DOI: 10.37863/umzh.v73i5.6379

УДК 517.925

В. В. Євстаф'єва (Санкт-Петербур. держ. ун-т, Росія)

ІСНУВАННЯ ДВОТОЧКОВО-КОЛИВАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РЕЛЕЙНОЇ НЕАВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ З КРАТНИМ ВЛАСНИМ ЧИСЛОМ ДІЙСНОЇ СИМЕТРИЧНОЇ МАТРИЦІ

We study an n-dimensional system of ordinary differential equations with a hysteresis type relay nonlinearity and a periodic perturbation function in the right-hand side. It is supposed that the matrix of the system is real and symmetric and it has an eigenvalue of multiplicity two. In the phase space of the system, we consider continuous bounded oscillatory solutions with two fixed points and the same return time to each of these points. For such solutions, we prove the existence and nonexistence theorems. These results are illustrated by a numerical example for a three-dimensional system.

Досліджено n-вимірну систему звичайних диференціальних рівнянь з релейною нелінійністю гістерезисного типу й періодичною функцією збурення у правій частині. Дійсна симетрична матриця системи має власні числа, серед яких власне число кратності два. Розглянуто неперервні обмежені коливальні розв'язки з двома фіксованими точками у фазовому просторі системи й однаковим часом повернення в кожну з цих точок. Доведено теореми існування й неіснування таких розв'язків. Числовий приклад демонструє отримані результати для тривимірної системи.

Вступ. Постановка задачі. Протягом багатьох років вивчаються істотно нелінійні системи, в тому числі релейні системи з гістерезисом. До цього часу їхнє дослідження є актуальним [1 – 13] (див. також наведену в них бібліографію). При розгляді релейних систем виникає ряд задач, серед яких виділимо аналіз реакції системи на зовнішнє збурення та синтез системи з заданими динамічними властивостями. Відомо [14], що при зовнішньому періодичному збуренні в нелінійних системах можуть існувати періодичні розв'язки (гармонічні й субгармонічні вимушені коливання), а також неперіодичні розв'язки (режим биття між автоколиваннями й вимушеними коливаннями). Дослідження релейних систем, які піддаються T-періодичним збуренням, проводилися в [1, 2, 5 – 8, 10, 13]. У [1, 2] встановлено існування kT-періодичних розв'язків системи з матрицею, що має ненульові дійсні власні числа й принаймні одне додатне власне число, де k — натуральне число. У [5] розглянуто матрицю системи з від'ємними власними числами. T-періодичні розв'язки системи з комплексними власними числами матриці досліджено у статті [6], а з дійсними ненульовими кратними власними числами — у статтях [7, 8]. У [10] вивчено kT-періодичні розв'язки системи, матриця якої має нульове власне число. У зазначених вище роботах досліджувалося двопозиційне реле, а в [13] — трипозиційне. У цій статті розглядаються неперіодичні розв'язки системи з двопозиційним реле при сталому періодичному збуренні.

Досліджується n-вимірна система звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)

$$\dot{Y} = AY + BF(\sigma) + Kf(t), \quad \sigma = (C, Y), \tag{1}$$

де Y — вектор стану системи, матриця A й вектори B, K є дійсними та сталими. Функція $F(\sigma)$ описує характеристику неідеального двопозиційного реле з двома пороговими значеннями ℓ_1, ℓ_2 і двома значеннями виходу m_1, m_2, де ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 — дійсні числа. Нехай $\ell_1 < \ell_2$ і $m_1 < m_2$. Функція $F(\sigma(t))$ визначається при неперервному вході $\sigma(t)$ відповідно до [15] для $t \geq 0$ у класі кусково-неперервних функцій і набуває сталого значення на проміжку $[t_1, t_2]$:

© В. В. ЄВСТАФ'ЄВА, 2021

$F(\sigma(t_1)) = m_1$ і $\sigma(t) < \ell_2$ або $F(\sigma(t_1)) = m_2$ і $\sigma(t) > \ell_1$ при $t \in [t_1, t_2]$. Петля гістерезису на площині $(\sigma, F(\sigma(t)))$ оббігається проти годинникової стрілки. Вектор C визначає зворотний зв'язок у системі, є дійсним і сталим. Функція збурення $f(t)$ належить до класу неперервних періодичних функцій.

Мета цієї роботи — вивчити вимушені коливання системи між двома фіксованими точками у фазовому просторі з певною частотою в тому сенсі, що зображувальна точка коливального розв'язку системи повертається в кожну фіксовану точку за один і той же проміжок часу. Такі розв'язки будемо називати двоточково-коливальними. Інтерес до дослідження систем ЗДР із розривною правою частиною виник із застосувань (див., наприклад, [3, 14, 16]). Зокрема, автоматичні системи керування описуються системою ЗДР вигляду (1) з матрицею, в елементах якої закладено характеристики керованого об'єкта, наприклад судна. Нелінійна функція, що описує релейну характеристику, відіграє роль управління у розв'язанні задачі, наприклад, щодо автоматичної стабілізації курсу судна. Елементи вектора, що стоїть при нелінійній функції, задають коефіцієнти посилення. При цьому на судно впливає неперервне хвилювання на воді, яке можна описати неперервною періодичною функцією зовнішнього збурення.

Елементи векторів C, B і K, а також ℓ_1, ℓ_2, m_1 і m_2 вибираються як параметри налаштування.

Розглядається розв'язок системи у класі неперервних функцій із двома фіксованими точками у фазовому просторі (далі — точками перемикання) на гіперплощинах вигляду $\sigma(t) = \ell_\mu$, $\mu = 1, 2$ (далі — гіперплощинах перемикання). Під точкою перемикання розуміємо такий стан системи, при якому $\sigma(t)$ досягає одного з порогових значень; функція $F(\sigma(t))$ при цьому змінює значення виходу. Згідно з методом припасовування для неперервності розв'язку в точках перемикання відбувається „склеювання" траєкторій зображувальної точки розв'язку у фазовому просторі завдяки лінійним системам

$$\dot{Y} = AY + Bm_\mu + Kf(t), \quad \mu = 1, 2. \tag{2}$$

Для аналітичного зображення розв'язку системи (1) використовується форма Коші

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau-t)}\left(Bm_\mu + Kf(\tau)\right)d\tau, \quad \mu = 1, 2,$$

де t_0 — початковий момент часу.

Задамо траєкторію руху зображувальної точки розв'язку. Нехай, наприклад, зображувальна точка розв'язку системи (1) починає свій рух у точці Y^1 на гіперплощині $\sigma = \ell_1$ в момент часу $t = 0$ і спочатку досягає точки Y^2 на гіперплощині $\sigma = \ell_2$ в момент часу $t = t_1$ завдяки системі (2) при $m_\mu = m_1$, а потім повертається в Y^1 у момент часу $t = T_f$ завдяки (2) при $m_\mu = m_2$. Моменти часу t_1 і T_f, які визначають перехідний процес у системі, називаються моментами перемикання. Зауважимо, що момент другого перемикання збігається з часом повернення зображувальної точки розв'язку в Y^1. Тут Y^1 і Y^2 — точки перемикання. Маємо $Y^1 = Y(0) = Y(T_f)$ і $Y^2 = Y(t_1) = Y(t_1 + T_f)$. Позначимо час переходу зображувальної точки з Y^1 в Y^2 через τ_1, а час зворотного переходу з Y^2 в Y^1 через τ_2, тобто $\tau_1 = t_1$ і $\tau_2 = T_f - t_1$. Тоді $T_f = \tau_1 + \tau_2$.

Далі будуємо систему рівнянь руху зображувальної точки розв'язку системи (1) у фазовому просторі за траєкторією в запропонованій вище послідовності. Отримана система є системою трансцендентних рівнянь щодо параметрів розв'язку (точок перемикання та часів переходу), при цьому вона містить і параметри початкової системи (1). Для дослідження системи трансцендентних рівнянь застосовується неособливе перетворення системи (1), що приводить власну матрицю системи до діагонального вигляду.

Робота складається з п'яти пунктів. У пункті 1 будується система рівнянь руху зображувальної точки розв'язку початкової й перетвореної систем. У пункті 2 отримано необхідну умову існування двоточково-коливальних розв'язків перетвореної системи (теорема 1). У пункті 3 встановлено достатню умову розв'язності системи трансцендентних рівнянь щодо часів переходу (теорема 2). У пункті 4 доведено теорему існування неперіодичного двоточково-коливального розв'язку системи (1) (теорема 3). Встановлено також умови, за яких система (1) не має двоточково-коливального розв'язку, зображувальна точка якого рухається по траєкторії в заданій послідовності (теорема 4). У пункті 5 наведено числовий приклад, що підтверджує отримані результати.

1. Побудова системи трансцендентних рівнянь. Припустимо, що існує двоточково-коливальний розв'язок системи (1) такий, що його зображувальна точка рухається між гіперплощинами відповідно до заданої в постановці задачі послідовності. Використовуючи аналітичне зображення розв'язку, будуємо систему трансцендентних рівнянь щодо точок перемикання Y^1, Y^2 і часів переходу $\tau_1,\ \tau_2$. Тоді

$$\ell_1 = (C, Y^1), \qquad \ell_2 = (C, Y^2), \tag{3}$$

де

$$Y^2 = e^{A\tau_1} Y^1 + \int\limits_0^{\tau_1} e^{A(\tau_1 - \tau)} (Bm_1 + Kf(\tau)) d\tau,$$

$$Y^1 = e^{A\tau_2} Y^2 + \int\limits_0^{\tau_2} e^{A(\tau_2 - \tau)} (Bm_2 + Kf(\tau + \tau_1)) d\tau.$$

Система (3) є складною для аналітичного дослідження, тому далі спрощуємо її. Скористаємося неособливим лінійним перетворенням $Y = SX,\ \det S \neq 0.$

Нехай симетрична матриця A має ненульові власні числа $\lambda_i,\ i = \overline{1,n}$, серед яких є одне власне число кратності два. Нехай, наприклад, $\lambda_1 = \lambda_2$. Інші власні числа — прості. Можна завжди підібрати таку матрицю S, щоб матриця $A_0 = S^{-1}AS$ мала діагональний вигляд.

Запишемо перетворену систему

$$\dot{X} = A_0 X + B_0 F(\sigma) + K_0 f(t), \quad \sigma = (\Gamma, X), \tag{4}$$

де

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & & 0 \\ \vdots & & \lambda_3 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$B_0 = S^{-1}B = \left(b_1^0, \ldots, b_n^0\right)^*$, $K_0 = S^{-1}K = \left(k_1^0, \ldots, k_n^0\right)^*$, $\Gamma = S^*C = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^*$, символ $*$ означає транспонування.

Нехай $\gamma_s \neq 0$ і $\gamma_j = 0$, де $j = 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n$ (s — деякий індекс, $s = \overline{1, n}$), вектори B_0, K_0 є ненульовими.

Канонічне перетворення системи (1) і умови на вектор Γ дозволяють розділити систему (3) на незалежну підсистему відносно τ_1, τ_2 і формули для розрахунку точок перемикання. Зважаючи на те, що $T_f = \tau_1 + \tau_2$, отримуємо

$$\ell_2 = \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s b_s^0 m_1}{\lambda_s}\right) e^{\lambda_s \tau_1} - \frac{\gamma_s b_s^0 m_1}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int\limits_0^{\tau_1} e^{\lambda_s(\tau_1 - \tau)} f(\tau) d\tau,$$

$$\ell_1 = \left(\ell_2 + \frac{\gamma_s b_s^0 m_2}{\lambda_s}\right) e^{\lambda_s \tau_2} - \frac{\gamma_s b_s^0 m_2}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int\limits_0^{\tau_2} e^{\lambda_s(\tau_2 - \tau)} f(\tau + \tau_1) d\tau. \tag{5}$$

Точки перемикання $X^1 = \left(x_1^1, \ldots, x_n^1\right)^*$, $X^2 = \left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)^*$ перетвореної системи (4) визначаються за формулами $x_s^1 = \ell_1/\gamma_s$, $x_s^2 = \ell_2/\gamma_s$,

$$x_j^1 = \frac{e^{\lambda_j T_f}}{1 - e^{\lambda_j T_f}} \left(b_j^0 m_1 \int\limits_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{e^{\lambda_j \tau}} + b_j^0 m_2 \int\limits_{\tau_1}^{T_f} \frac{d\tau}{e^{\lambda_j \tau}} + k_j^0 \int\limits_0^{T_f} \frac{f(\tau) d\tau}{e^{\lambda_j \tau}} \right),$$

$$x_j^2 = \frac{e^{\lambda_j \tau_1}}{1 - e^{\lambda_j T_f}} \left(\int\limits_0^{\tau_1} \frac{b_j^0 m_1 + k_j^0 f(\tau)}{e^{\lambda_j \tau}} d\tau + \int\limits_{\tau_1}^{T_f} \frac{b_j^0 m_2 + k_j^0 f(\tau)}{e^{\lambda_j (T_f - \tau)}} d\tau \right), \tag{6}$$

$$j = 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n.$$

Система (5), (6) є об'єктом дослідження у наступному пункті для встановлення необхідної умови існування шуканих розв'язків системи (4).

2. Необхідна умова існування розв'язків. Нехай функція $f(t)$ має вигляд $f(t) = f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)$, де f_0, f_1, f_2, ω, φ_1 і φ_2 — дійсні сталі, причому f_0, f_1, f_2 є ненульовими і $\omega > 0$.

Позначимо

$$H(t, \lambda_i) = \frac{f_1 \sin(\omega t + \varphi_1 + \delta_1^i)}{\sqrt{\lambda_i^2 + \omega^2}} + \frac{f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2 + \delta_2^i)}{\sqrt{\lambda_i^2 + 4\omega^2}},$$

де $\delta_1^i = \operatorname{arctg}(\omega/\lambda_i) + \pi q_i$, $\delta_2^i = \operatorname{arctg}(2\omega/\lambda_i) + \pi q_i$, причому $q_i = 0$ при $\lambda_i > 0$ і $q_i = 1$ при $\lambda_i < 0$.

Теорема 1. *Нехай існує розв’язок системи* (4) *з параметрами* $(\tau_1, \tau_2, X^1, X^2)$, *де* $\tau_1 = \pi m/\omega$, $\tau_2 = \pi k/\omega$ $(m, k \in \mathbb{N}$ *і* $m + k$ *непарні*), X^1 *і* X^2 *знаходяться за формулами* (6). *Тоді*:

1) $k_s^0 \neq 0$ *і* $\varphi_1 + \delta_1^s = \pi h$, *де* $h \in \mathbb{Z}$;

2) $k_j^0 = 0$, *де* $j \neq s$ *при* $s \neq 1$, $s \neq 2$ *і* $j = 3, \ldots, n$ *при* $s = 1$ *або* $s = 2$.

Доведення. Система (5) з урахуванням уведеного позначення набирає вигляду

$$\ell_2 = \left(\ell_1 + \gamma_s\left(\frac{b_s^0 m_1 + k_s^0 f_0}{\lambda_s} + k_s^0 H(0, \lambda_s)\right)\right)e^{\lambda_s \tau_1} - \gamma_s\left(\frac{b_s^0 m_1 + k_s^0 f_0}{\lambda_s} + k_s^0 H(\tau_1, \lambda_s)\right),$$

$$\ell_1 = \left(\ell_2 + \gamma_s\left(\frac{b_s^0 m_2 + k_s^0 f_0}{\lambda_s} + k_s^0 H(\tau_1, \lambda_s)\right)\right)e^{\lambda_s \tau_2} - \gamma_s\left(\frac{b_s^0 m_2 + k_s^0 f_0}{\lambda_s} + k_s^0 H(T_f, \lambda_s)\right).$$

Зображувальна точка розв’язку кожного разу переходить із гіперплощини $\sigma = \ell_1$ на гіперплощину $\sigma = \ell_2$ за час τ_1 і назад за час $\tau_2 = T_f - \tau_1$, якщо на проміжку $[T_f, 2T_f]$ при другому обході гістерезисної петлі справджується система рівностей

$$\ell_2 = \left(\ell_1 + \gamma_s\left(\frac{b_s^0 m_1 + k_s^0 f_0}{\lambda_s} + k_s^0 H(T_f, \lambda_s)\right)\right)e^{\lambda_s \tau_1} - \gamma_s\left(\frac{b_s^0 m_1 + k_s^0 f_0}{\lambda_s} + k_s^0 H(T_f + \tau_1, \lambda_s)\right),$$

$$\ell_1 = \left(\ell_2 + \gamma_s\left(\frac{b_s^0 m_2 + k_s^0 f_0}{\lambda_s} + k_s^0 H(T_f + \tau_1, \lambda_s)\right)\right)e^{\lambda_s \tau_2} - \gamma_s\left(\frac{b_s^0 m_2 + k_s^0 f_0}{\lambda_s} + k_s^0 H(2T_f, \lambda_s)\right).$$

Зауважимо, що при $k_s^0 \neq 0$ зображувальна точка розв’язку кожного разу досягає гіперплощини за один і той же проміжок часу, якщо

$$H(2T_f, \lambda_s) = H(T_f, \lambda_s) = H(0, \lambda_s), \qquad H(\tau_1, \lambda_s) = H(T_f + \tau_1, \lambda_s). \tag{7}$$

Система рівностей (7) виконується, якщо

$$\sin\left(\varphi_1 + \delta_1^s\right) = \sin\left(\omega T_f + \varphi_1 + \delta_1^s\right) = \sin(2\omega T_f + \varphi_1 + \delta_1^s),$$

$$\sin\left(\varphi_2 + \delta_2^s\right) = \sin\left(2\omega T_f + \varphi_2 + \delta_2^s\right) = \sin(4\omega T_f + \varphi_2 + \delta_2^s),$$

$$\sin\left(\omega\tau_1 + \varphi_1 + \delta_1^s\right) = \sin\left(\omega(T_f + \tau_1) + \varphi_1 + \delta_1^s\right),$$

$$\sin\left(2\omega\tau_1 + \varphi_2 + \delta_2^s\right) = \sin\left(2\omega(T_f + \tau_1) + \varphi_2 + \delta_2^s\right).$$

Перша рівність справджується за умови, що $T_f = pT/2$, де p — парне натуральне число (цей випадок відповідає періодичному розв’язку і розглядався, наприклад, у роботі [2]) або p — непарне натуральне число і додатково $\varphi_1 + \delta_1^s = \pi h$, де $h \in \mathbb{Z}$. Тоді з передостанньої рівності системи випливає, що $\tau_1 = mT/2$, де $m \in \mathbb{N}$ і $m < p$. Враховуючи, що $T = 2\pi/\omega$ і $T_f = \tau_1 + \tau_2$, маємо $\tau_1 = \pi m/\omega$ і $\tau_2 = \pi k/\omega$, де $m + k = p$. Перше твердження теореми доведено.

Зображувальна точка розв’язку системи (4) повинна повертатись у фазовому просторі на гіперплощину вигляду $\sigma = \ell_\mu$, $\mu = 1, 2$, не тільки за один і той же час T_f, але й в одну й ту ж точку X^μ, яка обчислюється за формулами (6) на відрізку $[0, T_f]$. Умови повернення мають вигляд

$$x_j^1 = x_j(0) = x_j(T_f) = x_j(2T_f) = \ldots,$$

$$x_j^2 = x_j(\tau_1) = x_j(T_f + \tau_1) = x_j(2T_f + \tau_1) = \ldots .$$

Останні умови мають місце при виконанні системи рівностей (7), у яких λ_s слід замінити на λ_j. Оскільки $\lambda_1 = \lambda_2$, а інші власні числа є простими, то друге твердження теореми 1 справджується при відповідному виборі s. Тоді X^1 і X^2 є точками перемикання розв'язку й на наступних часових проміжках, що повторюються через час T_f. Таким чином, знайдено необхідну умову існування в системі (4) розв'язку із зазначеними параметрами.

Теорему 1 доведено.

3. Достатня умова розв'язності системи трансцендентних рівнянь. Доведемо теорему про достатню умову розв'язності системи (5) при $\lambda_s < 0$. Позначимо

$$Q = \frac{b_s^0 m_1 + k_s^0 f_0}{\lambda_s} + k_s^0 H(0, \lambda_s).$$

Теорема 2. *Нехай* $\lambda_s < 0$, *виконуються умова теореми* 1 *і такі умови*:

1) *мають місце нерівність* $\ell_2 + \gamma_s Q < 0$ *і рівність*

$$\ell_2(m) = (\ell_1 + \gamma_s Q)\, e^{\lambda_s(\pi m/\omega)} - \gamma_s Q$$

для заданого $m \in \mathbb{N}$;

2) *для* $\tau_1 = \pi m/\omega$, *яке задовольняє перше рівняння системи* (5), *і* $\gamma_s b_s^0 < 0$ *справджується рівність*

$$m_2(k) = \frac{\lambda_s}{\gamma_s b_s^0} \frac{e^{\lambda_s \pi (m+k)/\omega} - 1}{1 - e^{\lambda_s \pi k/\omega}} (\ell_1 + \gamma_s Q) + m_1 \tag{8}$$

для заданого $k \in \mathbb{N}$, *де* $m + k$ *є непарним*.

Тоді система (5) *має розв'язок* $(\tau_1, \tau_2) = (\pi m/\omega, \pi k/\omega)$.

Доведення. Введемо позначення $g_1(t) = (\ell_1 + \gamma_s Q)\, e^{\lambda_s t}$, $C_1 = \ell_2 + \gamma_s Q$. Зауважимо, що $H(0, \lambda_s) = H(\tau_1, \lambda_s)$ згідно з умовою теореми 1. Тоді перше рівняння системи (5) після перетворення можна записати у вигляді рівності $g_1(\tau_1) = C_1$. Розглянемо взаємне розташування функцій $y = g_1(t)$ і $y = C_1$. Очевидно, що $g_1(0) - C_1 = \ell_1 - \ell_2 < 0$. Звідси випливає, що $g_1(0) < C_1$. Перше рівняння системи (5) має один розв'язок вигляду $\tau_1 = \pi m/\omega$, якщо коефіцієнт перед експонентою є від'ємним і $C_1 < 0$, тобто виконується нерівність в умові 1 теореми 2, оскільки $\ell_1 < \ell_2$. Задамо число m і тим самим задамо час переходу τ_1. Далі параметр ℓ_2, який у явному вигляді виражено у першій рівності системи (5), зобразимо як функцію від m і отримаємо рівність в умові 1 теореми 2. Отже, нехай τ_1 — розв'язок першого рівняння системи (5) з параметрами b_s^0, k_s^0, ℓ_1, m_1 і ℓ_2, що задовольняють умови його розв'язності, а саме умову 1 теореми 2.

Далі розглянемо систему (5) відносно τ_2. Введемо ще одну функцію

$$g_2(t) = \left(\ell_1 + \gamma_s Q + \frac{\gamma_s b_s^0 (m_2 - m_1)}{\lambda_s e^{\lambda_s \tau_1}}\right) e^{\lambda_s t}$$

і сталу

$$C_2 = \ell_1 + \gamma_s Q + \frac{\gamma_s b_s^0 (m_2 - m_1)}{\lambda_s}.$$

Підставимо перше рівняння системи (5) у друге й після перетворення, врахувавши, що $H(0,\lambda_s) = H(T_f,\lambda_s)$, отримаємо рівність $g_2(T_f) = C_2$.

Задамо число k так, що $k+m$ є непарним, тим самим задамо час переходу τ_2. Виразимо m_2 з останньої рівності й отримаємо (8). Оскільки $m_2 > m_1$, то повинна виконуватися нерівність

$$\frac{\lambda_s}{\gamma_s b_s^0}\frac{e^{\lambda_s\pi(m+k)/\omega}-1}{1-e^{\lambda_s\pi k/\omega}}(\ell_1+\gamma_s Q) > 0. \tag{9}$$

Вираз у дужках є від'ємним згідно з нерівністю в умові 1 теореми 2. Дріб із експонентами також від'ємний. Нерівність (9) виконується тільки при $\gamma_s b_s^0 < 0$.

Розглянемо різницю $g_2(0) - C_2 = \gamma_s/\lambda_s b_s^0(m_2 - m_1)(e^{-\lambda_s\tau_1} - 1)$. Останній вираз у дужках при $\lambda_s < 0$ є додатним, $m_2 - m_1 > 0$ за умовою. Звідси випливає, що $g_2(0) > C_2$, якщо $\gamma_s b_s^0 < 0$. Друге рівняння системи (5) має розв'язок вигляду $\tau_2 = \pi k/\omega$ за умови, що $C_2 > 0$ і коефіцієнт перед експонентою додатний, тобто

$$\ell_1 + \gamma_s Q + \frac{\gamma_s b_s^0(m_2 - m_1)}{\lambda_s e^{\lambda_s\tau_1}} > 0.$$

Звідси випливає, що оскільки $e^{\lambda_s\tau_1} < 1$, то повинна виконуватися нерівність

$$m_2 - m_1 > -\frac{\lambda_s(\ell_1 + \gamma_s Q)}{\gamma_s b_s^0}. \tag{10}$$

У (10) замість m_2 підставимо рівність (8). Після нескладних перетворень з огляду на нерівність $(1-e^{\lambda_s T_f})/(1-e^{\lambda_s\tau_2}) > 1$ переконаємося, що (10) виконується при $\gamma_s b_s^0 < 0$. Отримано умову 2 теореми 2.

Тоді система (5) має розв'язок $(\tau_1,\tau_2) = (\pi m/\omega, \pi k/\omega)$ для заданих $m,k \in \mathbb{N}$, причому $m+k$ є непарним.

Теорему 2 доведено.

4. Теореми існування й неіснування розв'язків. Спочатку доведемо теорему про існування розв'язку системи (1).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді існує неперіодичний двоточково-коливальний розв'язок системи* (1) *з точками перемикання* Y^1 *і* Y^2 *у фазовому просторі, де* $Y^1 = SX^1$, $Y^2 = SX^2$, *і часом повернення* $T_f = \tau_1 + \tau_2$. *При цьому система* (1) *має не більш ніж зчисленну множину розглянутих розв'язків.*

Доведення. Виконання умов теореми 2 означає, що система (5) має параметри ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2, k_s^0, b_s^0 і γ_s, при яких зображувальна точка розв'язку системи (4) переходить із поверхні $\sigma = \ell_1$ на поверхню $\sigma = \ell_2$ за час τ_1 і назад за час τ_2. За формулами (6) можна знайти точки перемикання X^1 і X^2 при відомих значеннях τ_1, τ_2. Розглянемо траєкторію зображувальної точки розв'язку, наприклад, у випадку, коли $s \neq 1$ і $s \neq 2$.

На проміжках $\big[(r-1)T_f, (r-1)T_f + \tau_1\big]$ для $t \in [0,\tau_1]$ маємо півтраєкторію

$$x_s((r-1)T_f + t) = \left(x_s^1 + Q\right)e^{\lambda_s t} - \frac{b_s^0 m_1 + k_s^0 f_0}{\lambda_s} - k_s^0 H((r-1)T_f + t, \lambda_s),$$

$$x_j((r-1)T_f + t) = \left(x_j^1 + \frac{b_j^0 m_1}{\lambda_j}\right)e^{\lambda_j t} - \frac{b_j^0 m_1}{\lambda_j},$$

а на проміжках $\big[(r-1)T_f+\tau_1, rT_f\big]$ для $t\in[0,\tau_2]$ — півтраєкторію

$$x_s((r-1)T_f+\tau_1+t)=\left(x_s^2+Q+\frac{b_s^0(m_2-m_1)}{\lambda_s}\right)e^{\lambda_s t}-$$

$$-\frac{b_s^0m_2+k_s^0f_0}{\lambda_s}-k_s^0H((r-1)T_f+\tau_1+t,\lambda_s),$$

$$x_j((r-1)T_f+\tau_1+t)=\left(x_j^1+\frac{b_j^0m_2}{\lambda_j}\right)e^{\lambda_j t}-\frac{b_j^0m_2}{\lambda_j},$$

де $r\in\mathbb{N}$.

Нагадаємо, що $T_f=\pi p/\omega$. Очевидно, що при непарному p кожна з півтраєкторій відрізняється на першому й наступних проміжках. Іншими словами, в інтегральному просторі розв'язку системи (4) відповідає крива, яка складається з неперіодично повторюваних кусків інтегральних кривих. Проєкція розв'язку у фазовий простір системи — це замкнені траєкторії, що проходять через точки перемикання. Такий же висновок має місце й у випадку, коли $s=1$ або $s=2$.

Завдяки неособливому перетворенню з матрицею S система (1) і система (4) еквівалентні, тому результати, отримані для канонічної системи є правильними й для вихідної системи.

Розміри петлі релейної характеристики з гістерезисом визначаються параметрами $\ell_1,\ \ell_2$, m_1 і m_2, значення яких, як випливає з теореми 2, залежать від наперед заданих значень часів переходу τ_1 і τ_2.

Параметри c_i визначають зворотний зв'язок і знаходяться з неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь, яка будується, виходячи з того, що $\Gamma=S^*C=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)^*$, де $\gamma_s\neq0$ і $\gamma_j=0,\ j=1,\ldots,s-1,s+1,\ldots,n.$

Параметри k_i визначають вплив зовнішнього збурення й як елементи вектора K знаходяться за допомогою перетворення $K=SK_0$ з урахуванням обмежень, встановлених у теоремі 1.

Параметри b_i визначають коефіцієнти посилення реле і як елементи вектора B знаходяться за допомогою перетворення $B=SB_0$ за умови, що $\gamma_s b_s^0<0$.

Таким чином, визначено умови на параметри системи (1), за яких існує розв'язок із точками перемикання Y^1 і Y^2 у фазовому просторі на гіперплощинах $(C,Y^\mu)=\ell_\mu,\ \mu=1,2,$ і часом повернення $T_f=\tau_1+\tau_2$ в кожну з цих точок. При цьому точки знаходяться за формулами $Y^1=SX^1,\ Y^2=SX^2$. Конфігурація траєкторії зображувальної точки розв'язку у фазовому просторі системи (1) відповідає неперіодичному розв'язку. Оскільки $T_f=\pi p/\omega$, де p — непарне натуральне число, то система (1) має не більш ніж зчисленну множину розглядуваних розв'язків.

Теорему 3 доведено.

Наведемо достатню умову того, що система (1) не має шуканих розв'язків.

Теорема 4. *Припустимо, що виконується умова теореми* 1. *Нехай параметри системи* (5) *задовольняють такі умови*: $\lambda_s<0$ *і або*

1) $\ell_1<-\gamma_sQ<\ell_2$,

або

2) *має місце умова* 1 *теореми* 2 *і для* $\tau_1=\pi m/\omega$, *що задовольняє перше рівняння системи* (5), *не виконується умова* 2 *теореми* 2.

Тоді система (1) *не має двоточково-коливального розв’язку, зображувальна точка якого починає свій рух на гіперплощині $\sigma = \ell_1$, рухається згідно з запропонованою послідовністю й повертається через час T_f.*

Доведення. Припустимо, що має місце умова теореми 1, тоді виконується необхідна умова існування шуканих розв’язків. Нехай параметри системи (5) задовольняють умову 1 теореми 4 при $\lambda_s < 0$. Це означає, що порушується нерівність в умові 1 теореми 2, тобто $\ell_2 + \gamma_s Q > 0$, але при цьому коефіцієнт перед експонентою в першому рівнянні системи (5) є від’ємним, тобто $\ell_1 + \gamma_s Q < 0$. У цьому випадку не існує розв’язку τ_1 системи (5).

Припустимо, що умову 1 теореми 2 виконано й існує розв’язок τ_1 першого рівняння системи (5), проте порушується умова 2 теореми 2, тобто $\gamma_s b_s^0 > 0$. Тоді не виконується нерівність (9), а це суперечить умові задачі, що $m_2 > m_1$.

Оскільки достатня умова розв’язності системи (5) є достатньою умовою існування розв’язку, зображувальна точка якого рухається по траєкторії в заданій послідовності, то й твердження про те, що система (1) не має двоточково-коливальних розв’язків, стосується тільки таких розв’язків, зображувальна точка яких починає свій рух на гіперплощині $\sigma = \ell_1$, рухається по траєкторії у фазовому просторі згідно з запропонованою їй послідовністю і повертається через час T_f.

Теорему 4 доведено.

Далі розглянемо числовий приклад із матрицею системи третього порядку.

5. Приклад. Розглянемо систему (1) третього порядку із симетричною дійсною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

і вектором $B = (-0{,}23; 2{,}73; 2{,}84)^*$. Знайдемо власні числа матриці A. Маємо $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ і $\lambda_3 = 5$.

Нехай матриця S має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

де $\det S = 1 \neq 0$. Тоді $B_0 \approx (2{,}09; 1{,}30; 3{,}08)^*$.

Покладемо $s = 1$. Тоді $\Gamma = (\gamma_s, 0, 0)^*$.

Нехай зовнішнє збурення описує функція $f(t) = 1 + 2\sin(6t + \varphi_1) + 5\sin(12t + 1)$ із періодом $T = 2\pi/6 \approx 1{,}047197$. Відповідно до твердження 1 теореми 1 маємо $\varphi_1 = -\delta_1 + \pi \approx 1{,}405648$, де $\delta_1 = \operatorname{arctg}(-6) + \pi \approx 1{,}735945$. Згідно з теоремою 1 покладемо $K_0 = (-2; -1{,}4; 0)^*$. Необхідну умову існування розв’язку з даними параметрами виконано.

Звернемося до умов теореми 2 і знайдемо розв’язок системи (5). Нехай $\gamma_s = -1{,}2$. Вибір γ_s задовольняє умову 2 теореми 2, оскільки $\gamma_s b_s^0 \approx -2{,}508 < 0$. Нехай $\ell_1 = -4$, $m_1 = -3$. Тоді $Q \approx 7{,}880886$. Задамо $m = 1$. Маємо $\ell_2(1) \approx 1{,}485303$. Нерівність в умові 1 теореми 2 виконано, оскільки $-7{,}971760 < 0$. Отже, перше рівняння системи (5) має розв’язок $\tau_1 = T/2 = \pi/6 \approx 0{,}523598$. Задамо $k = 2$, тоді $m + k = 3$ — непарне число. За формулою (8) знаходимо $m_2(2) \approx 3{,}548105$. Звідси випливає, що умови теореми 2 виконано, і при зазначених параметрах $\ell_1,\ \ell_2,\ m_1,\ m_2,\ k_1^0,\ b_1^0$ і γ_1 система трансцендентних рівнянь (5) має розв'язок $(\tau_1, \tau_2) = (\pi/6, \pi/3)$.

За формулами (6) розраховуємо точки перемикання перетвореної системи (4). Маємо

$$X^1 \approx \begin{pmatrix} 3{,}333333 \\ 3{,}816599 \\ 1{,}055316 \end{pmatrix}, \qquad X^2 \approx \begin{pmatrix} -1{,}237752 \\ -0{,}754487 \\ -1{,}469599 \end{pmatrix}.$$

Тепер наведемо розрахунок траєкторії розв'язку з параметрами $(\tau_1, \tau_2, X^1, X^2)$. Тут $T_f = \pi/2$. Як початкову точку використовуємо точку перемикання $X^1 = (x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0))^*$. Тоді для $t \in [(r-1)T_f, \tau_1 + (r-1)T_f]$ і $t_0 = (r-1)T_f$ отримуємо

$$x_1(t) \approx e^{\lambda_1(t-t_0)}\,(x_1(t_0) + 7{,}880886) - (b_1^0 m_1 + k_1^0 f_0)/\lambda_1 - k_1^0 H(t, \lambda_1),$$

$$x_2(t) \approx e^{\lambda_1(t-t_0)}\,(x_2(t_0) + 7{,}397620) - (b_2^0 m_1 + k_2^0 f_0)/\lambda_1 - k_2^0 H(t, \lambda_1),$$

$$x_3(t) \approx e^{\lambda_3(t-t_0)}\,(x_3(t_0) - 1{,}254000) - b_3^0 m_1/\lambda_3.$$

Для $t \in [\tau_1 + (r-1)T_f, rT_f]$ і $t_0 = \tau_1 + (r-1)T_f$ одержуємо

$$x_1(t) \approx e^{\lambda_1(t-t_0)}\,(x_1(t_0) - 5{,}804653) - (b_1^0 m_2 + k_1^0 f_0)/\lambda_1 - k_1^0 H(t, \lambda_1),$$

$$x_2(t) \approx e^{\lambda_1(t-t_0)}\,(x_2(t_0) - 6{,}287918) - (b_2^0 m_2 + k_2^0 f_0)/\lambda_1 - k_2^0 H(t, \lambda_1),$$

$$x_3(t) \approx e^{\lambda_3(t-t_0)}\,(x_3(t_0) + 1{,}483108) - b_3^0 m_2/\lambda_3.$$

Далі знаходимо значення параметрів вектора зворотного зв'язку C і вектора K. Маємо $c_1 \approx \approx 0{,}848528,\ c_2 \approx -0{,}848528,\ c_3 \approx 0$ і $K \approx (1{,}985761; -0{,}842666; -1{,}143095)^*$.

Таким чином, у системі (1) при вказаних $\tau_1 = \pi/6,\ \tau_2 = \pi/3$ визначено параметри $\ell_1,\ \ell_2,\ m_1$ і m_2, а також елементи векторів K і C, при яких згідно з теоремою 3 існує двоточково-коливальний розв'язок із часом повернення $T_f = \pi/2$ і точками перемикання

$$Y^1 \approx \begin{pmatrix} -3{,}305856 \\ 1{,}408190 \\ 3{,}725527 \end{pmatrix}, \qquad Y^2 \approx \begin{pmatrix} 0{,}334767 \\ -1{,}415679 \\ -1{,}464509 \end{pmatrix}.$$

Література

1. В. В. Евстафьева, *О необходимых условиях существования периодических решений в динамической системе с разрывной нелинейностью и внешним периодическим воздействием*, Уфим. мат. журн., **3**, № 2, 20 – 27 (2011).
2. V. V. Yevstafyeva, *Existence of the unique kT-periodic solution for one class of nonlinear systems*, J. Sib. Fed. Univ. Math. and Phys., **6**, № 1, 136 – 142 (2013).
3. A. Visintin, *PDES with hysteresis 30 years later*, Discrete and Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **8**, № 4, 793 – 816 (2015).
4. L. Fang, J. Wang, Q. Zhang, *Identification of extended Hammerstein systems with hysteresis-type input nonlinearities described by Preisach model*, Nonlinear Dyn., **79**, № 2, 1257 – 1273 (2015).
5. В. В. Евстафьева, *Об условиях существования двухточечно-колебательного периодического решения в неавтономной релейной системе с гурвицевой матрицей*, Автоматика и телемеханика, № 6, 42 – 56 (2015).

6. A. M. Kamachkin, D. K. Potapov, V. V. Yevstafyeva, *Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence*, Int. J. Robust Nonlinear Control, **27**, № 2, 204 – 211 (2017).
7. A. M. Kamachkin, D. K. Potapov, V. V. Yevstafyeva, *Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence*, Electron. J. Different. Equat., № 140, 1 – 10 (2017).
8. A. M. Kamachkin, D. K. Potapov, V. V. Yevstafyeva, *On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity*, J. Dyn. and Control Syst., **23**, № 4, 825 – 837 (2017).
9. G. A. Leonov, M. M. Shumafov, V. A. Teshev, K. D. Aleksandrov, *Differential equations with hysteresis operators, Existence of solutions, stability, and oscillations*, Different. Equat., **53**, № 13, 1764 – 1816 (2017).
10. В. В. Евстафьева, *Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа*, Укр. мат. журн., **70**, № 8, 1085 – 1096 (2018).
11. В. И. Уткин, Ю. В. Орлов, *Системы управления с векторными реле*, Автоматика и телемеханика, № 9, 143 – 155 (2019).
12. C. E. L. da Silva, A. Jacquemard, M. A. Teixeira, *Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations*, J. Dyn. and Control Syst., **26**, № 1, 17 – 44 (2020).
13. A. M. Kamachkin, D. K. Potapov, V. V. Yevstafyeva, *Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay*, Int. J. Control, **93**, № 4, 763 – 770 (2020).
14. Я. З. Цыпкин, *Релейные автоматические системы*, Наука, Москва (1974).
15. А. В. Покровский, *Существование и расчет устойчивых режимов в релейных системах*, Автоматика и телемеханика, № 4, 16 – 23 (1986).
16. M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, P. Kowalczyk, *Piecewise-smooth dynamical systems — theory and applications*, Springer-Verlag, London (2008).

Одержано 21.11.20