диференціальних рівнянь з частинними похідними (далі ДРЧП) це є симетрія редукованого рівняння (зі зменшеною кількістю незалежних змінних), яка відсутня у початковому рівнянні. Проте для пошуку прихованих симетрій ми будемо розглядати не тільки симетрійні редукції.

Для ДРЧП така симетрія має певні особливості. Вперше поняття прихованої симетрії II типу та відповідне формальне означення саме для ДРЧП було запроваджене автором у роботі [11]. Це симетрія редукованого рівняння, яка не буде ані класичною ліївською симетрією початкового ДРЧП, ані Q-умовною симетрією початкового рівняння. Проте приклад неліївської симетрії, яка є прихованою симетрією, наведено в роботі [12], хоча цей тип симетрії не визначено в цій роботі окремо.

Означення 1 [11]. *Диференціальне рівняння має приховану симетрію відносно оператора* X, *якщо після виконання редукції кількості незалежних змінних отримане редуковане рівняння буде інваріантним відносно оператора* X_1 (*який є проєкцією оператора* X *на нові змінні*), *тоді як початкове рівняння не є інваріантним відносно* X.

У роботі [13] знайдено приховані симетрії II типу для рівнянь Лапласа, хоча зауважено, що це інший тип симетрії, ніж визначений у роботі [11]. На думку автора, таке трактування не є коректним, тому що приховані симетрії II типу і в роботі [13] знайдено саме як нові симетрії редукованих рівнянь (розглянуто радіальні рівняння, отримані в результаті редукції початкового рівняння Лапласа), проте ті самі редуковані рівняння (ДРЧП із меншим числом незалежних змінних чи ЗДР) можуть бути отримані і як розв'язки системи початкового рівняння та додаткових умов, що визначаються операторами Q-умовної інваріантності. Таке трактування збігається з означенням прихованої симетрії II типу [11]. При цьому нові оператори, які включають нові змінні редукованого рівняння, можна отримати як проєкції оператора прихованої симетрії на простір цих нових змінних. Трактування прихованої симетрії II типу як „слабкої” (умовної) симетрії початкового рівняння, аналогічне [11], було пізніше наведено також в роботі [14].

Прихована симетрія може бути „класичною” в тому сенсі, що повна прихована симетрія ЗДР або ДРЧП може знаходитись шляхом послідовної симетрійної редукції початкового рівняння та дослідження ліївської симетрії редукованих рівнянь, як, наприклад, описано у програмі „Підмоделі” Л. В. Овсяннікова [15]. „Симетрія” або „ліївська симетрія” визначається у відповідності з процедурами, які містяться, наприклад, у [16, 17].

Трактування поняття прихованої симетрії II типу для ДРЧП більш детально розвинено в роботі [18], де також уперше було викладено алгоритм побудови класів рівнянь з такою симетрією та розглянуто нові приклади опису таких класів. Огляд деяких нових результатів щодо прихованих симетрій диференціальних рівнянь наведено в роботі [19].

У роботі [20] доведено, що редукція ДРЧП (прямий метод анзаців) еквівалентна класичній (або Q-умовній) симетрії. Таким чином, умовна інваріантність диференціального рівняння відносно інволютивної сім'ї диференціальних операторів першого порядку Q_a еквівалентна можливості редукції цього рівняння з використанням анзацу, який відповідає цій сім'ї операторів.

Таким чином, опис усіх рівнянь з певного класу, що мають визначену умовну симетрію (якщо більш строго, тут розглядатимемо тільки Q-умовну симетрію, згідно з визначенням [8]), дає можливість отримати всі рівняння з цього класу, які можуть бути редуковані з використанням анзацу, що відповідає цим операторам умовної симетрії.

Означення 2 [8]**.** *Рівняння* $F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u}) = 0$, *де* $\underset{k}{u}$ *— множина всіх частинних похідних порядку* k *функції* $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$, *назвемо* Q*-умовно інваріантним відносно оператора* $Q = \xi^i(x,u)\partial_{x_i} + \eta^r(x,u)\partial_{u^r}$, *якщо система двох рівнянь* $F = 0$, $Qu = O$ *інваріантна відносно оператора* Q. *Необхідно враховувати всі диференціальні наслідки умови* $Qu = 0$ *до порядку* $l-1$.

Зазначимо, що саме таке означення умовної симетрії є потрібним, якщо хочемо описати рівняння, які можуть бути редуковані з використанням певного анзацу. Проте можемо використати більш загальне означення умовної симетрії з довільною додатковою умовою та описати класи рівнянь, які мають таку симетрію.

Означення 3 [8]**.** *Рівняння* $F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u}) = 0$, *де* $\underset{k}{u}$ *— множина всіх частинних похідних порядку* k *функції* $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$, *назвемо умовно інваріантним, якщо існує така додаткова умова* $G(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l_1}{u}) = 0$, *що система двох рівнянь* $F = 0$, $G = 0$ *інваріантна відносно певного оператора* $Q = \xi^i(x,u)\partial_{x_i} + \eta^r(x,u)\partial_{u^r}$, *який не є оператором ліївської інваріантності для рівняння* $F = 0$. *Всі диференціальні наслідки умови* $G = 0$ *необхідно враховувати до порядку* $l - l_1$.

Групова класифікація класів диференціальних рівнянь спрямована на визначення рівнянь, які мають більш широку симетрію, ніж рівняння всього класу в цілому. Огляд задач групової класифікації та ґрунтовний список відповідних посилань наведено в роботі [21]. Зазвичай розглядають два типи таких задач: знаходження рівнянь, що належать до загального класу та є інваріантними відносно заданої групи симетрії, та опис усіх симетрій (з точністю до адекватним чином визначеного співвідношення еквівалентності) рівнянь, які належать до конкретного класу. На основі відомих алгоритмів групової класифікації диференціальних рівнянь у сенсі Лі ми розробили підхід до систематичного опису класів нелінійних ДРЧП, які мають умовну та приховану симетрію. Означення умовних диференціальних інваріантів, наведене нижче, базується на означенні обох описаних типів умовної симетрії.

Означення 4 [22]**.** *Клас рівнянь назвемо загальним, якщо будь-які локальні перетворення залежних та незалежних змінних трансформують будь-яке рівняння з цього класу у рівняння з цього ж класу.*

Прикладом загального класу рівнянь є клас усіх ДРЧП порядку k $F = F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}) = 0$, *де* x *і* u *— відповідно* n*-вимірна та* m*-вимірна незалежна та залежна змінні,* $\underset{r}{u}$ *— множина всіх частинних похідних порядку* r *функції* $u = \big(u^1, u^2, \ldots, u^m\big)$.

Групова класифікація для загальних класів, навіть відносно ліївської симетрії, є дуже складним завданням. Задачу групової класифікації для загального класу було повністю розв'язано для одного ЗДР другого порядку Софусом Лі [23]. Обмеженою, проте практично важливою задачею для загальних класів рівнянь є опис усіх рівнянь в такому класі, інваріантних відносно певної групи симетрії, що можна здійснити шляхом опису всіх диференціальних інваріантів (абсолютних та відносних) для такої групи. Аналогічно, опис рівнянь, які мають визначену умовну симетрію, можна здійснити через опис умовних диференціальних інваріантів, як було продемонстровано у [22].

Для певних класів може бути можливим здійснення повної групової класифікації системи, яка складається з початкового рівняння та умов редукції типу $Q_a[u] = 0$ (з відповідними продовженнями умов редукції).

Означення 5 [22]. *Функція* $F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u})$ *є умовним диференціальним інваріантом оператора* Q, *якщо за умови* $G(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}) = 0$ *виконано співвідношення* $Q[F] = 0,\ Q[G] = 0.$ *Використовуємо продовження операторів порядку* $\max(k, r)$.

Множину інваріантів порядку $r \leq k$ оператора Q з умовами $G = 0$ назвемо *генеруючою множиною* умовних диференціальних інваріантів k-го порядку оператора Q, якщо всі інші інваріанти можна представити як функції інваріантів з цієї множини.

Інваріанти з такої генеруючої множини можуть бути абсолютними інваріантами оператора Q або G-умовними інваріантами вигляду $G^{(l)} \times R_{(l)}$, де $G^{(l)}$ — похідні від G порядку $l \leq k - r$, а $R_{(l)}$ — довільні функції, визначені на многовидах $G^{(k)} = 0$ для всіх значень k.

Кількість функціонально незалежних Q-абсолютних інваріантів у генеруючій множині умовних диференціальних інваріантів можна розрахувати подібно до кількості інваріантів у функціональному базисі абсолютних диференціальних інваріантів як $s - 1$, де s — кількість змінних у множині $x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}$. Кількість незалежних чисто G-умовних інваріантів дорівнює кількості незалежних умов типу $G^{(l)} = 0$ та їхніх диференціальних наслідків.

У деяких випадках можна побудувати функціональний базис умовних диференціальних інваріантів, тобто максимальний набір функціонально незалежних умовних інваріантів. Це можливо, наприклад, у випадку, якщо поставимо вимогу, щоб шукані умовні диференціальні інваріанти також були абсолютними інваріантами деякої алгебри Лі L і додаткові умови $G = 0$ в означенні 3 та їхні відповідні диференціальні наслідки були неінваріантними відносно L.

2. Взаємозв'язок прихованої та умовної симетрії. Далі будемо розглядати приховану симетрію II типу як частковий випадок умовної симетрії та обговоримо систематичний підхід до опису рівнянь з певною прихованою симетрією, або рівнянь, які можуть мати таку симетрію в рамках такого підходу. У роботі [24] наведено цікаве обговорення джерела та природи прихованої симетрії II типу. Проте ми вважаємо, що для того, щоб чітко усвідомлювати природу прихованої симетрії, необхідно завжди враховувати додаткові умови (які стосуються ліївських або некласичних симетрій), які породжують редукцію до нових симетрій і є прихованими симетріями початкового рівняння.

В рамках означення 1 додаткова симетрія відносно оператора X_1 редукованого рівняння (прихована симетрія відносно оператора X для початкового рівняння) є умовною симетрією початкового рівняння за умови $Q_a[u] = 0$ ($Q_a[u]$ означають характеристики векторного поля Q_a) з усіма відповідними диференціальними наслідками. Зазначимо, що X_1 — це ліївська симетрія редукованого рівняння, але ми не додаємо умову $X[u] = 0$ до множини умов, і, таким чином, цей оператор не буде власне Q-умовною симетрією в сенсі означення 2.

Q-умовна симетрія також може бути прихованою, тобто новою Q-умовною симетрією редукованого рівняння [25].

Можемо описати рівняння з повністю визначеними прихованими симетріями з використанням умовних диференціальних інваріантів. У якості умов для пошуку таких інваріантів повинні використовуватись як умови редукції, так і оператори прихованої симетрії.

Наведемо алгоритм групової класифікації відносно прихованої симетрії відповідно до [11], коли приховані симетрії невідомі чи не задані спочатку.

Крок 1. Отримуємо редуковані рівняння для початкового класу ДРЧП, використовуючи наявні ліївські та умовні симетрії. Цей крок потребує стандартної групової класифікації.

Крок 2. Групова класифікація редукованих рівнянь. На цьому кроці можуть бути знайдені нові симетрії редукованих рівнянь (нових симетрій може і не бути; у цьому випадку клас рівнянь не матиме прихованих симетрій). Цей крок включає знаходження груп еквівалентності для даного класу та його підкласів.

Крок 3. Розмноження нееквівалентних інваріантних редукованих рівнянь перетвореннями з групи еквівалентності цього класу.

Крок 4. Повернення до початкового класу рівнянь: знаходимо рівняння з початкового класу ДРЧП, які відповідають цим розмноженим редукованим рівнянням.

Крок 5. Знаходимо всі нееквівалентні рівняння відносно перетворень з групи еквівалентності для початкового класу ДРЧП.

Нетривіальна прихована симетрія для диференціальних рівнянь породжується наявністю у редукованих рівнянь більш широкої групи еквівалентності, ніж мають початкові рівняння (див. [26, 27]). Отже, групова класифікація відносно прихованої симетрії включає дослідження груп еквівалентності для таких класів таким же чином, як і у процесі групової класифікації відносно ліївської симетрії.

В роботі [28] наведено більш обмежений алгоритм опису рівнянь, що мають задані приховані симетрії шляхом побудови нових ДРЧП із більшою кількістю незалежних змінних, які редукуються до визначеного рівняння.

„Прості” приховані симетрії (ліївські симетрії редукованих рівнянь) для конкретного класу рівнянь можуть бути знайдені шляхом послідовних ліївських редукцій та послідовного знаходження ліївських симетрій редукованих рівнянь. Групова класифікація відносно прихованих симетрій редукованих рівнянь включатиме опис усіх можливих редукцій та групових класифікацій для відповідних класів редукованих рівнянь.

У роботі [11] розглянуто приклад нелінійного хвильового рівняння для двох просторових змінних

$$\Box u = f(t, x, y, u). \tag{1}$$

Тут ми використовуємо звичайні позначення для частинних похідних та для оператора Даламбера.

Проведено групову класифікацію рівняння (1) відносно прихованих симетрій для редукції з використанням оператора ∂_y. Така редукція приводить до двовимірного хвильового рівняння $u_{tt} - u_{xx} = f(t, x, u)$. Наступним кроком є звичайна групова класифікація редукованого рівняння з точністю до перетворень з групи еквівалентності рівняння (див. [16] ($f_{uu} = 0$) та [29] ($f_{uu} \neq 0$)). Умовну симетрію рівняння (1) було досліджено в роботі [30]. „Розширення” розмірності знайдених рівнянь з нетривіальними умовними симетріями в цьому класі дасть можливість отримати нові багатовимірні рівняння з прихованими симетріями.

3. Приклад групової класифікації для загального класу: прихована симетрія відносно перетворень зсуву. В якості прикладу ми використовуємо загальний клас усіх ДРЧП другого порядку для скалярної функції u та трьох незалежних змінних t, x, y [22]:

$$F = F(t, x, y, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0. \tag{2}$$

Цей клас включає багато хвильових та еволюційних рівнянь, які є цікавими з точки зору фізики. Викладені ідеї можна узагальнити для рівнянь з більшою кількістю змінних та інших операторів симетрії.

Опишемо рівняння, які мають лiївську симетрію відносно оператора ∂_x та приховану симетрію відносно оператора ∂_y після редукції з використанням оператора ∂_x. Умовою такої лiївської та прихованої симетрії, згідно з означенням 2, є інваріантність рівняння (2) відносно оператора ∂_y за умови $u_x = 0$:

$$\partial_x F\big|_{F=0} = 0, \qquad \partial_y F\big|_{F=0,\ u_x=0} = 0. \tag{3}$$

Загальним розв'язком рівняння (3) є функція всіх інваріантів операторів ∂_x і ∂_y, тобто $t,\ u,\ u_t,\ u_x,\ u_y$ (які є абсолютними інваріантами оператора ∂_x), та умовних інваріантів

$$q^1 = u_x R^1, \quad q^2 = u_{xt} R^2, \quad q^3 = u_{xx} R^3, \quad q^4 = u_{xy} R^4,$$

де $R^k = R^k(t, y, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u})$ — довільні функції, визначені на многовиді $u_x = 0,\ u_{xt} = 0,\ u_{xx} = 0,\ u_{xy} = 0$:

$$F(q^k, t, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0. \tag{4}$$

F повинна бути функцією інваріантів оператора прихованої симетрії на многовиді, визначеному умовою редукції, та мати довільну форму на інших многовидах. Зазначимо, що функції q^k у виразі (4) не є повністю довільними: не можна взяти, наприклад, $q^1 = u_x R^1 = u_x \dfrac{\widetilde{R}^1}{u_x}$, тому що таку функцію $R^1 = \dfrac{\widetilde{R}^1}{u_x}$ у загальному випадку не можна визначити на многовиді $u_x = 0$.

Рівняння (4) редукується з використанням оператора ∂_x до рівняння

$$F_1(t, u, u_t, u_y, u_{tt}, u_{ty}, u_{yy}) = 0,$$

яке є інваріантним відносно ∂_y. Якщо $R^k_y \neq 0$ у як мінімум одному виразі для q^k у (4), то це рівняння не буде інваріантним відносно оператора ∂_y, і відповідна прихована симетрія є власною прихованою симетрією.

Нижче наведено більш конкретні приклади рівнянь з прихованою трансляційною симетрією (ці рівняння не будуть інваріантними в сенсі Лі відносно зсувів по y, тому що коефіцієнти цих рівнянь залежать від y):

$$u_t + u_x K_1(t, y, u) + u_y K_2(t, u) + u_{xx} + u_{yy} = 0,$$
$$u_{tt} - (K_1(t, y, u) u_x)_x - (K_2(t, u) u_y)_y = 0.$$

4. Рівняння, які можна редукувати з використанням радіальних змінних. Як продемонстровано, наприклад, у [25], а також у [31], редукція з використанням радіальних змінних часто дає редуковані рівняння з новими симетріями, яких не мають початкові рівняння. Ця властивість означає наявність відповідних прихованих симетрій початкових рівнянь.

Наведемо огляд результатів, отриманих у роботі [18], щодо опису всіх рівнянь вигляду (2), які можуть бути редуковані за допомогою радіальних змінних

$$r = x^2 + y^2, \tag{5}$$

$$\rho = t^2 - x^2 - y^2. \tag{6}$$

Можливість редукції рівняння (2) з використанням нової змінної (5) еквівалентна його умовній інваріантності відносно оператора поворотів

$$J = x\partial_y - y\partial_x. \tag{7}$$

Умовні диференціальні інваріанти з умовою

$$xu_y - yu_x = 0. \tag{8}$$

можна описати за допомогою об'єднання двох множин інваріантів: функціонального базису абсолютних диференціальних інваріантів для оператора поворотів (7) (див., наприклад, [32], де такі базиси будувалися для групи поворотів довільної розмірності)

$$\begin{gathered} t, u, u_t, u_{tt},\ r = x^2 + y^2, \quad xu_x + yu_y, \quad u_x^2 + u_y^2, \quad u_{xx} + u_{yy}, \\ u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}, \quad xu_x u_{xx} + (xu_y + yu_x)u_{xy} + yu_y u_{yy}, \\ u_{xt}^2 + u_{yt}^2, \quad xu_{xt} + yu_{yt} \end{gathered} \tag{9}$$

(ми використовували позначення $x_1 = x,\ x_2 = y,\ u_1 = u_x,\ u_2 = u_y$ та ін.; $\varepsilon_{kl} = 1$, якщо $k = l$, або $\varepsilon_{kl} = 0$, якщо $k \neq l$) та набору власних умовних диференціальних інваріантів з умовою (8)

$$\frac{u_k}{x_k},\ \frac{u_{kt}}{x_k},\ \frac{u_{kl}}{x_k x_l} - \varepsilon_{kl}\frac{u_k}{x_k^3}. \tag{10}$$

Легко перевірити безпосередньо, що ці вирази є диференціальними інваріантами за умови (7). Наведені власні умовні диференціальні інваріанти не представляють функціональний базис; наприклад, існують функціональні співвідношення між такими виразами: $\dfrac{u_x}{x} = \dfrac{u_y}{y}$, проте саме цей набір наводимо для того, щоб показати загальну структуру інваріантів.

Рівняння вигляду (2), яке редукується з застосуванням анзацу

$$u = \phi(t, r), \tag{11}$$

можна записати так:

$$F\left(I_A, \frac{u_k}{x_k}, \frac{u_{kt}}{x_k}, \frac{u_{kl}}{x_k x_l} - \varepsilon_{kl}\frac{u_k}{x_k^3}\right) = 0, \tag{12}$$

де I_A — функціональний базис абсолютних диференціальних інваріантів (9), а інші змінні представлено власними умовними диференціальними інваріантами.

Легко перевірити, що рівняння (12) можуть бути редуковані за допомогою анзацу (11) до вигляду

$$f(t, r, \phi, \phi_t, \phi_r, \phi_{tt}, \phi_{tr}, \phi_{rr}) = 0,$$

і можна дослідити цей клас з метою знаходження рівнянь, які мають нові симетрії. Таким чином, рівняння, що мають приховані симетрії, можна описати умовними диференціальними інваріантами відносно (8) та цих нових симетрій.

Редукція рівняння (2) з використанням нової змінної (6) еквівалентна його умовній інваріантності відносно операторів з алгебри Лоренца

$$J_{01} = t\partial_x + x\partial_t, \qquad J_{02} = t\partial_y + y\partial_t, \qquad J = x\partial_y - y\partial_x. \tag{13}$$

Умовні диференціальні інваріанти з умовами

$$tu_x + xu_t = 0, \qquad tu_y + yu_t = 0, \qquad xu_y - yu_x = 0 \tag{14}$$

можна вибрати у формі

$$u,\ x_\mu x_\mu,\ x_\mu u_\mu,\ u_\mu u_\mu,\ \Box u,\ u_\mu u_{\mu\nu} u_\nu,\ u_\mu u_{\mu\nu} u_{\nu\alpha} u_\alpha, \tag{15}$$

$$u_{\mu\nu} u_{\nu\alpha} u_{\mu\alpha},\ x_\mu u_{\mu\nu} u_\nu,\ x_\mu u_{\mu\nu} u_{\nu\alpha} u_\alpha,$$

$$\frac{u_\mu}{x_\mu},\ \frac{u_{\mu\nu}}{x_\mu x_\nu} - g_{\mu\nu}\frac{u_\mu}{x_\mu^3}. \tag{16}$$

Тут $\mu,\ \nu,\ \alpha$ набувають значень від 0 до 2; $x_0 = t,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ u_0 = u_t,\ u_1 = u_x,\ u_2 = u_y$ та ін.; $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1)$.

Інваріанти (15) представляють функціональний базис абсолютних диференціальних інваріантів для оператора (13). Інваріанти (16) є власними умовними диференціальними інваріантами відносно умови (14) (це легко перевірити безпосередньо). Наведені власні умовні диференціальні інваріанти не складають функціональний базис. Наприклад, існують співвідношення між такими виразами (14): $\dfrac{u_x}{x} = \dfrac{u_y}{y}$. Проте наведено список таких інваріантів, щоб показати їхню загальну структуру.

Загальне рівняння вигляду (2), яке може бути редуковане анзацем

$$u = \phi(\rho), \tag{17}$$

можна записати у формі

$$F\left(I_A, \frac{u_\mu}{x_\mu}, \frac{u_{\mu\nu}}{x_\mu x_\nu} - g_{\mu\nu}\frac{u_\mu}{x_\mu^3}\right) = 0, \tag{18}$$

де I_A — функціональний базис абсолютних диференціальних інваріантів (15), а інші змінні — власні умовні диференціальні інваріанти.

Рівняння (18) може бути редуковане анзацем (17) до вигляду

$$f(\rho, \phi, \phi', \phi'') = 0. \tag{19}$$

Клас (19) можна досліджувати далі, щоб знайти рівняння, які мають нові симетрії. Рівняння з прихованими симетріями будуть описуватись умовними диференціальними інваріантами відносно операторів (14) та цими новими симетріями. Наведені результати можна узагальнити для довільної кількості просторових змінних.

Приклад хвильового рівняння, яке має умовну симетрію відносно групи Лоренца типу (13) з n просторовими змінними, наведено у [4]:

$$\Box u = \frac{\lambda_0 u_0^2}{x_0^2} + \frac{\lambda_1 u_1^2}{x_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n u_n^2}{x_n^2}. \tag{20}$$

Легко бачити, що це рівняння побудоване з умовних диференціальних інваріантів першого порядку $\dfrac{u_\mu}{x_\mu}$, що дозволяє встановити природу некласичної симетрії в цьому випадку.

5. Використання переходу до радіальних координат для пошуку розв'язків рівнянь з порушеною симетрією. Розглянуто загальний алгоритм побудови рівнянь з порушеною симетрією відносно груп Евкліда або Пуанкаре для пошуку часткових розв'язків, для чого можна використати перехід до радіальних координат, незважаючи на відсутність необхідної симетрії в сенсі Лі.

В літературі для пошуку часткових розв'язків чи для відокремлення змінних часто застосовують перехід до радіальних координат. Наприклад, в [33] розглянуто стаціонарне рівняння Шрьодінгера

$$\left[-\frac{1}{2}\Delta - \frac{Z_1}{r_1} - \frac{Z_2}{r_2} + \omega^2(r_1^2 + r_2^2)\right]\Psi = E(R)\Psi$$

для двоцентрової задачі з потенціалом конфайнментного типу і здійснено перехід до нових радіальних координат.

У статті [34] розглянуто рівняння

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^n D(r,t)\frac{\partial \phi}{\partial r}\right] + \left[\overline{v}\Sigma_f(r,t) - \Sigma_a(r,t)\right], \tag{21}$$

де ϕ — скалярний нейтронний потік, який представлено функцією часу та загальної просторової одновимірної координати r; $n = 0, 1, 2$ для декартових, циліндричних і сферичних координат відповідно; v — швидкість нейтрона; функції D, Σ_f і Σ_a відображають матеріальні властивості процесу дифузії. Рівняння (21) не є інваріантним відносно операторів зсувів і масштабних перетворень, але автори шукають додаткові умови на рівняння, які забезпечують наявність відповідних симетрій, тобто шукають саме приховані симетрії, але без використання цього поняття. Аналогічно, в роботі [35] розглянуто рівняння транспорту нейтронів $u_{xx} + u_{yy} = a(x, y)\Phi(u, u_t)$, де різні типи радіальних координат використовують для пошуку симетрій (які по суті є прихованими симетріями) та точних розв'язків.

6. Приклади рівнянь з прихованими симетріями. Наведемо приклади досліджень рівнянь, які можна узагальнити з використанням запропонованого алгоритму. В роботі [36] розглянуто рівняння Шрьодінгера з нелінійностями, аналогічними (20) [4]. Запропонований алгоритм дозволить провести повну класифікацію аналогічних рівнянь, інваріантних відносно алгебри Шрьодінгера.

В [37, 38] проведено дослідження рівнянь Лапласа та теплопровідності в деяких класах ріманових просторів та прихованих симетрій цих рівнянь.

У [39, 40] розглянуто рівняння $u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{a}{x}u_x = \alpha(x, y)F_1(u) + F_2(u)$ — узагальнення рівняння Града – Шлютера – Шафранова, яке описує баланс магнітогідродинамічних сил у магнітно обмеженій тороїдальній плазмі, де вивчено лише класичні симетрії. Проте таке рівняння містить у лівій частині диференціальні інваріанти (9), (8) і при певному виборі довільних функцій у правій частині (вони повинні залежати від виразу $x^2 + y^2$) матиме приховану симетрію відносно поворотів (7), хоча не матиме такої ліївської симетрії.

7. Висновки. Наведено огляд досліджень поняття прихованої симетрії II типу для ДРЧП і нові приклади опису рівнянь, які мають певну приховану симетрію, алгоритми групового опису класів рівнянь відносно умовної та прихованої симетрії, а також огляд деяких раніше розглянутих прикладів.

Подальші дослідження в цьому напрямку включають класифікацію відносно ліївської та умовної симетрії цікавих класів редукованих рівнянь, зокрема, для наведених симетрій та рівнянь.

Література

1. S. Lie, *Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten*, III, Arch. Mat. Naturvidenskab, **8**, № 4, 371 – 427 (1883), Reprinted in *Lie's Gessammelte Abhandlungen*, **5**, 362 – 427 (1924).
2. G. W. Bluman, J. D. Cole, *The general similarity solution of the heat equation*, J. Math. and Mech., **18**, 1025 – 1042 (1969).
3. P. J. Olver, P. Rosenau, *The construction of special solutions to partial differential equations*, Phys. Lett. A, **114**, 107 – 112 (1986); https://doi.org/10.1016/0375-9601(86)90534-7.
4. W. I. Fushchych, I. M. Tsyfra, *On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry*, J. Phys. A, **20**, L45 – L48 (1987); https://doi.org/10.1088/0305-4470/20/2/001.
5. W. I. Fushchych, R. Z. Zhdanov, *Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations*, Phys. Rep., **172**, 123 – 174 (1989); https://doi.org/10.1016/0370-1573(89)90090-2.
6. P. Clarkson, M. D. Kruskal, *New similarity reductions of the Boussinesq equation*, J. Math. Phys., **30**, 2201 – 2213 (1989); https://doi.org/10.1063/1.528613.
7. D. Levi, P. Winternitz, *Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation*, J. Phys. A, **22**, 2915 – 2924 (1989); https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/15/010.
8. W. I. Fushchych, W. M. Shtelen, N. I. Serov, *Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics* [in Russian], Naukova Dumka, Kyiv (1989).
9. B. Abraham-Shrauner, A. Guo, *Hidden symmetries associated with the projective group of nonlinear first-order ordinary differential equations*, J. Phys. A, **25**, № 21, 5597 – 5608 (1992); https://doi.org/10.1088/0305-4470/25/21/018.
10. B. Abraham-Shrauner, *Hidden symmetries and nonlocal group generators for ordinary differential equations*, IMA J. Appl. Math., **56**, 235 – 252 (1996); https://doi.org/10.1093/imamat/56.3.235.
11. I. A. Yehorchenko, *Group classification with respect to hidden symmetry*, Proc. Fifth Int. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (23 – 29 June, 2003, Kyiv), Proc. Inst. Mat. NAS Ukraine, **50**, Pt 1, 290 – 297 (2004).
12. P. Basarab-Horwath, L. F. Barannyk, W. I. Fushchych, *New solutions of the wave equation by reduction to the heat equation*, J. Phys. A, **28**, № 18, 5291 – 5304 (1995); https://doi.org/10.1088/0305-4470/28/18/018.
13. B. Abraham-Shrauner, *Type II hidden symmetries of some partial differential equations*, 1005th AMS Meeting, Newark, Delaware, 22 – 37 (2005).
14. M. L. Gandarias, *Type-II hidden symmetries through weak symmetries for nonlinear partial differential equations*, J. Math. Anal. and Appl., **348**, 752 – 759 (2008); https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.07.067.
15. L. V. Ovsyannikov, *Program SUBMODELS. Gas dynamics*, J. Appl. Math. and Mech., **58**, № 4, 30 – 55 (1994); https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90137-6.
16. L. V. Ovsyannikov, *Group analysis of differential equations*, Acad. Press, New York (1982).
17. P. J. Olver, *Application of Lie groups to differential equations*, Springer-Verlag, New York (1987).
18. I. A. Yehorchenko, *Differential invariants and hidden symmetry*; ArXiv preprint arXiv:1010.5313 (2010).
19. N. I. Bujela, *An overview of hidden symmetries*, Doct. diss., Univ. Kwazulu-Natal, South Africa (2012).
20. R. Z. Zhdanov, I. M. Tsyfra, R. O. Popovych, *A precise definition of reduction of partial differential equations*, J. Math. Anal. and Appl., **238**, № 1, 101 – 123 (1999); https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6511.
21. R. O. Popovych, N. M. Ivanova, *New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations*, J. Phys. A, **37**, 7547 – 7565 (2004); https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/30/011.

22. I. A. Yehorchenko, *Differential invariants and construction of conditionally invariant equations*, Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, Proc. Fourth Int. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (9 – 15 July, 2001, Kyiv), Proc. Inst. Math. NAS Ukraine, **43**, Pt 1, 256 – 262 (2002).
23. S. Lie, *Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichung*, Arch. Math., **6**, № 3, 328 – 368 (1881) (Transl. by N. H. Ibragimov: S. Lie, *On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals*, CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, **2**, 473 – 508 (1994)).
24. B. Abraham-Shrauner, K. S. Govinder, *On the origins of symmetries of partial differential equations: the example of the Korteweg – de Vries equation*, J. Nonlinear Math. Phys., **15**, Suppl. 1, 60 – 68 (2008); https://doi.org/10.2991/jnmp.2008.15.s1.5.
25. I. A. Yehorchenko, A. I. Vorobyova, *Sets of conditional symmetry operators and exact solutions for wave and generalised heat equations*, Proc. Fifth Int. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (23 – 29 June, 2003, Kyiv), Proc. Inst. Math. NAS Ukraine, **50**, Pt 1, 298 – 303 (2004).
26. I. G. Lisle, *Equivalence transformations for classes of differential equations*, Thesis, Univ. British Columbia (1992); http://www.ise.canberra.edu.au/mathstat/StaffPages/LisleDissertation.pdf.
27. I. G. Lisle, G. J. Reid, *Symmetry classification using noncommutative invariant differential operators*, Found. Comput. Math., **6**, 353 – 386 (2006); https://doi.org/10.1007/s10208-005-0186-x.
28. B. Abraham-Shrauner, K. S. Govinder, *Master partial differential equations for a type II hidden symmetry*, J. Math. Anal. and Appl., **343**, № 1, 525 – 530 (2008); https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.074.
29. V. I. Lahno, R. Z. Zhdanov, O. V. Magda, *Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations*, Acta Appl. Math., **251**, 253 – 313 (2006); https://doi.org/10.1007/s10440-006-9039-0.
30. I. A. Yehorchenko, *Conditional symmetry and reductions for the two-dimensional nonlinear wave equation*, I. General case; arXiv:1010.4913 (2010).
31. B. Abraham-Shrauner, K. S. Govinder, D. J. Arrigo, *Type-II hidden symmetries of the linear 2D and 3D wave equations*, J. Phys. A, **39**, 5739—5747 (2006); https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/20/008.
32. W. I. Fushchych, I. A. Yehorchenko, *Second-order differential invariants of the rotation group $O(n)$ and of its extension $E(n)$, $P(l,n)$*, Acta Appl. Math., **28**, 69 – 92 (1992); https://doi.org/10.1007/BF00047031.
33. Y. Y. Lazur, V. M. Dobosh, V. V. Rubish, S. Chalupka, M. Salak, *Hidden symmetry and separation of variables in the two-centre problem with a confinement-type potential*, Acta Phys. Slovaca, **52**, № 2, 41 – 54 (2002).
34. J. F. Giron, S. D. Ramsey, B. A. Temple, *Conditions for translation and scaling invariance of the neutron diffusion equation*, Progr. Nucl. Energy, **110**, 333 – 340 (2019); https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2018.10.005.
35. I. M. Tsyfra, T. Czyżycki, *Symmetry and solution of neutron transport equations in nonhomogeneous media*, Abstr. and Appl. Anal., **2014**, Article ID 724238 (2014), 9 p.; https://doi.org/10.1155/2014/724238.
36. W. I. Fushchych, Z. I. Symenoh, I. M. Tsyfra, *Symmetry of the Schrödinger equation with variable potential*, J. Nonlinear Math. Phys., **5**, 13 – 22 (1998); https://doi.org/10.2991/jnmp.1998.5.1.3.
37. A. Paliathanasis, M. Tsamparlis, *The reduction of the Laplace equation in certain Riemannian spaces and the resulting Type II hidden symmetries*, J. Geom. Phys., **76**, 107 – 123 (2014); https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2013.10.016.
38. M. Tsamparlis, A. Paliathanasis, *Type II hidden symmetries for the homogeneous heat equation in some general classes of Riemannian spaces*, J. Geom. Phys., **73**, 209 – 221 (2013); https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2013.06.008.
39. G. Cicogna, *Symmetry classification of quasi-linear PDE's containing arbitrary functions*, Nonlinear Dynam., **51**, 309 – 316 (2008); https://doi.org/10.1007/s11071-007-9212-7.
40. G. Cicogna, F. Ceccherini, F. Pegoraro, *Applications of symmetry methods to the theory of plasma physics*, SIGMA, **2**, Paper 017 (2006), 17 p.; https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.017.

Одержано 20.11.20,
після доопрацювання — 11.05.21