Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах

(II часть)

М. Г. Крейн

§ 5. КОЛЬЦО $\mathfrak{R}_{QG}$

1. Обозначим через $\mathfrak{R}_{QG}$ линейную комплексную оболочку „конуса" $\mathfrak{P}_{QG}$ — совокупности всех непрерывных инвариантных э. п. ядер на Q (предположения относительно Q и G те же, что и в предыдущих параграфах).

Кольцо $\mathfrak{R}_{QG}$, очевидно, является алгебраическим подкольцом кольца $\mathfrak{R}_Q$ см. § 2). Это обстоятельство подсказывает, как ввести норму в кольце $\mathfrak{R}_{QG}$.

Если $F \in \mathfrak{P}_{QG}$, то полагаем $\|F\|$ равным диагональному значению F:

$$\|F\| = F(p, p) \qquad (p \in Q).$$

Для любого же эрмитова ядра $\Phi \in \mathfrak{R}_{QG}$ полагаем

$$\|\Phi\| = \inf\{\|F'\| + \|F''\|\}, \tag{5.1}$$

где infimum распространяется на все пары $F', F'' \in \mathfrak{P}_{QG}$ такие, что $\Phi(p, q) = F'(p, q) - F''(p, q)$.

На неэрмитовы элементы $\Phi \in \mathfrak{P}_{QG}$ мы распространим определение нормы так, чтобы сходимость последовательности $\{\Phi_n\}$ была эквивалентна сходимости последовательностей эрмитовых компонент $\{\Phi_n^+\}$, $\{\Phi_n^-\}$. Это можно сделать хотя бы так, как указано в § 2 (формула (2,1)).

Дословным повторением доказательства теоремы 1 § 2 для случая кольца $\mathfrak{R}_{QG}$, получается

Теорема 6. *$\mathfrak{R}_{QG}$ — полное нормированное кольцо.*

Теорему 6 можно было бы рассматривать как непосредственное следствие теоремы 1 § 2, если бы мы могли доказать, что определение нормы элемента $\Phi \in \mathfrak{R}_{QG}$ совпадает с определением нормы для того же Φ как элемента общего кольца $\mathfrak{R}_Q$. Тогда, вместо теоремы 6, можно было бы высказать более полное утверждение:

$\mathfrak{R}_{QG}$ — замкнутое подкольцо нормированного кольца $\mathfrak{R}_Q$.

В п. 5 этого параграфа мы покажем, что это предложение действительно имеет место в ряде важных случаев.

2. В дальнейшем будет показано, что нижняя грань в (5.1) всегда достигается. Предварительно нам придется установить ряд предложений, которые, возможно, сами по себе представляют интерес.

Обозначим через Π совокупность всех нормированных ядер $f \in \mathfrak{P}_{QG}$, т. е. ядер $f \in \mathfrak{P}_{QG}$, для которых

$$f(p, p) \equiv 1 \qquad (p \in Q).$$

Каждой упорядоченной паре точек $p, q \in Q$ отнесем функцию на Π

$$\varphi_{p,q}(f) = f(p, q) \qquad (p, q \in Q).$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ линейную оболочку множества всех функций $\varphi_{p,q}(p, q \in Q)$. В $\mathfrak{S}$ введем равномерную норму; таким образом

$$\|\varphi\| = \sup_{f \in \Pi} |\varphi(f)| \qquad (\varphi \in \mathfrak{S}).$$

Заметим, что пространство $\mathfrak{S}$ содержит функцию, тождественно равную единице; в самом деле,

$$\varphi_{p,p}(f) = f(p, p) = 1 \qquad (f \in \Pi).$$

Рассмотрим какой-либо непрерывный линейный функционал Λ, определенный на $\mathfrak{S}$. Положим

$$\Lambda(\varphi_{p,q}) = \Phi(p, q) \qquad (p, q \in Q).$$

Так как каждая функция φ из $\mathfrak{S}$ есть линейная комбинация некоторых функций $\varphi_{p,q}$, то функционал Λ вполне определяется ядром $\Phi(p, q)$.

Это ядро инвариантно, ибо при любом $s \in G$

$$\varphi_{sp,sq}(f) = \varphi_{p,q}(f) \qquad (f \in \Pi),$$

и, следовательно,

$$\Phi(sp, sq) = \Lambda(\varphi_{sp,sq}) = \Lambda(\varphi_{p,q}) = \Phi(p, q) \qquad (p, q \in Q).$$

Пусть теперь функционал Λ положителен, т. е. $\Lambda(\varphi) \geqslant 0$ для всякой неотрицательной функции $\varphi \in \mathfrak{S}$ и $\|\Lambda\| = \Lambda(1) > 0$. Так как для любых $p_1 \in Q, \ldots, p_n \in Q$ и комплексных $\xi_1, \ldots, \xi_n$

$$\varphi(f) = \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \bar{\xi}_k \varphi_{p_j, p_k}(f) = \sum_{j,k=1}^{n} f(p_j, p_k) \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0 \qquad (f \in \Pi),$$

то

$$\Lambda(\varphi) = \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \bar{\xi}_k \Lambda(\varphi_{p_j, p_k}) = \sum_{j,k=1}^{n} \Phi(p_j, p_k) \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0.$$

Таким образом, положительному функционалу отвечает некоторое э. п. ядро.

Предположим, что на Q задана дискретная топология.

В этом случае э. п. ядро Φ, отвечающее положительному функционалу Λ, будет иметь вид

$$\Phi = \lambda f, \quad \text{где} \quad f \in \Pi,$$

а $\lambda = \Phi(p, p) > 0$.

Обратно, всякое ядро Φ указанного вида определяет положительный функционал $\mathit{\Lambda}$ по формуле

$$\mathit{\Lambda}(\varphi) = \lambda\varphi(f).$$

Пространство $\mathfrak{S}$ комплексно-симметрично (то есть, если $\varphi \in \mathfrak{S}$, то и $\overline{\varphi} \in \mathfrak{S}$), ибо

$$\varphi_{p,q}(f) = \overline{\varphi_{q,p}(f)} \qquad (f \in \Pi,\ p,\ q \in Q). \tag{5.2}$$

Поэтому всякий л. н. (линейный непрерывный) функционал в $\mathfrak{S}$ представляется в виде $\mathit{\Lambda}_1 + i\mathit{\Lambda}_2$, где $\mathit{\Lambda}_1$, $\mathit{\Lambda}_2$ — вещественные л. н. функционалы (т. е. функционалы, принимающие комплексно-сопряженные значения на комплексно-сопряженных функциях).

Заметим, что при этом вещественному л. н. функционалу $\mathit{\Lambda}$ будет отвечать эрмитово ядро $\Phi(p, q)$.

С другой стороны, так как $1 \in \mathfrak{S}$, то вещественный л. н. функционал разлагается всегда на разность двух положительных функционалов

$$\mathit{\Lambda} = \mathit{\Lambda}_1 - \mathit{\Lambda}_2, \tag{5.3}$$

причем неотрицательные л. н. функционалы $\mathit{\Lambda}_1$, $\mathit{\Lambda}_2$ могут быть так выбраны, чтобы

$$\|\mathit{\Lambda}\| = \|\mathit{\Lambda}_1\| + \|\mathit{\Lambda}_2\|.$$

Если обозначить через F_1 и F_2 э. п. ядра, соответствующие $\mathit{\Lambda}_1$ и $\mathit{\Lambda}_2$, то для ядра Φ, соответствующего произвольно выбранному вещественному функционалу $\mathit{\Lambda}$, получается разложение

$$\Phi = F_1 - F_2, \tag{5.4}$$

показывающее, что $\Phi \in \mathfrak{R}_{QG}$. Так как, как мы уже отмечали, каждому $F \in \mathfrak{P}_{QG}$ ($F \neq 0$) отвечает положительный функционал $\mathit{\Lambda}$, то мы убеждаемся, что соответствие $\mathit{\Lambda} \to \Phi$ отображает одно-однозначно и линейно сопряженное пространство $\mathfrak{S}^*$ (то есть пространство всех л. н. функционалов на $\mathfrak{S}$) на $\mathfrak{R}_{QG}$.

Покажем, что соответствие $\mathit{\Lambda} \longleftrightarrow \Phi$ изометрично (при соответствующем определении нормы неэрмитовых элементов $\Phi \in \mathfrak{R}_{QG}$).

В самом деле, если $\mathit{\Lambda}$ — положительный функционал, то $\|\mathit{\Lambda}\| = \mathit{\Lambda}(1)$, а соответствующее $\Phi \in \mathfrak{P}_{QG}$; таким образом

$$\|\mathit{\Lambda}\| = \mathit{\Lambda}(1) = \mathit{\Lambda}(\varphi_{p,p}) = \Phi(p, p) = \|\Phi\| \qquad (p \in Q).$$

Пусть теперь Φ — произвольное эрмитово ядро из $\mathfrak{R}_{QG}$, а $\mathit{\Lambda}$ — соответствующий функционал из $\mathfrak{S}^*$. Тогда из соответствующих друг другу разложений (5.3) и (5.4) найдем, что

$$\|\mathit{\Lambda}\| = \|\mathit{\Lambda}_1\| + \|\mathit{\Lambda}_2\| = \|F_1\| + \|F_2\| \geq \|\Phi\|.$$

С другой стороны, по определению $\|\Phi\|$, для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое разложение

$$\Phi = F' - F'' \qquad (F', F'' \in \mathfrak{P}_{QG}),$$

что

$$\|\Phi\| \geq \|F'\| + \|F''\| - \varepsilon.$$

Это разложение породит некоторое разложение $\Lambda = \Lambda' - \Lambda''$, где Λ', Λ'' — положительные функционалы из $\mathfrak{S}^*$, для которого будет

$$\|\Lambda\| \leq \|\Lambda'\| + \|\Lambda''\| = \|F'\| + \|F''\| \leq \|\Phi\| + \varepsilon.$$

Таким образом $\|\Phi\| = \|\Lambda\|$.

Для неэрмитовых элементов $\Phi \in \mathfrak{R}_{QG}$ естественно теперь определить норму с помощью последнего равенства. Таким образом мы пришли к предложению.

Теорема 7. *Если Q — дискретное пространство, то кольцо $\mathfrak{R}_{QG}$ эквивалентно сопряженному пространству некоторого пространства функций, при этом конус $\mathfrak{P}_{QG}$ эквивалентен конусу всех неотрицательных функционалов этого сопряженного пространства.*

Эта теорема остается справедливой (при соответствующем выборе пространства функций) во многих других случаях (например, когда Q, G бикомпакты или когда G — локально бикомпактная группа, а на Q есть инвариантная мера), но здесь мы на них не будем останавливаться.

3. Как известно, во всяком сопряженном пространстве может быть введена слабая топология. Рассматривая $\mathfrak{R}_{QG}$ для дискретного Q, как такое пространство введем в $\mathfrak{R}_{QG}$ слабую топологию. Легко видеть, что эта топология совпадает с топологией, которая индуцируется на $\mathfrak{R}_{QG}$, если $\mathfrak{R}_{QG}$ рассматривать, как подпространство пространства M всех ограниченных функций на $Q \times Q$ и в M ввести топологию по Тихонову.

Окрестностью элемента $\Phi_0 \in \mathfrak{R}_{QG}$ будет всякая совокупность $U(\Phi_0; p_1, q_1; p_2, q_2; \ldots, p_n, q_n; \varepsilon)$, состоящая из ядер $\Phi \in \mathfrak{R}_{QG}$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\Phi(p_i, q_i) - \Phi_0(p_i, q_i)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

при этом ε—произвольное положительное число, а p_i, q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)— любой набор пар точек из Q в любом числе $n = 1, 2, \ldots$.

Если Q—счетное множество, то слабая сходимость последовательности $\{\Phi_n(p, q)\}_1^\infty$ к $\Phi_0(p, q)$ означает обычную сходимость последовательности к $\Phi_0(p, q)$ в каждой точке $(p, q) \in Q \times Q$.

Выпуклое множество Π является регулярным сечением конуса $\mathfrak{P}_{QG}$, а именно его можно мыслить, как множество всех положительных функционалов Λ на $\mathfrak{S}$, лежащих в гиперплоскости

$$\Lambda(1) = 1.$$

В силу этого Π бикомпактно в слабой топологии, в чем легко и непосредственно убедиться.

Таким образом к Π применима теорема Крейна-Мильмана [11], согласно которой всякое ядро $F \in \Pi$ можно рассматривать как обобщенный центр тяжести множества $\mathfrak{Z}$ всех крайних точек Π, то есть зональных ядер $Z(p, q)$.

Сформулируем, что точно будет означать это предложение в предположении:

(!) Множество $\mathfrak{Z}$ зональных ядер замкнуто в слабой топологии.

В этом случае $\mathfrak{Z}$ — бикомпакт (если Q сепарабельно, то даже просто компакт, ибо тогда Π — компакт).

Чтобы подчеркнуть, что число $Z(p, q)$ есть функция трех аргументов $p, q \in Q$ и $Z \in \mathfrak{Z}$, обозначим его еще как $X(p, q; Z)$.

Тогда мы можем сформулировать следующую теорему для ядер $F \in \mathfrak{P}_{QG}$, получаемых простым растяжением из ядер $f \in \Pi$.

Теорема 8. *В предположении (!) общий вид ядра* $F \in \mathfrak{P}_{QG}$ *получается по формуле*

$$F(p, q) = \int_{\mathfrak{Z}} X(p, q; Z)\, d\sigma(Z),$$

где $\sigma(\mathcal{E})$ — *некоторая вполне аддитивная неотрицательная функция на теле борелевских подмножеств бикомпакта* $\mathfrak{Z}$.

Возможно, что гипотеза (!) для дискретных пространств всегда выполняется.

Заметим, что после рассуждений, приведенных в этом пункте и п. 2, без труда получается доказательство теоремы Гельфанда-Райкова [6] о существовании полной системы унитарных представлений группы G для того случая, когда она дискретна. Для этого следует только группу G истолковать как группу отображений $Q = G$ на самое себя (как группу правых сдвигов).

Получающееся при этом доказательство теоремы Гельфанда-Райкова будет очень близко по основной идее к доказательству этих авторов, но все же не будет с ним совпадать*).

Одновременно выясняется, что методы исследования вопросов существования зональных ядер и представимости через них любых ядер теснейшим образом примыкают к методам, которыми мы пользовались в теории конусов (см. [10,9г]).

4. Одновременно с теоремой 7 мы показали, что в случае, когда Q — дискретное пространство, всякое эрмитово ядро $\Phi \in \mathfrak{P}_{QG}$ допускает разложение (5.4), для которого

$$\|\Phi\| = F_1(p, p) + F_2(p, p).$$

---

*) У этих авторов функциям $f \in \mathfrak{P}_{GG}$ ставятся в соответствие положительные функционалы не в пространстве ограниченных функций, а в пространстве некоторого класса суммируемых функций. Этот способ предполагает существование инвариантной меры на G, и в тех случаях, когда она существует, он весьма эффективен.

Мы докажем, что это же имеет место и в общем случае любого топологического пространства. Более того, справедлива

Теорема 9. *Если некоторое непрерывное ядро* $\Phi(p, q)$ $(p, q \in Q)$ *представимо в виде*

$$\Phi(p, q) = F'(p, q) - F''(p, q) \qquad (p, q \in Q),$$

где F', F'' *— э. п. инвариантные (но не обязательно непрерывные) ядра, то оно допускает также представление*

$$\Phi(p, q) = F_1(p, q) - F_2(p, q) \qquad (p, q \in Q), \tag{5.5}$$

где F_1, F_2 *— э. п. инвариантные ядра и*

$$\|\Phi\| = F_1(p, p) + F_2(p, p), \tag{5.6}$$

при этом во всяком таком представлении ядра F_1 *и* F_2 *непрерывны.*

Доказательство. Обозначим через Q_0 пространство, получаемое из Q путем замены имеющейся в Q топологии дискретной топологией.

Ядро Φ можно рассматривать также и как элемент кольца $\mathfrak{R}_{Q_0G}$, и тогда его норма $\|\Phi\|_0$ во всяком случае будет не больше прежней нормы $\|\Phi\|$, ибо $\mathfrak{P}_{Q_0G} \supset \mathfrak{P}_{QG}$. Для элемента Φ кольца $\mathfrak{R}_{Q_0G}$, по доказанному уже, мы можем утверждать существование разложения (5.5) с э. п. инвариантными ядрами F_1, F_2 такими, что

$$F_1(p, p) + F_2(p, p) = \|\Phi\|_0 \leqslant \|\Phi\|.$$

Таким образом теорема будет доказана, если мы покажем, что во всяком разложении (5.5), для которого

$$F_1(p, p) + F_2(p, p) \leqslant \|\Phi\|, \tag{5,7}$$

э. п. ядра F_1 и F_2 непрерывны (и, следовательно, знак $<$ в (5.7) исключается).

Положим

$$F(p, q) = F_1(p, q) + F_2(p, q) \qquad (p, q \in Q). \tag{5.8}$$

Образуем гильбертово пространство $\mathfrak{H}_F$ (см. § 1). Очевидно

$$-F \prec \Phi \prec F.$$

Поэтому, согласно предложениям 1°, 3° § 4 ядру Φ соответствует эрмитов оператор A, действующий в $\mathfrak{H}_F$ и удовлетворяющий условиям

$$(Ae_p, e_q) = \Phi(p, q) \quad (p, q \in Q); \qquad AU_s = U_sA \quad (s \in G), \tag{5.9}$$

при этом $\|A\| \leqslant 1$.

*) Для частных случаев, когда $Q = G$ — бикомпакт или коммутативная локально бикомпактная группа, это предложение иным способом было доказано ранее [9д].

Пусть

$$A = \int_{-1}^{1} \lambda \, dE(\lambda)$$

спектральное разложение эрмитова оператора A.

Положим

$$P_{+} = E(1) - E(0), \quad P_{-} = E(0) - E(-1)$$

и

$$A_{+} = P_{+}A = \int_{0} \lambda \, dE(\lambda), \quad A_{-} = - P_{-}A = - \int_{-1}^{0} \lambda \, dE(\lambda).$$

Очевидно A_{+} и A_{-} положительные эрмитовы операторы и

$$((A_{+} + A_{-})x, x) = \int_{-1}^{1} |\lambda| \, d(E(\lambda)x, x) \leqslant (x, x). \tag{5.10}$$

Из перестановочности A с U_s $(s \in G)$ вытекает перестановочность всех U_s со спектральной функцией $E(\lambda)$, а следовательно, и с A_{+} и A_{-}. Таким образом

$$(A_{+}U_s x, U_s y) = (A_{+}x, y) \quad (A_{-}U_s x, U_s y) = (A_{-}x, y) \quad (x, y \in \mathfrak{H}_F). \tag{5.11}$$

Положим

$$F_{+}(p, q) = (A_{+}e_p, e_q), \quad F_{-}(p, q) = (A_{-}e_p, e_q) \quad (p, q \in Q). \tag{5.12}$$

Из положительности операторов A_{+} и A_{-} следует эрмитова положительность ядер F_{+} и F_{-}. Кроме того, подставляя в (5.10) $x=e_p$, $y=e_q$, мы найдем, что ядра F_{+} и F_{-} инвариантны.

Так как

$$A = A_{+} - A_{-},$$

то, согласно (5.12) и (5.9),

$$\Phi(p, q) = F_{+}(p, q) - F_{-}(p, q) \quad (p, q \in Q). \tag{5.13}$$

Отсюда

$$\|\Phi\| \leqslant F_{+}(p, p) + F_{-}(p, p). \tag{5.14}$$

С другой стороны, подставляя в (5.10)

$$x = \sum \xi \, e_{p_j},$$

найдем, что ядро

$$H(p, q) = F(p, q) - F_{+}(p, q) - F_{-}(p, q)$$

эрмитово положительно или $\equiv 0$. В частности, $H(p, p) \geqslant 0$. Таким образом

$$F_{+}(p, p) + F_{-}(p, p) = F(p, p) - H(p, p) \leqslant \|\Phi\| - H(p, p),$$

ибо, согласно (5.7), $F(p, p) \leqslant \|\Phi\|$.

Сопоставляя с (5.14), заключаем, что $H(p, p)=0$, а следовательно, вообще $H(p, q)=0$, т. е.

$$F_+(p, q)+F_-(p, q)=F(p, q) \tag{5.15}$$

и

$$\|\Phi\|=F_+(p, p)+F_-(p, p)=F(p, p). \tag{5.16}$$

Из равенств (5.5), (5.8), (5.13) и (5.15) заключаем, что

$$F_1(p, q)=F_+(p, q), \quad F_2(p, q)=F_-(p, q).$$

Нам остается доказать, что ядра F_+ и F_- непрерывны. Для этого заметим, что при любом фиксированном $x \in \mathfrak{H}_F$ выражение

$$(Ax, e_q) \tag{5.17}$$

есть непрерывная функция $q \in Q$.

В самом деле, при $x=e_p$ это выражение совпадает с непрерывным на $Q \times Q$ ядром $\Phi(p, q)$. Непрерывность выражения (5.17) как функции $q \in Q$ при $x=e_p$ влечет, очевидно, его непрерывность при $x \in L$. С другой стороны, для любого $x \in \mathfrak{H}_F$ найдется последовательность $\{x_n\} \subset L$ такая, что $x_n \to x$, и, следовательно, для нее равномерно относительно $p \in Q: (Ax_n, e_p) \to (Ax, e_p)$, откуда вытекает наше утверждение.

Вставляя в (5.17) $x=P_+e_p$, мы находим, что

$$F_+(p, q)=(A_+e_p, e_q)=(AP_+e_p, e_q)$$

есть непрерывная функция от q, а следовательно, согласно предложению 1° § 1, ядро F_+ непрерывно на $Q \times Q$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Повидимому, разложение $\Phi=F_1-F$, о котором идет речь в теореме, единственно, но нам известно доказательство этого факта только для отдельных случаев (когда G бикомпактная или когда G коммутативная локально бикомпактная группа).

Замечание 2. Если бы мы при условиях теоремы 7 повели бы рассуждения, отправляясь не от ядра $F=F_1+F_2$, а от ядра $F=F'+F''$, то мы пришли бы к предложению.

Если некоторое непрерывное ядро $\Phi(p, q)$ $(p, q \in Q)$ *представимо в виде*

$$\Phi(p, q)=F'(p, q)-F''(p, q),$$

где F', F'' *э. п. инвариантные (но не непрерывные) ядра, то оно допускает также представление*

$$\Phi(p, q)=F^{(1)}(p, q)-F^{(2)}(p, q) \qquad (p, q \in Q), \tag{5.18}$$

где $F^{(1)}, F^{(2)} \in \mathfrak{P}_{QG}$ *и*

$$F^{(1)} \prec F', \; F^{(2)} \prec F''.$$

Однако для разложения (5.18), вообще говоря, нельзя утверждать, что

$$F^{(1)}(p, p)+F^{(2)}(p, p)=\|\Phi\|.$$

5. Линейный функционал $M(\varphi)$, определенный на пространстве $C(G)$ всех ограниченных непрерывных функций $\varphi(s)$ $(s \in G)$ называется **инвариантным средним**, если он обладает следующими свойствами:

1°. $M\{1\} = 1$,

2°. $M\{\varphi\} \geqslant 0$, если $\varphi(s) \geqslant 0$ для всех $s \in G$.

3°. $M\{\psi\} = M\{\varphi\}$, если для некоторого $a \in G: \psi(s) = \varphi(sa)$ $(s \in G)$.

Легко показывается, что свойства 1°, 2° всегда влекут свойство

$$\inf_{s \in G} \varphi(s) \leqslant M(\psi) \leqslant \sup_{s \in G} \varphi(s)$$

для любой вещественной функции $\varphi \in C(G)$.

Инвариантное среднее M позволяет образовать из каждого ограниченного ядра $\Phi(p, q)$ $(p, q \in Q)$ некоторое новое ограниченное ядро

$$\Phi_{\text{инв}}(p, q) = M\{\Phi(sp, sq)\}, \tag{5.19}$$

которое в силу свойства 3° функционала M будет инвариантным.

Кроме того, если F — э. п. ядро, то $F_{\text{инв}}$ — э. п. ядро.

В самом деле, если F — э. п. ядро, то для любых $q_1 \in Q, \ldots, q_n \in Q$, комплексных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $s \in G$ будет

$$\sum_{j, k=1}^{n} F(sq_j, sq_k)\xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0.$$

Применяя к левой части среднее M, мы, в силу его свойства 2°, получим

$$\sum_{j, k=1}^{n} F_{\text{инв}}(q_j, q_k)\xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0.$$

Все это позволяет высказать следующее предложение:

Теорема 10. *Если на группе G существует инвариантное среднее M, то всякое инвариантное ядро, принадлежащее $\mathfrak{R}_Q$, принадлежит также $\mathfrak{R}_{QG}$; кроме того, если оно эрмитово, то его нормы в $\mathfrak{R}_Q$ и $\mathfrak{R}_{QG}$ совпадают.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для инвариантного эрмитова ядра $\Phi(p, q)$. Если такое ядро принадлежит к $\mathfrak{R}_Q$, то это означает, что оно представимо в виде

$$\Phi(p, q) = F^{(1)}(p, q) - F^{(2)}(p, q), \tag{5.20}$$

где ядра $F^{(1)}, F^{(2)} \in \mathfrak{P}_Q$ (но, возможно, не инвариантны).

Так как ядро Φ инвариантно, то из (5.20) следует

$$\Phi(p, q) = M\{\Phi(sp, sq)\} = F^{(1)}_{\text{инв}}(p, q) - F^{(2)}_{\text{инв}}(p, q) \qquad (p, q \in Q).$$

Отсюда, на основании теоремы 8, заключаем, что $\Phi \in \mathfrak{R}_{QG}$.

По определению (5.20) ядра $F_{\text{инв}}$

$$F_{\text{инв}}(p, p) = M\{F(sp, sp)\} \leqslant \sup_{p \in Q} F(p, p).$$

Таким образом

$$F^{(1)}_{\text{инв}}(p, p) + F^{(2)}_{\text{инв}}(p, p) \leqslant \sup_{p \in Q} F^{(1)}(p, p) + \sup_{p \in Q} F^{(2)}(p, p),$$

и, следовательно, по той же теореме 8, норма Φ в $\mathfrak{R}_{QG}$, не больше нормы Φ в $\mathfrak{R}_Q$, а меньше она, очевидно, не может быть.

Теорема доказана.

Заметим, что из доказательства теоремы следует, что ее формулировку можно усилить, а именно, заменив $\mathfrak{R}_Q$ на $\mathfrak{R}_{Q_0}$, где Q_0 получается из Q заменой имеющейся топологии — дискретной.

Для того чтобы составить себе некоторое представление об области применимости теоремы, заметим следующее: инвариантное среднее существует на группе G, если выполняется одно из следующих условий:

a) группа G разрешима;

b) группа G бикомпактна;

c) группа G локально бикомпактна и на ней можно указать последовательность бикомпактных частей Γ_n $(n=1, 2, \ldots)$, такую, что для любого $s \in G$ и любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(s; \varepsilon)$ такой, что

$$\operatorname{mes}(\Gamma_n s \setminus \Gamma_n) < \varepsilon \operatorname{mes} \Gamma_n \quad \text{при} \quad n > N,$$

где $\operatorname{mes} A$ — правоинвариантная мера Хаара множества $A \subset G$.

Утверждение при условии a) легко следует из одной работы Аньюморза [20]; при условии b) оно было доказано Хааром [25] и Нейманом [28a, 15], а при условии c) оно явствует из того, что при выполнении этого условия функционал

$$M(\varphi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\operatorname{mes} \Gamma_n} \int_{\Gamma_n} \varphi(sq)\, ds,$$

где предел понимается в смысле обобщенного предела Мазура-Банаха, и обладает всеми свойствами среднего.

§ 6. КОЛЬЦО $\mathfrak{R}(G)$

1. Как известно, определенная на топологической группе G функция $f(s)$ $(s \in G)$ называется эрмитово-положительной, если ядро $f(t^{-1}s)$ $(s, t \in G)$ эрмитово-положительно.

Совокупность непрерывных э. п. функций на топологической группе G обозначим через $\mathfrak{P}(G)$, а их комплексную линейную оболочку через $\mathfrak{R}(G)$.

Таким образом, функция $f(s)$ $(s \in G)$ принадлежит $\mathfrak{P}(G)$ или $\mathfrak{R}(G)$, если ядро $f(t^{-1}s)$ принадлежит $\mathfrak{P}_G$, соответственно $\mathfrak{R}_G$.

Группу G можно толковать, как группу гомеоморфизмов (левых сдвигов $q \to sq$) топологического пространства $Q = G$.

Некоторое ядро $F(s, t)$ $(s, t \in G)$ будет инвариантным на $Q = G$, если для любого $a \in G : F(s, t) = F(as, at)$ $(s, t \in G)$, в частности, при $a = t^{-1}$ получаем $F(s, t) = F(t^{-1}s, 1) = f(t^{-1}s)$ $(s, t \in G$, $\mathbf{1}$ — единица группы $G)$.

Поэтому всякая функция $f(s)$ из $\mathfrak{P}(G)$ или $\mathfrak{R}(G)$ порождает некоторое ядро $F(s, t) = f(t^{-1}s)$ из $\mathfrak{P}_{GG}$, соответственно $\mathfrak{R}_{GG}$ и наоборот.

Норма в $\mathfrak{R}_{GG}$ индуцирует норму в $\mathfrak{R}(G)$, а именно, если $f \in \mathfrak{P}(G)$, то

$$\|f\| = f(1),$$

для любой же другой эрмитовой функции $f(s) = \overline{f(s^{-1})}$ из $\mathfrak{R}(G)$

$$\|f\| = \min\{f'(1) + f''(1)\}, \tag{6.1}$$

где минимум распространяется на все пары $f', f'' \in \mathfrak{P}(G)$, такие, что

$$f(s) = f'(s) - f''(s) \qquad (s \in G).$$

Минимум в (6.1) достигается согласно теореме 8.

Как определяется норма для неэрмитовых функций $f \in \mathfrak{R}(G)$ — несущественно.

Таким образом следствием теоремы 6 будет

Теорема 6'. *$\mathfrak{R}(G)$ — полное нормированное кольцо.*

Отметим еще такое свойство кольца $\mathfrak{R}(G)$:

1°. Если функция $f(s)$ принадлежит кольцу $\mathfrak{R}(G)$, то этому же кольцу принадлежат функции $f(as)$, $f(sb)$ и $f(asb)$ при любых $a, b \in G$).

В самом деле, предложение 1° будет справедливо, если оно справедливо для функций $f \in \mathfrak{P}(G)$.

Но легко видеть, что если $f(s) \in \mathfrak{P}(G)$, то также и функции $f(asa^{-1})$,

$$g_1(s) = f(asa^{-1}) + f(as) + f(sa^{-1}) + f(s),$$

$$g_2(s) = f(asa^{-1}) + if(as) + if(sa^{-1}) + f(s)$$

принадлежат $\mathfrak{P}(G)$. Но тогда и

$$f(as) = \frac{1}{2}[g_1(s) + ig_2(s) - (1+i)f(s) - (1+i)f(asa^{-1})] \in \mathfrak{R}(G).$$

Аналогично находим, что и $f(sb) \in \mathfrak{R}(G)$, а следовательно, и $f(asb) \in \mathfrak{R}(G)$.

Приведем еще следующее любопытное неравенство*), имеющее место для любой э. п. функции $f(s)$:

$$|f(s) - f(t)| \leqslant 2f(1)(f(1) - Re\, f(t^{-1}s)) \quad (s, t \in G). \tag{6.2}$$

*) Впервые мы указали его в нашей статье [9д].

Если положить $F(s, t) = f(t^{-1}s)$ и образовать гильбертово пространство $\mathfrak{H}_F$, то неравенство (6.2) будет выражать то же, что и неравенство Буняковского

$$|(e_s - e_t, e_1)|^2 \leqslant (e_1, e_1)(e_s - e_t, e_s - e_t),$$

ибо

$$(e_s, e_t) = f(t^{-1}s) \qquad (s, t \in G).$$

В частности, из (6.2) непосредственно вытекает, что если э. п. функция $f(s)$ $(s \in G)$ непрерывна в точке $\mathbf{1}$, то она равномерно непрерывна на G.

Это предложение есть частный случай предложения 1° § 3 и замечания, которым мы его сопроводили.

2. Функция $\chi(s) \in \mathfrak{P}(G)$ называется зональной (по Гельфанду и Райкову элементарной), если ей соответствует зональное ядро $Z(s, t) = \chi(s^{-1}t)$ на G.

Таким образом, функция $\chi(s) \in \mathfrak{P}(G)$ будет зональной, если $\chi(\mathbf{1}) = 1$, и она не представима в виде

$$\chi(s) = \lambda f_1(s) + (1-\lambda) f_2(s) \qquad (0 < \lambda < 1),$$

где f_1, f_2 — линейно независимые функции из $\mathfrak{P}(G)$.

Согласно теореме 5 каждая зональная функция $\chi(s)$ порождает неприводимое унитарное представление U_s группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_Z$, где $Z(s, t) = \chi(t^{-1}s)$ $(s, t \in G)$. Это составляет только лишь одну часть теоремы Гельфанда-Райкова, в которой утверждается, что таким образом получаются все неприводимые представления группы G. Чтобы получить полностью эту теорему двух авторов, остается вместе с ними заметить, что если U_s есть некоторое неприводимое унитарное представление группы G в пространстве $\mathfrak{H}$, а e — какой-либо сорт из $\mathfrak{H}$, то функция

$$\chi(s) = (U_s e, e) \in \mathfrak{P}(G),$$

и представление, которое она порождает в пространстве $\mathfrak{H}_Z (Z = \chi(t^{-1}s))$, эквивалентно представлению U_s (в силу изометрического соответствия между $\mathfrak{H}_Z$ и $\mathfrak{H}$, устанавливаемого при помощи соотнесения $e_s \longleftrightarrow U_s e$ $(s \in G)$.

3. Повидимому, при весьма общих предположениях относительно группы G справедлива следующая теорема, которую, однако, только в одной ее части нам удалось доказать для любой топологической группы.

Теорема 11. *Для того чтобы непрерывная функция $f(s)$ $(s \in G)$ принадлежала кольцу $\mathfrak{R}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $M > 0$ для любых $s_1 \in G, \ldots, s_n \in G$ и любых комплексных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_1^n c_j f(s_j) \right| \leqslant M \sup_{\chi \in \mathfrak{Z}} \left| \sum_1^n c_j \chi(s_j) \right| \tag{6.3}$$

Докажем достаточность условия (6.3).

Заменяя в (6.3) скаляры $\bar{c}_j$ на c_j, а элементы группы s_j на s_j^{-1} ($j=1, 2, \ldots, n$) и переходя затем к комплексно сопряженным величинам, найдем, что

$$\left| \sum_1^n c_j \overline{f(s_j^{-1})} \right| \leqslant M \sup_{\chi \in \mathfrak{Z}} \left| \sum_1^n c_j \chi(s) \right|.$$

Отсюда заключаем, что условие (6.3) выполняется (с той же константой M) также для эрмитовых компонент функции f

$$f^+(s) = \frac{1}{2}\left(f(s) + \overline{f(s^{-1})}\right), \quad f^-(s) = \frac{1}{2i}\left(f(s) - \overline{f(s^{-1})}\right) \quad (s \in G).$$

Если f^+, $f^- \in \mathfrak{R}(G)$, то и $f \in \mathfrak{R}(G)$. Поэтому при доказательстве достаточности условия (6.3) можно ограничиться рассмотрением случая, когда f — эрмитова функция.

Отнесем каждому $s \in G$ функцию $\varphi_s(\chi)$ на $\mathfrak{Z}$, полагая

$$\varphi_s(\chi) = \chi(s) \quad (\chi \in \mathfrak{Z}).$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ линейную оболочку множества функций $\varphi_s(\chi)$ ($s \in G$). Таким образом $\mathfrak{S}$ состоит из функций $\varphi(\chi)$ ($\chi \in \mathfrak{Z}$), имеющих вид

$$\varphi(\chi) = c_1 \varphi_{s_1}(\chi) + \ldots + c_n \varphi_{s_n}(\chi), \tag{6.4}$$

где $s_1 \in G, \ldots, s_n \in G$, а $c_1, \ldots, c_n$ ($n=1,2,\ldots$) — произвольные комплексные числа.

Определим на $\mathfrak{S}$ линейный функционал $A(\varphi)$, полагая для функции φ вида (6.4)

$$A(\varphi) = \sum_1^n f(s_j) c_j.$$

Неравенство (6,3) можно будет переписать в следующей форме:

$$|A(\varphi)| \leqslant M \sup_{\chi \in \mathfrak{Z}} |\varphi(\chi)| \qquad (\varphi \in \mathfrak{S}).$$

Таким образом функционал A есть ограниченный функционал на $\mathfrak{S}$ ($\|A\| \leqslant M$) при введении в $\mathfrak{S}$ равномерной нормы. Пространство $\mathfrak{S}$ содержит функцию, равную тождественно единице, а именно, при $s=1$ имеем $\varphi_s(\chi) \equiv 1$.

Следовательно, функционал A разложим на разность двух положительных функционалов

$$A = A_1 - A_2,$$

причем так, что

$$A_1(1) + A_2(1) = \|A\| \leqslant M.$$

Положим

$$f_i(s) = A_i(\varphi_s) \qquad (i=1, 2).$$

Тогда

$$f(s) = A(\varphi_s) = A_1(\varphi_s) - A_2(\varphi_s) = f_1(s) - f_2(s) \qquad (s \in G),$$

при этом

$$f_1(1) + f_2(1) = A_1(1) + A_2(1) \leqslant M.$$

Так как для любых $s_1 \in G, \ldots, s_n \in G$ и комплексных $\xi_1, \ldots, \xi_n$

$$\psi(\chi) = \sum_{j, k=1}^{n} \xi_j \bar{\xi}_k \varphi_{s_k^{-1} s_j}(\chi) = \sum_{j, k=1}^{n} \chi(s_k^{-1} s_j) \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0 \quad (\chi \in \mathfrak{Z}),$$

то и

$$A_i(\psi) = \sum_{j, k=1}^{n} f_i(s_k^{-1} s_j) \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Таким образом, f_1 и f_2 — э. п. функции.

Если эти функции не непрерывны, то, применяя к ядрам $f(t^{-1}s)$, $f_1(t^{-1}s)$, $f_2(t^{-1}s)$ теорему 8, мы убедимся, что найдется разложение

$$f(s) = f'_1(s) - f'_2(s)$$

с непрерывными э. п. функциями $f'_i(s)$ $(i = 1, 2)$, такими, что

$$\|f\| = f'_1(1) + f'_2(1) \leqslant f_1(1) + f_2(1) \leqslant M,$$

откуда $f \in \mathfrak{R}(G)$.

Достаточность условия (6.3) доказана.

Мы предполагаем, что условие (6.3) является также необходимым, если группа G локально бикомпактна.

Во всяком случае, для абелевой локально бикомпактной группы это так.

В самом деле, если G — абелева локально бикомпактная группа, то по теореме А. Вейля и Д. Райкова [35, 16д] функция $f(s) \in \mathfrak{P}(G)$ в том и только том случае, если она допускает представление

$$f(s) = \int_{\mathfrak{Z}} \chi(s) \, d\sigma(\chi),$$

где $\sigma(\mathcal{E})$ есть ограниченная неотрицательная вполне аддитивная функция борелевских множеств группы характеров $\mathfrak{Z}$ (зональных функций) группы G (группа $\mathfrak{Z}$ топологизируется по Понтрягину [15]).

Отсюда вытекает, что в этом случае кольцо $\mathfrak{R}(G)$ совпадает с множеством функций $f(s)$ $(s \in G)$, представимых в виде

$$f(s) = \int_{\mathfrak{Z}} \chi(s) \, d\tau(\chi), \tag{6.5}$$

где $\tau(\mathcal{E})$ — некоторая комплекснозначная вполне аддитивная функция борелевских множеств из $\mathfrak{Z}$.

Очевидно, что если $M = \mathrm{var}\,\sigma$, то

$$\left|\sum_1^n c_j f(s_j)\right| = \left|\int_{\mathfrak{Z}} \left(\sum_1^n c_j \chi(s_j)\right) d\tau(\chi)\right| < M \sup_{\chi \in \mathfrak{Z}} \left|\sum_1^n c_j \chi_j(s)\right|.$$

Одновременно мы заключаем, что в случае абелевой локально бикомпактной группы G условие (6.3) для непрерывной функции $f(s)$ является необходимым и достаточным условием ее представимости в виде интеграла (6.5).

Иным путем это предложение доказано в нашей заметке [9д].

Для случая, когда G — вещественная ось, оно было ранее доказано С. Бохнером [21а].

§ 7. КОЛЬЦА АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ИЗ Q-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы подробно выясним структуру колец $\mathfrak{R}_{QG}$, $\mathfrak{R}(G)$ и некоторых их подколец для случая, когда G — бикомпактная группа, а следовательно, Q — бикомпакт.

1. Начнем с некоторых вспомогательных алгебраических фактов.

Пусть $\mathfrak{M}_{mn}(m, n=1, 2\ldots)$ — множество всех комплексных прямоугольных матриц

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11}\, a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Каждой такой матрице можно сопоставить линейное преобразование $y = Ax$

$$\eta_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

действующее из унитарного пространства E_n в унитарное пространство E_m.

Это преобразование (а с ним, скажем, и матрица A) имеет норму,

$$\|A\|_c = \max_{x \in E_n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

которая совпадает с наибольшим характеристическим числом эрмитово-неотрицательной матрицы $\sqrt{A^*A}$ (или $\sqrt{AA^*}$)*).

*) Через A^* обозначается матрица, получающаяся из A путем транспонирования и замены всех ее элементов комплексно-сопряженными. Квадратная эрмитова матрица называется эрмитово-неотрицательной, если соответствующая ей эрмитова форма неотрицательна.

Кроме обычных свойств, норма $\|X\|_c$ $(X \in \mathfrak{M}_{mn})$ будет, очевидно, обладать еще следующим:

$$\|U_m X\|_c = \|XU_n\| = \|X\| \qquad (X \in \mathfrak{M}_{mn}),$$

где через $U_m(U_n)$ обозначена произвольная унитарная матрица m-го (n-го) порядка.

Если $Z = \|z_{ik}\|_1^n$ — некоторая квадратная матрица, то через $S(Z)$ мы будем обозначать след матрицы Z

$$S(Z) = \sum_1^n z_{ii}.$$

Общий вид линейного функционала $F(X)$ в $\mathfrak{M}_{mn}$ может быть задан следующей формулой:

$$F(X) = S(AX) \qquad (X \in \mathfrak{M}_{mn}),$$

где A — некоторая матрица из $\mathfrak{M}_{nm}$.

Легко вычислить норму функционала $F = F_A$

$$\|F_A\| = \max_{X \in \mathfrak{M}_{mn}} \frac{|S(AX)|}{\|X\|_c},$$

которую мы еще иначе будем называть l-нормой матрицы A и будем обозначать через $\|A\|_l$.

А именно, оказывается

$$\|A\|_l = S(\sqrt{A^*A}) = S(\sqrt{AA^*}), \tag{7.1}$$

т. е. $\|A\|_l$ равно сумме арифметических квадратных корней из характеристических чисел эрмитово-неотрицательной матрицы A^*A (или, что дает одно и то же, матрицы AA^*).

Так как всякое конечномерное банахово пространство рефлективно, то таким образом:

I. $\|A\|_l = \max\limits_{X \in \mathfrak{M}_{mn}} \dfrac{|S(AX)|}{\|X\|_c}, \quad \|A\|_c = \max\limits_{X \in \mathfrak{M}_{mn}} \dfrac{|S(AX)|}{\|X\|_l} \qquad (A \in \mathfrak{M}_{nm}).$

Для случая $m = n$ доказательство (7.1) можно найти в статье Я. Неймана [28c]. Оно легко обобщается на случай $m \neq n$.

Легко видеть, что

II. $\|AU_m\|_l = \|A\|_l = \|U_n A\|_l \qquad (A \in \mathfrak{M}_{nm}).$

Первое равенство вытекает из того, что

$$S(AU_m X) = S(AY) \qquad (X \in \mathfrak{M}_{mn}),$$

где $Y = U_m X$ и, следовательно, $\|Y\|_c = \|X\|_c$.

Второе равенство — из того, что

$$S(U_n AX) = S(AXU_n) = S(AZ) \qquad (X \in \mathfrak{M}_{nm}),$$

где $Z = XU_n$ и, следовательно, $\|Z\|_c = \|X\|_c$.

Предоставляем также читателю доказать, что для кронекеровского произведения $A_1 \times A_2$ *) двух матриц $A_1 \in \mathfrak{M}_{n_1, m_1}$ и $A_2 \in \mathfrak{M}_{n_2, m_2}$

III.
$$\|A_1 \times A_2\|_l = \|A_1\|_l \|A_2\|_l$$
$$\|A_1 \times A_2\|_c = \|A_1\|_c \|A_2\|_l.$$

Очевидно также, что c- и l-нормы обладают тем свойством, что для любой прямоугольной матрицы

$$\|A\| = \|\bar{A}\| = \|A^*\|.$$

В § 10 нам придется использовать еще следующее свойство c- и l-норм.

IV. Если

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} $(i, k = 1, 2, \dots, p)$ — некоторые матрицы, имеющие n_i строк и n_k колонн, то

$$\|A\|_l \leqslant \sum_{k=1}^{p} \|A_{kk}\|_l.$$

Это неравенство следует из того, что левая часть есть

$$\max \frac{|S(AX)|}{\|X\|_c},$$

где X пробегает $\mathfrak{M}_{nn}$ $(n = n_1 + n_2 + \dots + n_p)$, а правая часть есть максимум того же выражения на множестве матриц X вида:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X_p \end{pmatrix},$$

где $X_k \in \mathfrak{M}_{n_k n_k}$ $(k = 1, 2, \dots, p)$.

---

*) Если $A \in \mathfrak{M}_{nm}$, а $B = \|b_{ik}\| \in \mathfrak{M}_{pq}$, то под кронекеровским произведением $A \times B$ мы будем понимать матрицу, которая символически записывается в виде:

$$\begin{Vmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \dots & Ab_{1q} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \dots & Ab_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Ab_{p1} & Ab_{p2} & \dots & Ab_{pq} \end{Vmatrix}$$

и которая, таким образом, принадлежит $\mathfrak{M}_{np, mq}$.

Заметим еще, что если A — квадратная эрмитова матрица, то $\|A\|_r$ совпадает с наибольшей из абсолютных величин характеристических чисел A, а $\|A\|_l$ — с суммой абсолютных величин этих чисел.

В силу последнего, если эрмитову матрицу A разложить на ортогональные друг к другу эрмитово-неотрицательные матрицы A_+ и A_-, то

$$\|A\|_l = S(A_+) + S(A_-) = \|A_+\|_l + \|A_-\|_l. \tag{7.2}$$

При всяком ином разложении $A = A_1 - A_2$ на эрмитово-неотрицательные компоненты A_1 и A_2, легко видеть

$$\|A\|_l < \|A_1\|_l + \|A_2\|_l = S(A_1) + S(A_2). \tag{7.2'}$$

2. Пусть G — бикомпактная группа, а $\{U_\nu(s)\}_{\nu \in N}$ — полная система всех неприводимых унитарных неэквивалентных между собой представлений

$$U_\nu(s) = \|u_{jk}^{(\nu)}(s)\|_1^{n_\nu} \qquad (\nu \in N).$$

Если $f(s) \in \mathfrak{P}(G)$, то применение теоремы Мерсера к интегральному уравнению

$$\varphi(s) = \lambda \int\limits_G f(t^{-1}s)\varphi(t)\,dt$$

позволяет утверждать (см., например, [26]), что $f(s)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(s) = \sum_{\nu \in N} S(H_\nu U_\nu(s)), \tag{7.3}$$

где

$$H_\nu = n_\nu \int\limits_G f(s) U_\nu^*(s)\,ds \qquad (\nu \in N)$$

суть эрмитово-неотрицательные матрицы порядков n_ν соответственно, из которых отличных от нуля не более чем счетное число.

Из (7.3) следует, что

$$\|f\| = f(1) = \sum_{\nu \in N} S(H_\nu) = \sum_{\nu \in N} \|H_\nu\|_l.$$

Обратно, если некоторые эрмитово-неотрицательные матрицы H_ν порядков n_ν соответственно $(\nu \in N)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{\nu \in N} S(H_\nu) < \infty, \tag{7.4}$$

то ряд, стоящий в (7.3), абсолютно и равномерно сходится и определяет функцию $f(s) \in \mathfrak{P}(G)$.

В самом деле, заменяя представление $U_\nu(s)$, соответственно подобранным эквивалентным представлением $\mathcal{E}_\nu U_\nu(s) \mathcal{E}_\nu^{-1}$, можно добиться того, чтобы H_ν стало диагональной матрицей

$$H_\nu = \|\lambda_j^{(\nu)} \delta_{jk}\|_1^{n_\nu},$$

и тогда условие (7.4) будет означать, что ряд из положительных чисел

$$\sum_{\nu \in N}(\lambda_1^{(\nu)}+\lambda_2^{(\nu)}+\ldots+\lambda_{n_\nu}^{(\nu)})$$

сходится и мажорирует ряд (7.3), который теперь можно будет записать в виде

$$f(s)=\sum_{\nu \in N}(\lambda_1^{(\nu)}u_{11}^{(\nu)}(s)+\ldots+\lambda_{n_\nu}^{(\nu)}u_{n_\nu n_\nu}(s)).$$

Так как, кроме того, диагональные элементы $u_{jj}(s)$ всякого унитарного представления $U(s)=\|u_{jk}(s)\|$ принадлежат $\mathfrak{P}(G)$, то и $f(s)\in\mathfrak{P}(G)$.

Отсюда без труда получается первая часть следующей теоремы:

Теорема 12. *Кольцо $\mathfrak{R}(G)$ состоит из тех и только тех функций $f(s)$, которые представимы в виде*

$$f(s)=\sum_{\nu \in N}S(A_\nu U_\nu(s)), \tag{7.5}$$

где

$$\sum_{\nu \in N}\|A_\nu\|_l<\infty. \tag{7.6}$$

Кольцо $\mathfrak{R}(G)$ аналитически полно.

Доказательство. Так как всякая функция из $\mathfrak{P}(G)$ допускает представление (7.5), а любая функция $f(s)\in\mathfrak{R}(G)$ представима в виде линейной комбинации не более четырех функций из $\mathfrak{P}(G)$, то всякая $f(s)\in\mathfrak{R}(G)$ допускает представление (7.5).

Покажем, что и обратно, если некоторые матрицы $A_\nu\in\mathfrak{M}_{n_\nu n_\nu}$ $(\nu\in N)$ удовлетворяют условию (7.6), то ряд в (7.5) сходится абсолютно и равномерно и определяет функцию $f(s)\in\mathfrak{R}(G)$.

Вводя эрмитовы компоненты

$$B_\nu=\frac{1}{2}(A_\nu+A_\nu^*),\quad C_\nu=\frac{1}{2i}(A_\nu-A_\nu^*),$$

заметим, что

$$\|B_\nu\|_l\leqslant\|A_\nu\|_l,\quad \|C_\nu\|_l\leqslant\|A_\nu\|_l.$$

С другой стороны, согласно (7.2)

$$\|B_\nu\|_l=\|(B_\nu)_+\|_l+\|(B_\nu)_-\|_l,$$
$$\|C_\nu\|_l=\|(C_\nu)_+\|_l+\|(C_\nu)_-\|_l.$$

Таким образом ряд (7.5) можно представить как линейную комбинацию с коэфициентами ± 1, $\pm i$ четырех рядов, в каждом из которых вместо $A_\nu(\nu\in N)$ будут стоять некоторые эрмитово-неотрицательные матрицы, также удовлетворяющие условию (7.6). Откуда следует утверждение.

Второе утверждение теоремы есть непосредственное следствие теорем 3 и 9.

Легко видеть, что

$$\Omega(sq) = U(s)\,\Omega(q) \qquad (s \in G,\ q \in Q). \tag{7.11}$$

Отметим также, что

$$\Omega(0) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-m. \end{array} \tag{7.12}$$

Пусть теперь $\Omega_\nu(q)$ $(\nu \in N)$ — всевозможные прямоугольные матрицы (имеющие m_ν столбцов и $n_\nu (\geqslant m_\nu)$ строчек), образованные по указанному способу из различных неэквивалентных неприводимых представлений $U_\nu(s)$ группы G.

Если выписать элементы всех ненулевых матриц $\Omega_\nu(q)$, то окажется, что они попарно между собой ортогональны и что любую непрерывную функцию можно с любой точностью равномерно аппроксимировать линейным агрегатом из конечного числа этих элементов.

Если $\omega(q)$ — элемент некоторой матрицы $\Omega(q)$ из указанного набора, то

$$\int\limits_Q |\omega(q)|^2\, dq = \frac{1}{n},$$

где n — число строчек матрицы $\Omega(q)$, т. е. степень непрерывного унитарного представления $U(s)$, породившего $\Omega(q)$.

Всякой непрерывной функции $f(q)$ $(q \in Q)$ можно сопоставить ее „ряд Фурье"

$$f(q) \sim \sum_{\nu \in N} S(C_\nu \Omega_\nu(q)),$$

где

$$C_\nu = n_\nu \int\limits_Q f(q)\, \Omega_\nu^*(q)\, dq \qquad (\nu \in N).$$

Сравним его с рядом Фурье функции $\varphi(s) = f(sO)$

$$f(sO) \sim \sum_{\nu \in N} S(A_\nu U_\nu(s)),$$

где

$$A_\nu = n_\nu \int\limits_G f(sO)\, U_\nu^*(s)\, ds \qquad (\nu \in N).$$

Согласно (7.7) и (7.11)

$$C_\nu = n_\nu \int\limits_G f(sO)\,\Omega_\nu^*(sO)\,ds = n_\nu \Omega_\nu^*(O) \int\limits_G f(sO) U_\nu(s^{-1})\,ds,$$

т. е.

$$C_\nu = \Omega_\nu^*(0)\,A_\nu \qquad (\nu \in N). \tag{7.13}$$

С другой стороны, в силу инвариантности интеграла на G

$$A_\nu = n_\nu \int\limits_G f(sO) U_\nu(h^{-1}s^{-1})\,ds = n_\nu U_\nu(h^{-1}) \int\limits_G f(sO) U_\nu(s^{-1})\,ds = U_\nu(h^{-1})\,A_\nu \qquad (\nu \in N).$$

Интегрируя это равенство относительно h по H, получаем

$$A_\nu = P_\nu A_\nu. \tag{7.14}$$

Учитывая вид (7.9) и (7.12) матриц P и $\Omega(0)$, заключаем, что соотношения (7.13) и (7.14), означают не что иное, как

$$A_\nu = \begin{Vmatrix} C_\nu \\ O \end{Vmatrix} \qquad (\nu \in N), \tag{7.15}$$

т. е. что квадратная матрица A_ν получается из прямоугольной матрицы C_ν путем ее окаймления снизу строками из нулей. Но тогда

$$\|A_\nu\|_l = \|C_\nu\|_l.$$

Заметим также, что соотношение (7.8) влечет равенство

$$S(C_\nu \Omega_\nu(sO)) = S(A_\nu U_\nu(s)) \qquad (\nu \in N).$$

Вспоминая теорему 11, приходим к следующему выводу:

Теорема 13. *Пусть* $C_\nu \in \mathfrak{M}_{n_\nu m_\nu}$ $(\nu \in N)$ *некоторое множество матриц таких, что*

$$\sum_{\nu \in N} \|C_\nu\|_l < \infty. \tag{7.16}$$

Тогда ряд

$$\sum_{\nu \in N} S(C_\nu \Omega_\nu(q)) \tag{7.17}$$

сходится абсолютно и равномерно на Q.

Функции $f(q)$, *разлагающиеся в ряды* (7.17), *удовлетворяющие условию (7.16), образуют полное нормированное кольцо при определении нормы*

$$\|f\| = \sum_{\nu \in N} \|C_\nu\|_l.$$

Это кольцо аналитически полно.

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из того, что при $q = sO$ ряд (7.17) совпадает с рядом

$$\sum_{\nu \in N} S(A_\nu U_\nu(s)),$$

В самом деле, если $f(s) \in \Re(G)$, то $f(t^{-1}s) \in \Re_G$. Поэтому, если некоторая функция $F(z)$ голоморфна в сумме конечного числа областей, содержащих все значения $f(s)$, а значит, и $f(t^{-1}s)$, то, по теореме 3, ядро $F(f(t^{-1}s)) \in \Re_G$. Но так как оно G-инвариантно, то по теореме 9: $F(f(t^{-1}s)) \in \Re_{GG}$, т. е. $F(f(s)) \in \Re(G)$.

Теорема доказана.

С помощью (7.2), (7.2′) нетрудно показать, что для эрмитовых элементов $f \in \Re(G)$

$$\|f\| = \sum_{\nu \in N}' \|A_\nu\|_l.$$

Для неэрмитовых элементов $f \in \Re(G)$ естественно определить норму этим равенством. При таком определении нормы для любых двух элементов $g, f \in \Re(G)$ будет соблюдаться неравенство:

$$\|gf\| \leqslant \|g\| \cdot \|f\|.$$

Это легко вытекает из свойства III) матричной нормы $\|A\|_l$.

3. Пусть теперь G — бикомпактная транзитивная группа гомеоморфизмов бикомпакта Q.

Напомним некоторые факты теории Картана-Вейля [23, 36] Q-гармонических функций на однородном бикомпакте Q.

Для непрерывных функций $f(q)$ на Q можно определить линейный функционал, обозначаемый через $\int\limits_Q f(q)\,dq$, полагая

$$\int\limits_Q f(q)\,dq = \int\limits_G f(sq)\,ds, \tag{7.7}$$

где правый интеграл обозначает среднее Неймана по группе.

Этот функционал будет обладать свойством инвариантности

$$\int\limits_Q f(q)\,dq = \int\limits_Q f(tq)\,dq \qquad (t \in G)$$

и свойством нормируемости:

$$\int\limits_Q 1 \cdot dq = 1.$$

Всякий другой линейный функционал на $C(Q)$, обладающий этими двумя свойствами, будет с ним совпадать.

Зафиксируем какую-либо точку O из Q и введем в рассмотрение соответствующую ей стационарную подгруппу H, т. е. подгруппу всех преобразований $s \in G$, оставляющих точку O неподвижной.

Тогда Q гомеоморфно множеству классов смежности G по H.

Каждой функции $f \in C(Q)$ отвечает функция из $C(G)$ а именно, функция $\varphi(s) = f(sO)$, постоянная на левых классах смежности sH группы G по H. Обратно, всякая непрерывная функция $\varphi \in C(G)$, постоянная на классах смежности, порождается указанным образом одной и только одной функцией из $C(Q)$.

Заметим теперь, что из любой функции $\varphi(s) \in C(G)$ можно сделать функцию, постоянную на классах смежности sH, интегрируя функцию $f(sh)$ относительно h по всей подгруппе H.

Таким образом всегда найдется функция $f(q) \in C(Q)$ такая, что

$$f(sO) = \int\limits_H \varphi(sh)\,dh \qquad (s \in G).$$

В частности, если $U(s) = \|u_{jk}(s)\|_1^n$ — некоторое унитарное представление группы G, то всегда найдется матрица $\Omega(q) = \|\omega_{jk}(q)\|_1^n$ непрерывных функций на Q такая, что

$$\Omega(sO) = \int\limits_H U(sh)\,dh = U(s)\int\limits_H U(h)\,dh = U(s)P, \tag{7.8}$$

где

$$P = \int\limits_H U(h)\,dh = \int\limits_H U(h^{-1})\,dh = \int\limits_H U^*(h)\,dh = P^*.$$

Так как

$$P^2 = \int\limits_H\int\limits_H U(g)U(h)\,dg\,dh = \int\limits_H\int\limits_H U(gh)\,dh\,dg = \int\limits_H P\,dg = P,$$

то P — проектирующая матрица.

Стало быть, заменяя в случае надобности представление $U(s)$ соответственно подобранным эквивалентным представлением, можно считать, что матрица P имеет вид

$$P = \left\|\begin{matrix} 1 & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ 0 & 1\ldots0 & 0\ldots0 \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0\ldots1 & 0\ldots0 \\ 0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \cdot\\0\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \cdot\\0\end{matrix}}\right\} n-m. \end{matrix} \tag{7.9}$$

Из (7.8) находим, что

$$\Omega^*(q)\,\Omega(q) = I \qquad (q \in Q). \tag{7.10}$$

Мы видим, что $n-m$ последних вертикалей матрицы $\Omega(q)$ ($q \in Q$) состоят из нулей. Выкинем из этой матрицы последние $n-m$ вертикалей и полученную матрицу снова обозначим через $\Omega(q)$; тогда вместо (7.10) можно будет написать

$$\Omega^*(q)\,\Omega(q) \equiv I_m \qquad (q \in Q),$$

где I_m — единичная матрица m-го порядка.

в котором $A_\nu (\nu \in N)$ определяются по C_ν согласно (7.15) и, следовательно, удовлетворяют условию

$$\sum_{\nu \in N} \| A_\nu \|_l < \infty.$$

Обозначим через $\Re(Q, G)$ кольцо функций $f(q)$, разлагающихся в ряды (7.17), удовлетворяющие условию (7.16).

Из предыдущего ясно, что функция $f(q)$ $(q \in Q)$ принадлежит $\Re(Q; G)$ в том и только том случае, если $f(sO) \in \Re(G)$ *) и при этом

$$\| f(q) \| = \| f(sO) \|.$$

Следовательно, $\Re(Q, G)$ — кольцо. Если некоторая последовательность $\{ f_n(q) \} \subset \Re(Q; G)$ есть последовательность Коши

$$\| f_n(q) - f_m(q) \| \to 0 \text{ при } m, n \to \infty,$$

то таковой будет и последовательность $\{ f_n(sO) \} \subset \Re(G)$. А так как $\Re(G)$ полное кольцо, то последовательность $\{ f_n(sO) \}$ будет иметь некоторый предел $\varphi(s)$ в $\Re(G)$. Кроме того, так как сходимость по норме в $\Re(G)$ последовательности функций влечет ее равномерную сходимость, то, вместе с функциями $f_n(sO)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и функция $\varphi(s)$ постоянна на каждом классе смежности sH. Следовательно, функция $\varphi(s)$ порождает непрерывную функцию $f(q) \in \Re(Q; G)$ такую, что $f(sO) = \varphi(s)$ $(s \in G)$, и для нее

$$\| f(q) - f_n(q) \| = \| \varphi(s) - f_n(sO) \| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Итак, $\Re(Q; G)$ — полное нормированное кольцо.

Аналитическая полнота кольца $\Re(Q; G)$ явствует из аналитической полноты кольца $\Re(C)$.

Теорема доказана.

4. Однородное пространство Q называется симметричным, если для любой пары точек $p, q \in Q$ найдется $s \in C$ такое, что

$$sp = q, \quad sq = p.$$

Можно показать (см. Картан [23]), что в случае симметричного Q всякая матрица $\Omega_\nu(q)$ состоит из одного столбца. Пусть

$$\varphi_1^{(\nu)}(q), \ \varphi_2^{(\nu)}(q), \ldots, \ \varphi_{n_\nu}^{(\nu)}(q)$$

последовательные элементы матрицы $\Omega_\nu(q)$.

Тогда всякая функция $f(q) \in \Re(Q; G)$ будет разлагаться в ряд

$$f(q) = \sum_{\nu \in N} (c_1^{(\nu)} \varphi_1^{(\nu)}(q) + c_2^{(\nu)} \varphi_2^{(\nu)}(q) + \ldots + c_{n_\nu}^{(\nu)} \varphi_{n_\nu}^{(\nu)}(q)),$$

где

$$\sum_{\nu \in N} \sqrt{|c_1^{(\nu)}|^2 + |c_2^{(\nu)}|^2 + \ldots + |c_{n_\nu}^{(\nu)}|} < \infty.$$

---

*) Это свойство можно принять за определение кольца $\Re(Q; G)$; тогда кольцо $\Re(Q; G)$ приобретет смысл для любого однородного пространства Q (как бикомпактного, так и небикомпактного).

Это вытекает из того, что если матрица C состоит из одной строчки

$$C = \| c_1 \, c_2 \, \ldots \, c_n \|,$$

то

$$\| C \|_l = \sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2 + \ldots + |c_n|^2}.$$

Заметим, что теорему 11 следует рассматривать как естественное обобщение известной теоремы Винера [34] об абсолютно сходящихся рядах тригонометрических функций, в которую она переходит, когда Q — окружность, а G — группа ее вращений.

Если Q — двухмерная сфера, а G — группа ее вращений, то теорема 11 дает аналитическую полноту кольца функций $f(\theta, \varphi)$ на сфере (θ — дополнение до широты, а φ — долгота), разлагающихся в ряды

$$f(\theta, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ a_0^{(n)} P_n(\cos\theta) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \sqrt{2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \left[a_m^{(n)} P_n^{(m)}(\cos\theta) \cos m\varphi + b_m^{(n)} P_n^{(m)}(\cos\theta) \sin m\varphi \right] \Bigg\},$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_0^{(n)}|^2 + |a_1^{(n)}|^2 + |b_1^{(n)}|^2 + \ldots + |a_n^{(n)}|^2 + |b_n^{(n)}|^2} < \infty.$$

Случай, когда Q — n-мерная сфера, где $n > 2$, приведет нас к соответствующему предложению для полиномов Якоби.

5. Прием, с помощью которого мы получили из полного (по норме и аналитически) кольца $\mathfrak{R}(G)$ кольцо $\mathfrak{R}(Q, G)$ с теми же свойствами полноты, легко может быть обобщен.

Как мы знаем, если $\varphi(s) \in \mathfrak{R}(G)$, то и $\varphi(ksl) \in \mathfrak{R}(G)$ при любых $k, l \in G$.

Кроме того, в силу свойства II) матричной l-нормы

$$\|\varphi(ksl)\| = \|\varphi(s)\| \qquad (k, l \in G).$$

Функцию $\varphi(ksl)$ можно рассматривать так же, как вектор-функцию точки $(k, l) \in G \times G$ со значениями на поверхности некоторой сферы из $\mathfrak{R}(G)$.

Легко доказать, что эта вектор-функция непрерывна на $G \times G$ как вектор функция от k и l. Поэтому, если K и L — две замкнутые подгруппы группы G, то также и функция

$$\psi(s) = \int_K \int_L \varphi(ksl) \, dk \, dl \qquad \in \mathfrak{R}(G)$$

и

$$\|\psi\| \leqslant \|\varphi\|.$$

Отображение $\varphi \to \psi$ преобразует $\mathfrak{R}(G)$ в свое подкольцо, состоящее из всех функций, принимающих постоянное значение на каждом из классов смежности по двойному модулю KsL $(s \in G)$, причем это подкольцо будет полным по норме и аналитическим. Если обозначить через T множество всех различных классов смежности KsL, введя на нем естественным образом топологию, мы сможем рассматривать функции ψ, как непрерывные функции на T.

Таким образом, мы придем к некоторому полному по норме и аналитически кольцу $R(T)$ непрерывных функций на T.

Для непрерывных функций $\psi(t)$ на T естественным образом вводится понятие интеграла $\int_T \psi(t)\,dt$; он определяется как равный интегралу по G от функции $\varphi(s)$ $(s \in G)$, порождаемой естественным образом функцией классов смежности $\psi(t)$. Функции кольца $R(T)$ будут разлагаться в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды по элементарным ортогональным функциям некоторого набора, который получается следующим образом.

При отображении $\varphi \to \psi$ каждый элемент $u_{jk}^{(\nu)}(s)$ неприводимого унитарного представления $U_\nu(s)$ переходит в некоторую функцию $\chi_{jk}^{(\nu)}(t)$ $(t \in T)$. Из этих функций выбираются линейно независимые, они ортогонализуются, а затем все эти ортогональные группы, порожденные различными неэквивалентными представлениями, собираются в один набор.

Именно таким образом было получено кольцо $\mathfrak{R}(Q; G)$, из кольца $\mathfrak{R}(G)$. В этом случае, K состояла из единицы группы, а L совпадала со стационарной подгруппой H группы G.

К другому интересному кольцу мы придем, если положить $K=L=H$, где H — попрежнему стационарная подгруппа группы G в точке $O \in Q$.

В этом случае мы приходим к подкольцу $\mathfrak{R}^{(\mathfrak{z})}$ всех функций $\psi \in \mathfrak{R}(G)$, постоянных на классах смежности вида HsH $(s \in G)$.

В частности, они постоянные на классах смежности sH, а следовательно, их можно рассматривать как некоторые функции на Q. Но для того, чтобы непрерывная функция $f(q)$ $(q \in Q)$ порождалась некоторой непрерывной функцией $\varphi(s)$ $(s \in H)$, постоянной на всех классах HsH, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(sq) = f(q) \quad \text{при } s \in H. \tag{7.18}$$

Поэтому в данном случае пространством T будет топологическое пространство всех „круговых траекторий“ sq $(s \in H)$ с „центром“ в точке O различных точек $q \in Q$, а кольцо $\mathfrak{R}^{(\mathfrak{z})}$ — некоторым кольцом непрерывных функций на T.

Нам удобнее будет рассматривать $\mathfrak{R}^{(\mathfrak{z})}$, как кольцо всех непрерывных функций $f(q) \in \mathfrak{R}(Q; G)$ на Q, удовлетворяющих условию инвариантности (7.18).

Это кольцо можно охарактеризовать еще следующим образом.

Очевидно, что, если некоторое непрерывное ядро $\Phi(p, q)$ $(p, q \in Q)$ инвариантно, то функция

$$f(q) = \Phi(O, q) \qquad (q \in Q) \tag{7.19}$$

будет удовлетворять условию (7.18).

Легко видеть, что так может быть получена любая непрерывная функция $f(q)$, удовлетворяющая условию (7.18).

В самом деле, пусть $p, q \in Q$, а $s \in G$ — какое-либо преобразование, переводящее O в $p : sO = p$. Положим

$$\Phi(p, q) = f(s^{-1} q).$$

В силу (7.18) это определение $\Phi(p, q)$ не будет зависеть от выбора $s \in G$, переводящего p в O. При $p=0$ будем иметь (7.19).

Отметим следующее свойство одно-однозначного соответствия: $f \longleftrightarrow \Phi$.

а) Если $f(sO) \in \mathfrak{P}(G)$, то $\Phi(p, q) \in \mathfrak{P}_{QG}$ и наоборот.

Действительно, если $q_j \in Q$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, то, подбирая $s_j \in G$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы s_j переводило O в q_j, будем иметь, согласно, (7.19):

$$\Phi(q_j, q_k) = f(s_j^{-1} q_k) = f(s^{-1} s_k O) \qquad (j, k=1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$\sum_{j, k=1}^{n} \Phi(q_j, q_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k = \sum_{j, k=1}^{n} f(s^{-1} s_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0.$$

Аналогично доказывается и обратное утверждение, что если $\Phi \in \mathfrak{P}_{QG}$, то $f(sO) \in \mathfrak{P}(G)$.

Из а) явствует, что соответствие $f \longleftrightarrow \Phi$ является алгебраическим изоморфизмом между $\mathfrak{R}^{(\mathfrak{z})}$ и $\mathfrak{R}_{QG}$; нетрудно также убедиться в изометричности этого соответствия для эрмитовых f, Φ.

Из аналитической полноты кольца $\mathfrak{R}^{(\mathfrak{z})}$ вытекает аналитическая полнота кольца $\mathfrak{R}_{QG}$. Но этот факт, подобно теореме 12, является также непосредственным следствием теорем 3 и 9.

Заметим, что в нашем случае бикомпактных G и Q кольцо $\mathfrak{R}_{QG}$ (см. [9e]) совпадает с множеством ядер $\Phi(p, q)$ $(p, q \in Q)$, представимых в виде

$$\Phi(p, q) = \sum_{\mu \in M} c_\mu Z_\mu(p, q), \tag{7.20}$$

где $\{Z_\mu\}_{\mu \in M}$ — полная совокупность всех зональных ядер на Q, а комплексные числа c_μ $(\mu \in M)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{\mu \in M} |c_\mu| < \infty. \tag{7.21}$$

Представление (7.10), вообще говоря, неоднозначно. Однако для эрмитова ядра $\Phi \in \mathfrak{R}_{QG}$ существует одно и только одно представление

(7.20), для которого сумма (7,21) достигает минимума, причем этот минимум в точности равен $\|\Phi\|$.

Это позволяет определить $\|\Phi\|$ для любого элемента $\Phi \in \Re_{QG}$ равенством

$$\|\Phi\| = \min \sum_{\mu \in M} |c_\mu|, \tag{7.22}$$

где минимум берется по всем возможным представлениям (7.20).

В случае симметрического пространства различные зональные ядра $Z_\mu(p, q)$ порождают различные унитарные представления. В этом случае разложение (7,20) единственно.

Заметим еще, что тот факт, что ряды (7,20), удовлетворяющие условию (7.21), образуют кольцо, полное при определении нормы (7.22), легко непосредственно усмотреть из того, что Z_μ можно рассматривать как единицы некоторой алгебры, обладающие свойством

$$Z_\mu(p, q) Z_\nu(p, q) = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu\nu} Z_\lambda \qquad (\mu, \nu \in M),$$

где справа стоит конечная сумма, а числа $c^\lambda_{\mu\nu}$ все неотрицательны и удовлетворяют условию

$$\sum_\lambda c^\lambda_{\mu\nu} = 1.$$

6. Рассуждениями, аналогичными проведенным в предыдущем пункте, можно построить полные по норме и аналитически кольца винеровского типа и из функций $f(s)$, постоянных на классах сопряженных элементов группы.

Пусть $\chi_\nu(s)$ — характер неприводимого представления $U_\nu(s)$ $(\nu \in N)$, т. е.

$$\chi_\nu(s) = S(U_\nu(s)).$$

Рассмотрим совокупность всех функций $f(s)$ $(s \in G)$, представимых в виде

$$f(s) = \sum_{\nu \in M} c_\nu \chi_\nu(s),$$

где

$$\sum_{\nu \in N} n_\nu |c_\nu| < \infty. \tag{7.23}$$

Тогда можно утверждать, что они образуют кольцо и притом полное по норме и аналитически.

Это кольцо, очевидно, является подкольцом кольца $\Re(G)$ и норма всякого его элемента, как элемента из $\Re(G)$, будет совпадать с суммой, стоящей в (7.23).

В § 10 в связи с доказательством некоторого принципа двойственности будет получено прямое доказательство аналитической полноты кольца $\Re(G)$. Тем же методом можно исследовать и другие кольца.

Заметим, что в последнее время в работах Ю. М. Березанского и С. Г. Крейна [3а, б; 2] наметился другой подход к исследованию колец рассмотренного типа, а именно с позиций теории континуальных алгебр. Этот подход, однако, ждет своей дальнейшей разработки.

7. Заканчивая этот параграф, заметим, что лемма § 2 позволяет установить следующую теорему:

Теорема 14. *Для того чтобы некоторая функция $f(s)$ $(s \in G)$ принадлежала $\mathfrak{R}(G)$, достаточно, чтобы она локально принадлежала $\mathfrak{R}(G)$.*

Доказательство. В силу упомянутой леммы, теорема будет доказана, если кольцо $\mathfrak{R}(G)$ будет обладать тремя свойствами, указанными в этой лемме. Первыми двумя оно, очевидно, обладает. Остается установить свойство третье, т. е. что для каждой точки $s_0 \in G$ и ее окрестности V_0 найдется функция $\varphi \in \mathfrak{R}(G)$ такая, что

$$\varphi(s_0) \neq 0, \quad \varphi(s) = 0 \quad \text{при } s \mathrel{\overline{\in}} V_0. \tag{7.24}$$

Для этого рассмотрим окрестность $V_1 = s_0^{-1} V_0$ единицы группы и для нее выберем окрестность единицы W такую, что $WW^{-1} \subset V_1$. Пусть $\psi(s)$ — какая-либо неотрицательная непрерывная функция на G, удовлетворяющая условиям

$$\psi(1) > 0, \quad \psi(s) = 0 \quad \text{при } s \mathrel{\overline{\in}} W.$$

Положим

$$\varphi_1(s) = \int_G \psi(t^{-1}s)\,\psi(t)\,dt.$$

Очевидно, $\varphi_1(s) \in \mathfrak{P}(G) \subset \mathfrak{R}(G)$

$$\varphi_1(1) > 0, \quad \varphi_1(s) = 0 \quad \text{при } s \mathrel{\overline{\in}} V_1.$$

Но тогда функция $\varphi(s) = \varphi_1(s_0 s) \in \mathfrak{R}(G)$ будет удовлетворять условию (7.24).

Теорема доказана.

Из теоремы легко получаются аналогичные теоремы для колец, рассмотренных в предыдущих пунктах, например, для колец $\mathfrak{R}(Q; G)$ и $\mathfrak{R}_{Qa}$.

§ 8. ТЕОРЕМА ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ НА АЛГЕБРЕ Q-ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

1. *Q-гармоническим полиномом* на однородном бикомпакте Q назовем всякую непрерывную функцию $h(q)$, для которой все функции $h(sq)$ $(s \in G)$ принадлежат одному и тому же линейному конечномерному семейству функций.

Иначе Q-гармонический полином можно определить, как линейную комбинацию из элементов конечного числа матриц $\Omega_\nu(q)$ $(\nu \in N)$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ совокупность всех Q-гармонических полиномов. Определяя в $\mathfrak{A}$ умножение элементов как обычное умножение функций, мы можем рассматривать $\mathfrak{A}$ как некоторую алгебру с единицей над полем комплексных чисел.

Эта алгебра обладает свойством:

Если $h(q) \in \mathfrak{A}$, то и $\overline{h(q)} \in \mathfrak{A}$.

Линейный функционал $F(h)$, определенный на всех элементах алгебры $\mathfrak{A}$, назовем алгебраически положительным, если для любого $h \in \mathfrak{A} : F(|h|^2) \geqslant 0$.

Линейный функционал $F(h)$ $(h \in \mathfrak{A})$ назовем скалярно положительным, если $F(h) \geqslant 0$ для всякого неотрицательного $h(q)$.

Очевидно, скалярная положительность функционала влечет его алгебраическую положительность.

Этот факт, оказывается, допускает обращение.

Теорема 14. *Всякий алгебраически положительный функционал на $\mathfrak{A}$ скалярно положителен.*

Доказательство. Если

$$H(q) = \| h_{jk}(q) \| \qquad (h_{jk} \in \mathfrak{A};\ j=1, 2, \ldots, n;\quad k=1, 2, \ldots, m),$$

то через $F(H)$ обозначим числовую матрицу

$$F(H) = \| F(h_{jk}) \| \qquad (j=1, 2, \ldots, m;\quad k=1, 2, \ldots, n).$$

Тогда для всякого Q-гармонического полинома

$$h(q) = \sum_{k=1}^{m} S(C_{\nu_k} \Omega_{\nu_k}(q))$$

будем иметь

$$F(h) = \sum_{k=1}^{m} S(C_{\nu_k} F(\Omega_{\nu_k})).$$

Так как матрицы $\Omega_\nu \in \mathfrak{M}_{n_\nu m_\nu}$ удовлетворяют соотношению

$$\Omega_\nu^*(q)\, \Omega_\nu(q) = I_{m_\nu},$$

то

$$F(\Omega_\nu^* \Omega_\nu) = F(1)\, I_{m_\nu}.$$

Пусть теперь x и y — два произвольных вектора соответственно из m_ν- и n_ν-мерных унитарных пространств E_{m_ν} и E_{n_ν}

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m_\nu}), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n_\nu}).$$

Составляя скалярный квадрат вектора

$$\lambda \Omega_\nu(q)\, x + y \in E_n,$$

получим

$$(\lambda \Omega_\nu(q)\, x + y,\ \lambda \Omega_\nu(q)\, x + y) = |\lambda|^2 (x, x) +$$
$$+ \lambda (\Omega_\nu(q)\, x, y) + \bar{\lambda} (\overline{\Omega(q)\, x, y}) + (y, y) \geqslant 0.$$

Так как левая часть этого неравенства есть гармонический многочлен, то можно будет к ней применить функционал F. В результате получим

$$F(1) |\lambda|^2 (x, x) + 2\mathrm{Re}\{\lambda (F(\Omega_\nu)\, x, y)\} + (y, y)\, F(1) \geqslant 0.$$

Здесь λ — произвольное комплексное число, и поэтому

$$|(F(\Omega_\nu)x, y)|^2 \leqslant F^2(1)(x, x)(y, y).$$

Полагая $y = F(\Omega_\nu)x$, найдем, что

$$\|F(\Omega_\nu)x\| \leqslant F(1)\|x\|,$$

то есть c-норма матрицы $F(\Omega_\nu)$ не превосходит $F(1)$.

Тогда по определению l-нормы

$$|S(C_\nu F(\Omega_\nu))| \leqslant \|C_\nu\|_l \|F(\Omega_\nu)\|_c \leqslant F(1)\|C_\nu\|_l. \tag{8.1}$$

Это неравенство позволяет расширить функционал F на все кольцо $R = \Re(Q, G)$ следующим образом. Для

$$f(s) = \sum_{\nu \in N} S(C_\nu \Omega_\nu(q)),$$

где

$$\|f\| = \sum_{\nu \in N} \|C_\nu\|_l < \infty,$$

полагаем

$$F(f) = \sum_{\nu \in N} S(C_\nu F(\Omega_\nu)).$$

Из (8.1) заключаем, что

$$|F(f)| \leqslant F(1)\|f\|,$$

и следовательно, F — непрерывный функционал на $\Re(Q; G)$.

Покажем, что и в кольце R функционал $F(f)$ алгебраически положителен, то есть

$$F(|f|^2) \geqslant 0 \quad \text{при } f \in R.$$

Если $f \in R$, то найдется последовательность $\{h_n\} \subset \mathfrak{A}$ такая, что

$$\|f - h_n\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

а так как $\|\varphi\| = \|\overline{\varphi}\|$ $(\varphi \in R)$, то также

$$\|\overline{f} - \overline{h}_n\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Но если по норме кольца R: $h_n \to f$ и $\overline{h}_n \to \overline{f}$, то также $h_n\overline{h}_n \to f\overline{f}$, и, следовательно,

$$F(|f|^2) = \lim_{n \to \infty} F(|h_n|^2) \geqslant 0.$$

Пусть теперь $\varphi \in R$ и $\varphi(q) \geqslant 0$ $(q \in Q)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в силу аналитической полноты кольца R

$$f(q) = \sqrt{\varepsilon + \varphi(q)} \in R,$$

а тогда

$$\varepsilon F(1) + F(\varphi) = F(|f|^2) \geqslant 0.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем: $F(\varphi) \geqslant 0$. Таким образом функционал $F(\varphi)$ алгебраически положителен в R, а следовательно, и в $\mathfrak{A}$.

Теорема доказана.

Метод доказательства теоремы является развитием одного приема А. П. Артеменко [1], примененного им в более частном вопросе.

Для случая, когда $Q = G$, эта теорема тем же методом была доказана нами ранее [9з]. Впоследствии С. Бохнер [21в] предложил для этого случая другое, более простое доказательство теоремы, не использующее свойств специальных колец; его методом теорема может быть доказана и в общем случае $Q \neq G$.

Однако именно рассмотрения, связанные с кольцом $\mathfrak{R}(G)$, позволили обнаружить и установить принцип двойственности, о котором будет итти речь в § 10.

3. Так как алгебра $\mathfrak{A}$ содержит единицу, то скалярно положительный функционал $F(\varphi)$ в $\mathfrak{A}$ можно продолжить до положительного функционала на всем $C(Q)$.

С другой стороны, по известной теореме Ф. Рисса положительный функционал $F(\varphi)$ на $C(Q)$ может быть представлен в виде

$$F(\varphi) = \int\limits_Q \varphi(q)\, d\sigma(q),$$

где $\sigma(\mathcal{E})$ — некоторая неотрицательная мера (вполне аддитивная функция на теле борелевских множеств из Q).

Пусть $\{\omega_\nu\}_{\nu \in N}$ — полная совокупность элементарных гармонических функций на Q.

Мы получили решение следующей проблемы моментов.

Пусть $\{\gamma_\nu\}_{\nu \in N}$ — „последовательность" некоторых чисел. Спрашивается, когда существует неотрицательная мера $\sigma(\mathcal{E})$ на Q такая, что

$$\gamma_\nu = \int\limits_Q \omega_\nu(q)\, d\sigma(q).$$

Ответ гласит, что такая мера существует в том и только том случае, когда линейный функционал F, определенный на алгебре $\mathfrak{A}$ равенствами

$$F(\omega_\nu) = \gamma_\nu \qquad (\nu \in N)$$

алгебраически положителен.

Для случая, когда Q — окружность, а G — группа ее вращений, это предложение переходит в известную теорему Рисса-Херглотца.

Теорема 15 легко переносится также на случай ряда других алгебр, соответствующих аналитически полным кольцам функций, например, на алгебру зональных функций (см. п. 5 § 7).

§ 9. ХАРАКТЕРИСТИКА ОДНОРОДНОГО БИКОМПАКТА АЛГЕБРОЙ ЕГО ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

1. Линейный аддитивный и однородный функционал $\mathfrak{q} \neq 0$, определенный на алгебре $\mathfrak{A}$ гармонических полиномов на Q, назовем **элементарным**, если для любых $h, g \in \mathfrak{A}$

$$\mathfrak{q}(\overline{h}) = \overline{\mathfrak{q}(h)} \quad \text{и} \quad \mathfrak{q}(hg) = \mathfrak{q}(h)\,\mathfrak{q}(g). \tag{9.1}$$

Множество всех элементарных функционалов обозначим через $\mathfrak{Q}$.

Множество $\mathfrak{Q}$ можно топологизировать, понимая под окрестностью $\mathfrak{q}_0 \in \mathfrak{Q}$ всякую совокупность всех $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}$ таких, что

$$|\mathfrak{q}_0(h_k) - \mathfrak{q}(h_k)| < \varepsilon \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{9.1'}$$

где ε — произвольно выбранное положительное число, а $h_1, h_2, \ldots, h_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ произвольно выбранный набор гармонических полиномов.

С помощью известной теоремы А. Н. Тихонова о топологическом произведении отрезков (бикомпактов) легко показывается, что при такой топологизации $\mathfrak{Q}$ обращается в бикомпакт. Оказывается:

1°. *Между бикомпактами Q и $\mathfrak{Q}$ можно установить гомеоморфизм $q \longleftrightarrow \mathfrak{Q}$, в силу которого*

$$\mathfrak{q}(h) = h(q) \quad \text{для любого} \quad h \in \mathfrak{A}. \tag{9.2}$$

В самом деле, произвольно выбранному $q \in Q$ отвечает функционал $\mathfrak{q}$ на $\mathfrak{A}$, определяемый равенством (9.2). Этот функционал, очевидно, принадлежит $\mathfrak{Q}$ и соответствие $q \to \mathfrak{q}$ есть непрерывное отображение Q в $\mathfrak{Q}$. Остается показать, что это соответствие отображает Q *на все* $\mathfrak{Q}$. Для этого заметим, что всякий элементарный функционал $\mathfrak{q}$ алгебраически положителен, а следовательно, по теореме 14, скалярно положителен. Стало быть, он непрерывен в равномерной норме и его можно расширить на все кольцо $C(Q)$ всех непрерывных функций на Q, плотной частью которого является алгебра функций $\mathfrak{A}$. При этом он, очевидно, сохранит свои свойства (9.1) и на $C(Q)$. Но как известно (см. п. 2 § 2), свойство мультипликативности влечет существование точки $q \in Q$ такой, что $\mathfrak{q}(\varphi) = \varphi(q)$ для любой функции $\varphi \in C(Q)$.

Предложение доказано.

2. Линейное взаимнооднозначное отображение $\mathfrak{A}$ на самое себя будем называть **автоморфизмом** алгебры $\mathfrak{A}$, если для любых $g, h \in \mathfrak{A}$

$$A\overline{h} = \overline{Ah} \quad \text{и} \quad A(gh) = Ag \cdot Ah.$$

Множество всех автоморфизмов A алгебры $\mathfrak{A}$ образует некоторую группу, которую мы обозначим через $\mathfrak{G}$.

2°. *Всякому автоморфизму A алгебры $\mathfrak{A}$ отвечает однозначно некоторый гомеоморфизм τ бикомпакта Q такой, что для любого $h \in \mathfrak{A}$*

$$Ah(q) = h(\tau^{-1} q) \qquad (q \in Q). \tag{9.3}$$

В самом деле, всякому функционалу $\mathfrak{q}$ на $\mathfrak{A}$ отвечает функционал $\mathfrak{q}_1$ такой, что

$$\mathfrak{q}_1(h) = \mathfrak{q}(Ah) \qquad (h \in \mathfrak{A}).$$

Ясно, что если $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}$, то и $\mathfrak{q}_1 \in \mathfrak{Q}$.

Условимся писать $\mathfrak{q}_1 = A'\mathfrak{q}$. Отображение $A'(\mathfrak{q} \to A'\mathfrak{q})$ есть одно-однозначное отображение $\mathfrak{Q}$ на самое себя, ибо если $B = A^{-1}$, то B' есть обратное для A' отображение всего $\mathfrak{Q}$ в себя.

Пусть теперь $\mathfrak{q}_1$ — произвольная точка из $\mathfrak{Q}$ и пусть $\mathfrak{U}(\mathfrak{q}_0)$ — некоторая окрестность точки $\mathfrak{q}_0 = A'\mathfrak{q}_1 \in \mathfrak{Q}$, определяемая неравенствами (9.1′).

Тогда окрестность $\mathfrak{Y}(\mathfrak{q}_1)$ точки $\mathfrak{q}_1$, определяемая неравенствами

$$|\mathfrak{q}_1(A^{-1}h_k) - \mathfrak{q}(A^{-1}h_k)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

будет полным прообразом окрестности $\mathfrak{U}(q_0)$ для отображения A'.

Таким образом, отображение A' непрерывно.

В силу гомеоморфизма бикомпактов $\mathfrak{Q}$ и Q отображение A' индуцирует на Q некоторое отображение (гомеоморфизм), и если гомеоморфизм, обратный этому гомеоморфизму, обозначить через τ, то он и даст (9.3).

Предложение доказано.

Гомеоморфизм τ бикомпакта Q на себя назовем **регулярным**, если из $h(q) \in \mathfrak{A}$ вытекает $h(\tau q) \in \mathfrak{A}$ и $h(\tau^{-1}q) \in \mathfrak{A}$ *).

Согласно предложению 2° совокупность всех регулярных гомеоморфизмов образует некоторую абстрактную группу G_r, изоморфную группе автоморфизмов $\mathfrak{G}$ и содержащую абстрактную группу G в качестве своей подгруппы.

3. Линейное конечномерное семейство L непрерывных функций на Q называется **G-инвариантным**, если из $\varphi(q) \in L$ вытекает $\varphi(sq) \in L$ при всяком L.

Автоморфизм A алгебры $\mathfrak{A}$ будем называть **простым**, если он отображает всякое инвариантное семейство L **в себя**.

Известно, что всякое инвариантное семейство L может быть разложено в прямую сумму конечного числа, а вся алгебра $\mathfrak{A}$ — в прямую сумму бесконечного числа неприводимых инвариантных семейств.

Отсюда следует, что всякий простой автоморфизм A отображает любое инвариантное семейство **на себя**.

Поэтому простые автоморфизмы образуют некоторую подгруппу $\mathfrak{G}_0$ всей группы $\mathfrak{G}$.

Этой подгруппе соответствует в G_r некоторая подгруппа $\tilde{G}$ всех простых гомеоморфизмов бикомпакта Q. Ее мы будем называть **оболочкой** группы G.

---

*) Возможно, что второе условие является следствием первого.

Имеет место следующее предложение:

3°. Инвариантный по отношению к группе G интеграл на Q инвариантен также по отношению к группе $\tilde{G}$, т. е. для любой функции $\varphi \in C(Q)$

$$\int_Q \varphi(\tau q)\, dq = \int_Q \varphi(q)\, dq \qquad (\tau \in \tilde{G}). \tag{9.4}$$

Очевидно, достаточно доказать это равенство для функций $h \in \mathfrak{A}$, т. е. функций вида

$$h(q) = c_0 + \sum S(C_\nu \Omega_\nu(q)),$$

где сумма распространяется на конечное число слагаемых, в которых уже фигурируют матрицы $\Omega_\nu(q)$, отличные от матрицы $\|1\|$.

Так как элементы различных матриц Ω_ν ортогональны друг к другу и, в частности, элементы матриц $\Omega_\nu \neq \|1\|$ ортогональны к единице, то

$$\int_Q h(q)\, dq = c .$$

С другой стороны, если $\tau \in \tilde{G}$, то автоморфизм $h(q) \to h(\tau q)$ преобразует линейную оболочку элементов любой колонны матрицы $\Omega_\nu(q)$ в самое себя (так как она G-инвариантна), и, следовательно, он преобразует всякую функцию $\psi(q) = S'(C\Omega)$ в некоторую функцию $\psi(\tau q) = S(C\Omega)$ (с той же матрицей Ω).

С другой стороны, единица при этом автоморфизме переходит в себя. Таким образом

$$h(\tau q) = c_0 + \sum S(C'_\nu \Omega_\nu).$$

Откуда

$$\int_Q h(\tau q)\, dq = c_0.$$

Заметим, что предложение 3° может быть легко обобщено и на случай группы G_r всех регулярных гомеоморфизмов, если только топология, заданная на G, допускает такое расширение на G_r, при котором G_r становится бикомпактной группой непрерывных преобразований Q Но всегда ли это возможно?

4. Пусть

$$\Omega(q = \|\omega_{ij}(q)\| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m; \quad m < n)$$

одна из матриц полного набора $\{\Omega_\nu(q)\}$ $(\nu \in N)$.

Тогда

$$\int_Q \omega_{ik}(q)\, \omega_{jl}(q)\, dq = \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad k, l = 1, 2, \ldots, m). \tag{9.5}$$

С помощью произвольной системы комплексных чисел $c_1, \ldots, c_m$ таких, что

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + \ldots + |c_m|^2 = n,$$

составим функции

$$\omega_i(q) = \sum_{k=1}^{m} \omega_{ik}(q) c_k \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

В силу (9.5) они будут образовывать ортонормированную систему. Следовательно, при любом $\tau \in G$ система функций $\omega_i(\tau q)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ также будет ортонормированной.

Так как, кроме того, согласно (7.11), функции $\omega_1(q), \ldots, \omega_n(q)$ образуют базис некоторой G-инвариантной системы, то будем иметь

$$\omega\,(\tau q = \sum_{k=1}^{n} u_{in}(\tau)\,\omega_k(q) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где

$$U(\tau) = \| u_{ik}(\tau) \|$$

некоторая унитарная матрица, однозначно определяемая $\tau \in \tilde{G}$.

Так как любой системе комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ должна отвечать такая унитарная матрица, то легко показать, что она вовсе не зависит от выбора этих чисел.

Мы можем сформулировать следующее предложение:

4° Всякой элементарной гармонической матрице $\Omega_\nu(q)$ $(\nu \in N)$ отвечает некоторое неприводимое унитарное представление $U_\nu(\tau)$ группы $\tilde{G}$, такое, что

$$\Omega_\nu(\tau q) = U_\nu(\tau)\,\Omega_\nu(q) \qquad (q \in Q, \;\; \tau \in \tilde{G}). \tag{9.6}$$

Система всех представлений $U_\nu(\tau)$ $(\nu \in N)$ группы $\tilde{G}$ является достаточной.

Представление $U_\nu(\tau)$ неприводимо, так как при „сжатии" группы $\tilde{G}$ до G оно является таковым.

Последняя часть утверждения вытекает из того, что если для $\tau_1, \tau_2 \in G$ и $U_\nu(\tau_1) = U_\nu(\tau)$ при всех $\nu \in N$, то согласно (9.6) $\Omega_\nu(\tau_1 q) = \Omega_\nu(\tau_2 q)$ при всех $\nu \in N$.

А так как линейными комбинациями элементов матриц Ω_ν можно с любой точностью равномерно приблизить любую непрерывную на Q функцию, то отсюда вытекает, что $\tau_1 q = \tau_2 q$ $(q \in Q)$, то есть $\tau_1 = \tau_2$.

5. До сих пор мы рассматривали группу $\tilde{G}$ как абстрактную группу. Покажем как ее топологизировать.

Назовем окрестностью элемента $\tau_0 \in \tilde{G}$ всякую совокупность элементов $\tau \in G$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\| U_{\nu_k}(\tau) - U_{\nu_k}(\tau_0) \| < \varepsilon \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

где ε — произвольное положительное число, а $U_{\nu_k}(\tau)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ —

произвольно выбранные в любом числе представления из набора $\{U_\nu\}_{\nu \in N}$.

На основании упоминавшейся уже теоремы А. Н. Тихонова, нетрудно показать, что при таком определении топологии на $\tilde{G}$ эта группа обращается в топологическую группу (см. у Л. С. Понтрягина [15], гл. 7) и, более того:

5°. Оболочка $\tilde{G}$ группы G, подобно самой группе G, есть бикомпактная группа гомеоморфизмов бикомпакта Q, содержащая G в качестве своей топологической подгруппы.

6. Пусть Q и Q' — два бикомпакта, на которых заданы некоторые группы гомеоморфизмов G и G'.

Придерживаясь обычной терминологии, будем говорить, что группы G и G' подобны, если существует гомеоморфное отображение T бикомпакта Q' на Q, в силу которого $G' = T^{-1}GT$.

Пусть теперь Q и Q' — два однородных бикомпакта с алгебрами гармонических полиномов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, между которыми установлен некоторый изоморфизм.

Этот изоморфизм будем называть вещественным, если в силу него каждой паре комплексно сопряженных полиномов одной алгебры соответствует пара комплексно сопряженных полиномов другой алгебры.

Вещественный изоморфизм будем называть простым, если в силу его любому инвариантному семейству одной алгебры соответствует инвариантное семейство другой алгебры.

Из всего изложенного нетрудно сделать следующее заключение:

Теорема 15. *Пусть Q и Q' — два однородных бикомпакта с группами гомеоморфизмов G и G', между алгебрами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ гармонических полиномов которых установлен некоторый изоморфизм T.*

Если T — вещественный изоморфизм, то бикомпакты гомеоморфны.

Если же, кроме того, T — простой изоморфизм, то оболочки групп G и G' подобны.

Доказательство. Если изоморфизм T между алгебрами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ вещественен, то естественным образом между бикомпактами $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}'$ элементарных функционалов на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ устанавливается одно-однозначное соответствие, при этом по определению топологии на $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}'$ это соответствие будет топологическим.

Так как согласно предложению 1° бикомпакты $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}'$ гомеоморфны бикомпактам Q и Q', то первая часть теоремы доказана.

Изоморфизм T алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ естественным образом порождает изоморфизм групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$ автоморфизмов этих алгебр, при этом, если T — простой изоморфизм, то будут изоморфны и их подгруппы $\mathfrak{G}_0$ и $\mathfrak{G}_0'$ простых автоморфизмов.

Так как группы $\mathfrak{G}_0$ и $\mathfrak{G}_0'$ соответственно изоморфны оболочкам $\tilde{G}$ и $\tilde{G}'$, то последние также изоморфны.

Если проследить, как устанавливается гомеоморфизм бикомпактов Q и Q' и изоморфизм между $\tilde{G}$ и $\tilde{G}'$, то мы обнаружим, что этот изоморфизм есть изоморфизм подобия.

7. Заканчивая параграф, приведем еще одну характеристику оболочки $\tilde{G}$.

Пусть $F(p, q)$ — некоторое непрерывное G-инвариантное ядро ($F(sp, sq) = F(p, q)$ при всех $s \in G$).

Легко показывается, что всякое такое ядро может быть равномерно с любой точностью приближено конечными суммами Φ вида

$$\Phi(p, q) = \sum S(C_\nu \Omega_\nu^*(q) \Omega_\nu(p)),$$

а для такой суммы, в силу предложения 4°

$$\Phi(\tau p, \tau q) = \Phi(p, q) \qquad (p, q \in Q, \ \tau \in G).$$

Откуда также

$$F(\tau p, \tau q) = F(p, q) \qquad (p, q \in Q, \ \tau \in \tilde{G}). \tag{9.7}$$

Предоставляем читателю доказать, что свойство (9.7) является характеристическим для $\tilde{G}$, то есть

7°. *Оболочка $\tilde{G}$ состоит из тех и только тех гомеоморфизмов σ бикомпакта Q, по отношению к которым инвариантно всякое G-инвариантное непрерывное ядро $F(p, q)$.*

Поясним еще понятие оболочки на двух примерах.

1) Пусть Q — единичная сфера n-мерного евклидова пространства E_n, а G — группа всех вращений (группа ортогональных преобразований с детерминантом равным 1).

Тогда оболочкой $\tilde{G}$ будет группа всех вращений-отражений сферы Q, т. е. группа всех ортогональных преобразований с детерминантом, равным ± 1.

2) Пусть Q — единичная сфера в n-мерном унитарном пространстве H_n, т. е. множество точек $p = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, задаваемых уравнением

$$|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2 = 1,$$

и пусть G — группа всех унимодулярных унитарных преобразований.

Тогда оболочкой $\tilde{G}$ будет группа всех унитарных преобразований с детерминантом *по модулю*, равным 1.

§ 10. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ *)

1. Пусть G — некоторая бикомпактная группа.

Если $U(s)$ и $V(s)$ два унитарные представления группы G, то и их кронекеровское произведение $U(s) \times V(s)$ будет таковым.

Именно по этой причине линейная оболочка элементов всех унитарных представлений $U(s)$ группы G образует некоторую алгебру $\mathfrak{A}(G)$, которая называется *представляющей алгеброй*.

*) В настоящем параграфе приводятся в более полном изложении результаты нашей недавней заметки в ДАН [9л]; одновременно здесь устраняется неточность, допущенная в формулировке условия 2° определения блок-алгебры, на которую любезно обратил наше внимание М. С. Бродский.

Постараемся выделить ряд характеристических свойств алгебры $\mathfrak{A}(G)$, которые позволили бы судить о том, когда абстрактно заданная алгебра изоморфна представляющей алгебре некоторой бикомпактной группы G.

Если $\mathfrak{A}$ — некоторая абстрактно заданная коммутативная алгебра, то отображение $a \to \bar{a}$ этой алгебры на себя называется инволюцией, если оно совпадает со своим обратным (из $b=\bar{a}$ вытекает $a=\bar{b}$), сохраняет групповые операции сложения и умножения и относит элементу λa ($a \in \mathfrak{A}$, λ — комплексное число) элемент $\bar{\lambda}\bar{a}$.

Так как вместе с $U(s)$ и $\overline{U(s)}$ является унитарным представлением G, то представляющая алгебра $\mathfrak{A}(G)$, вместе с функцией $\varphi(s)$, всегда содержит и функцию $\overline{\varphi(s)}$.

Таким образом в представляющей алгебре $\mathfrak{A}(G)$ всегда имеется инволюция — операция перехода к комплексно сопряженной функции.

Представление $U(s) \times V(s)$, составленное по двум неприводимым представлениям, вообще говоря, не является неприводимым.

Таким образом всякой такой паре представлений отвечает числовая унитарная матрица $\mathcal{E}$, и некоторые неприводимые унитарные представления $W_1(s), W_2(s), \ldots, W_p(s)$, такие, что

$$U \times V = \mathcal{E}^{-1}(W_1 \oplus W \oplus \ldots \oplus W_p)\,\mathcal{E}. \tag{10.1}$$

Символ $\oplus$ является знаком прямого суммирования для матриц, то есть

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_p = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & W_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots W_p \end{pmatrix}.$$

Обозначим характер представления $U(s)$ через $\chi_U(s)$. Из (10.1) следует, что

$$\chi_U(s)\chi_V(s) = \chi_{W_1}(s) + \chi_{W_2}(s) + \ldots + \chi_{W_p}(s).$$

Но, как известно, интеграл

$$\int_G \chi_U(s)\,\chi_V(s)\,ds$$

равен 1 или нулю, в зависимости от того, эквивалентно ли представление $V(s)$ представлению $\overline{U(s)}$ или нет, — а интеграл

$$\int_G \chi_W(s)\,ds$$

равен 1 или нулю, в зависимости от того, будет ли представление $W(s)$ тривиальным (первой степени и тождественно равным единице) или нет.

Таким образом в разложении (10.1) среди представлений $W_1, \ldots, W_p$ не содержится тривиального представления, если представление V не эквивалентно представлению $\overline{U}$, и содержится ровно один раз в случае эквивалентности V и $\overline{U}$.

Отмеченные обстоятельства вместе с другими общеизвестными свойствами полной системы $\{U_\nu(s)\}_{\nu \in N}$ неприводимых унитарных представлений группы G позволяют заключить, что представляющая алгебра по своей алгебраической структуре включается в схему квадратной блок-алгебры.

Коммутативную алгебру $\mathfrak{A}$ *) с единицей e и инволюцией $a \to \overline{a}$ мы предлагаем называть квадратной блок-алгеброй**), если она обладает базисом, который можно разбить на непересекающиеся совокупности U_ν („блоки") по n_ν^2 ($\nu \in N$) элементов (n_ν называется порядком блока U_ν), расположенных в виде квадратных матриц

$$U_\nu = \| u_{jk}^{(\nu)} \|_1^{n_\nu} \qquad (\nu \in N)$$

с соблюдением следующих пяти условий.

1°. В „блок-базис" $\mathfrak{U} = \{U_\nu\}_{\nu \in N}$ входит блок, состоящий из одного элемента e.

2°. Всякому блоку $U = \|u_{jk}\|_1^n \in \mathfrak{U}$ отвечает числовая матрица $\mathcal{E}_u$ порядка n такая, что

$$\mathcal{E}_u^{-1} \overline{U} \mathcal{E}_u \in \mathfrak{U},$$

где $\overline{U} = \|\overline{u_{jk}}\|_1^n$.

3°. Всяким двум блокам $U, V \in \mathfrak{U}$ порядков m и n соответствует числовая унитарная матрица $\mathcal{E}_{uv}$ порядка mn такая, что

$$U \times V = \mathcal{E}_{uv}^{-1} (W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_p) \mathcal{E}_{uv}, \tag{10.2}$$

где $W_k \in \mathfrak{U}$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$.

4°. В разложении (10.2) среди блоков $W_1, \ldots, W_p$ либо вовсе не содержится блок $\|e\|$, либо содержится точно один раз. Последний случай имеет место тогда и только тогда, если $V = \mathcal{E}_u \overline{U} \mathcal{E}_u^{-1}$, где $\mathcal{E}_u$ — некоторая числовая унитарная матрица.

5°. Для всякого блока $U = \|u_{jk}\|_1^n \in \mathfrak{U}$ выполняется соотношение

$$UU^* = \|\delta_{jk} e\|_1^n, \tag{10.3}$$

где $U^* = \|u_{jk}^*\|_1^n$ получается из $\overline{U}$ путем транспонирования ($u_{jk}^* = \overline{u_{jk}}$; $j, k = 1, 2, \ldots, n$).

---

*) С конечным или бесконечным базисом.

**) Эпитет „квадратный" мы приставляем, имея в виду в дальнейшем развить теорию более широкого класса блок-алгебр, которые мы будем называть „прямоугольными".

Заметим, что соотношениями (10.2) задается полностью правило перемножения элементов алгебры $\mathfrak{A}$.

Из разложения (10.2) для $V=\mathcal{E}_u^{-1}\overline{U}\mathcal{E}_u$ вытекает существование унитарной матрицы $\mathcal{E}_{uu}$ порядка n^2 (n — порядок U) такой, что

$$U\times\overline{U}=\mathcal{E}_{u\bar{u}}^{-1}(W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_p)\,\mathcal{E}_{u\bar{u}}, \tag{10.4}$$

при этом согласно 4° без ограничения общности можно считать, что именно $W_1=\|e\|$, а $W_2,\ldots,W_p$ отличны от $\|e\|$.

Обозначим через $\varepsilon_{ij,\,kl}$ элемент матрицы $\mathcal{E}_{u\bar{u}}$, стоящий на том месте, где у матрицы $U\times\overline{U}$ стоит элемент $u_{ik}\,\overline{u}_{jl}$ $(i,j,k,l=1,2,\ldots,n)$.

Из (10.4) вытекает, что в произведение $u_{ik}\,\overline{u}_{jl}$ единица e входит с коэфициентом $\overline{\varepsilon}_{11;\,ij}\,\varepsilon_{11;\,kl}$.

А так как в силу (10.3)

$$\sum_{k=1}^{n}u_{ik}\,\overline{u}_{jk}=\delta_{ij}\qquad(i,j=1,2,\ldots,n),$$

то

$$\overline{\varepsilon}_{11;\,ij}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{11;\,kk}=\delta_{ij}\qquad(i,j=1,2,\ldots,n). \tag{10.5}$$

Полагая здесь $j=i$ и суммируя по i от 1 до n, найдем, что

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{11;\,kk}=\sqrt{n}\,\alpha\quad |\alpha|=1.$$

Откуда, согласно (10.5),

$$\varepsilon_{11;\,ij}=\frac{1}{\sqrt{n}}\,\alpha\delta_{ij}\qquad(i,j=1,2,\ldots,n).$$

Так как замена матрицы $\mathcal{E}_{u\bar{u}}$ на матрицу $\alpha^{-1}\mathcal{E}_{u\bar{u}}$ не изменяет соотношения (10.4), то всегда можно считать, что матрица $\mathcal{E}_{u\bar{u}}$ так пронормирована, что

$$\varepsilon_{11;\,ij}=\frac{1}{\sqrt{n}}\,\delta_{ij}\qquad(i,j=1,2,\ldots,n). \tag{10.6}$$

Этим в дальнейшем мы воспользуемся.

Введем теперь понятие *представляющей группы* для блок-алгебры.

Так же, как и для алгебры гармонических полиномов (см. § 9 п. 1), для блок-алгебры можно ввести понятие *элементарного* функционала $g(a)$ $(a\in\mathfrak{A})$.

Элементарный функционал $g(a)$ $(a\in\mathfrak{A})$, таким образом, характеризуется тем, что он осуществляет гомоморфное отображение $a\to g(a)$ алгебры $\mathfrak{A}$ в поле комплексных чисел и при этом элементы, находящиеся в инволюции, отображаются в комплексно-сопряженные числа:

$$g(\overline{a})=\overline{g(a)}\qquad(a\in\mathfrak{A}) \tag{10.7}$$

Элементарный функционал $g(a)$ позволяет отнести каждому квадратному блоку $U=\|u_{ik}\|_1^n$ с элементами из $\mathfrak{A}$ числовую матрицу

$$g(U)=\|g(u_{ik})\|_1^n,$$

при этом блоки $U\in\mathfrak{A}$ перейдут в унитарные матрицы $g(U)$, которые будут удовлетворять тем же соотношениям (10.2), что и сами блоки.

Унитарность матрицы $g(U)$ для $U\in\mathfrak{A}$ следует из (10.7) и соотношения (10.3).

Очевидно, что и обратно, всякое отображение блоков $U\in\mathfrak{A}$ в унитарные матрицы (соответственно тех же порядков, что и блоки), удовлетворяющие тем же соотношениям (10.2), что и блоки, задает некоторый элементарный функционал g на $\mathfrak{A}$.

Поэтому элементарный функционал $g(a)$ $(a\in\mathfrak{A})$ иначе еще называется представлением алгебры $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $\mathcal{G}=\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ совокупность всех представлений алгебры $\mathfrak{A}$.

Аналогично тому, как это было сделано в § 9, п. 1, для множества $\mathfrak{Q}$ элементарных функционалов, на $\mathcal{G}$ можно ввести топологию, после которой $\mathcal{G}$ превратится в бикомпакт.

При этой топологии под окрестностью элемента $g_0\in\mathcal{G}$ понимается множество всех элементов $g\in\mathcal{G}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\|g(U_{\nu_k})-g_0(U_{\nu_k})\|_e<\varepsilon \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

при этом ε — произвольное положительное число, а U_{ν_k} $(k=1,2,\ldots,n)$ — система любого числа блоков из $\mathfrak{A}$.

Новое обстоятельство, которое здесь выступает, это то, что на $\mathcal{G}$ можно ввести операцию умножения элементов, после чего $\mathcal{G}$ станет бикомпактной группой.

В самом деле, всякие два представления $g, h\in\mathcal{G}$ порождают третье представление $f\in\mathcal{G}$, определяемое равенством

$$f(U_\nu)=g(U_\nu)\,h(U_\nu) \qquad (\nu\in N).$$

Положим $f=gh$. Проверка того, что при таком определении произведения $\mathcal{G}$ превращается в бикомпактную группу не представляет никакого труда. Единицей этой группы будет представление, относящее каждому блоку U_ν $(\nu\in N)$ единичную матрицу порядка n_ν $(\nu\in N)$.

Теперь мы можем сформулировать основное предложение этого параграфа, распадающееся на два утверждения.

Теорема 16 (*Принцип двойственности*): а) *Пусть G — некоторая бикомпактная группа, а $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(G)$ ее представляющая алгебра (квадратная блок-алгебра). Тогда представляющая группа $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$ изоморфна группе G.*

б) *Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая квадратная блок-алгебра, а $\mathcal{G}$ — ее представляющая группа. Тогда между алгеброй $\mathfrak{A}$ и представляющей алгеб* *рой* $\mathfrak{A}(\mathcal{G})$. *группы* $\mathcal{G}$ *можно установить изоморфизм, при котором блок-базису* $\mathfrak{U}=\{U_\nu\}_{\nu\in N}$ *алгебры* $\mathfrak{A}$ *соответствует полная система унитарных представлений группы* $\mathcal{G}$.

Доказательство. Первая часть теоремы есть непосредственное следствие предложения 1° § 9.

В самом деле бикомпактную группу G можно рассматривать как однородный бикомпакт с группой гомеоморфизмов — правых сдвигов $s\to as$.

Тогда представляющая алгебра $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(G)$ будет представлять собой не что иное, как алгебру гармонических полиномов на G. Согласно предложению 1° § 9 бикомпакт $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ всех элементарных функционалов на $\mathfrak{A}$ находится в топологическом соответствии $g\longleftrightarrow s$ с G, таком, что

$$g(\varphi)=\varphi(s) \quad \text{для любого } \varphi\in\mathfrak{A}(G),$$

и, следовательно, для любого неприводимого унитарного представления $U(s)$

$$g(U)=U(s).$$

Если теперь $g_1\longleftrightarrow s_1$, $g_2\longleftrightarrow s_2$ и $g=g_1g_2$, то по определению произведения представлений алгебры $\mathfrak{A}$

$$g(U)=g_1(U)g_2(U)=U(s_1)U(s_2)=U(s_1s_2),$$

и так как это верно для любого неприводимого унитарного представления $U(s)$ группы G, то $g_1g_2\longleftrightarrow s_1s_2$.

Перейдем к доказательству второй части теоремы.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая квадратная блок-алгебра с блок-базисом $\mathfrak{U}=\{U_\nu\}_{\nu\in N}$.

Рассмотрим линейное множество $\mathfrak{R}$ формальных бесконечных сумм

$$\varphi=\sum_{\nu\in N}S(A_\nu U_\nu), \tag{10.8}$$

где $A_\nu\,(\nu\in N)$ — квадратные матрицы соответственно порядков $n_\nu\,(\nu\in N)$ (n_ν — порядок блока U_ν), удовлетворяющие условию

$$\|\varphi\|=\sum_{\nu\in N}\|A_\nu\|_l<\infty. \tag{10.9}$$

Легко видеть, что $\mathfrak{R}$ — полное нормированное пространство при определении (10.9) нормы $\|\varphi\|$.

Данную алгебру $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как плотную часть $\mathfrak{R}$, состоящую из сумм (10.9) с конечным числом слагаемых.

Покажем, что для $\varphi,\psi\in\mathfrak{A}$

$$\|\varphi\psi\|\leqslant\|\varphi\|\cdot\|\psi\|. \tag{10.10}$$

Достаточно показать это неравенство для

$$\varphi=S(AU) \text{ и } \psi=S(BV),$$

где $U, V\in\mathfrak{U}$.

Пользуясь (10.2), мы можем написать, что

$$\varphi\psi = S(AU)\,S(BV) = S((A\times B)(U\times V)) =$$
$$= S\{(A\times B)\,\mathcal{E}_{uv}^{-1}\,(W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_p)\,\mathcal{E}_{uv}\} =$$
$$= S\{\mathcal{E}_{uv}\,(A\times B)\,\mathcal{E}_{uv}^{-1}\,(W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_p)\} = \sum_{k=1}^{p} S(C_k W_R),$$

где C_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — матрицы, состоящие из элементов матрицы

$$C = \mathcal{E}_{uv}\,(A\times B)\,\mathcal{E}_{uv}^{-1}$$

и занимающие в C соответственно такое же место, какое занимают матрицы U_k $(k=1, 2, \ldots, p)$ в сумме $U_1\oplus U_2\oplus\ldots\oplus U_p$.

Учитывая, что среди матриц W_k могут быть одинаковые, находим, что

$$\|\varphi\psi\| \leqslant \sum_{k=1}^{p}\|C_k\|_l = \|C_1\oplus C_2\oplus\ldots\oplus C_p\|_l \leqslant \|\mathcal{E}_{uv}(A\times B)\,\mathcal{E}_{uv}^{-1}\|_l =$$
$$= \|A\times B\|_l = \|A\|_l\,\|B\|_l = \|\varphi\|\,\|\psi\|.$$

Здесь мы использовали свойства III), IV) l-нормы для матриц, приведенные в п. 1 § 7.

В силу неравенства (10.10) произведение $\varphi\psi$ $(\varphi, \psi\in\mathfrak{A})$ есть равномерно непрерывная функция во всяком „бицилиндре“ $\|\varphi\|\leqslant R$, $\|\psi\|\leqslant R$, и поэтому операция умножения может быть расширена на все $\mathfrak{R}$ с сохранением свойства (10.10). После этого $\mathfrak{R}$ станет полным нормированным кольцом.

Рассмотрим какой-либо ненулевой мультипликативный функционал Γ, определенный на кольце $\mathfrak{R}$. Согласно теории нормированных колец И. М. Гельфанда [4.7], он всегда порождается некоторым максимальным идеалом кольца $\mathfrak{R}$ и, что для нас важно, обладает свойствами

$$\Gamma(1) = 1, \quad |\Gamma(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|.$$

В частности, для $\varphi\in S(AU)$ $(U=\|u_{ik}\|_1^n = \mathfrak{U})$ будем иметь

$$\Gamma(\varphi) = |S(A\Gamma(U))| \leqslant \|\varphi\| = \|A\|_l,$$

где

$$\Gamma(U) = \|\Gamma(u_{ik})\|_1^n.$$

Откуда (см. 1, § 7)

$$\|\Gamma(U)\|_c = \max_{\|A\|_l=1}|S(A\Gamma(U))| \leqslant 1. \qquad (10.11)$$

Применив это неравенство к блоку $V=\mathcal{E}_u^{-1}\overline{U}\,\mathcal{E}_u\in\mathfrak{U}$, найдем, что

$$\|\Gamma(\overline{U})\|_c = \|\mathcal{E}_u^{-1}\,\Gamma(\overline{U})\,\mathcal{E}_u\| = \|\Gamma(V)\| \leqslant 1. \qquad (10.12)$$

С другой стороны, так как отображение $\varphi \to \Gamma(\varphi)$ есть гомоморфизм кольца $\mathfrak{R}$ в поле комплексных чисел, то из $U\overline{U}' = I_n$ (штрих означает операцию транспонирования) следует, что

$$\Gamma(U)\,\Gamma(\overline{U})' = I_n, \quad \Gamma(\overline{U})' = \Gamma^{-1}(U).$$

Следовательно (10.12), означает, что также

$$\|\,\Gamma^{-1}(U)\,\|_c \leqslant 1.$$

Это неравенство и неравенство (10.11) означают (см. § 7), что для любого вектора $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ унитарного n-мерного пространства матрица $T = \Gamma(U)$ удовлетворяет соотношениям

$$(Tx, Tx) \leqslant (x, x), \quad (T^{-1}x, T^{-1}x) \leqslant (x, x).$$

Откуда $(Tx, Tx) = (x, x)$, т. е. T — унитарная матрица.

Таким образом отображение $\varphi \to \Gamma(\varphi)$ есть представление алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. $\Gamma \in \mathcal{G}(\mathfrak{A})$.

Покажем теперь, что в кольце $\mathfrak{R}$ нет нильпотентных элементов. Это утверждение равносильно тому, что для всякого элемента $\varphi \in \mathfrak{R}$ найдется мультипликативный функционал, то есть элемент $g \in \mathcal{G}(\mathfrak{A})$ такой, что $g(\varphi) \neq 0$.

Для этого расширим инволюцию, имеющуюся в алгебре $\mathfrak{A}$, на все кольцо $\mathfrak{R}$, относя элементу φ, определяемому равенством (10.8), элемент

$$\overline{\varphi} = \sum_{\nu \in N} S(A_\nu \overline{U}_\nu).$$

Согласно условию 2° определения блок-алгебры каждому U_ν отвечает $V_\nu \in \mathfrak{U}$, такое, что

$$\overline{U}_\nu = \mathcal{E}_\nu V_\nu \mathcal{E}_\nu^{-1} \qquad (\nu \in N),$$

где $\mathcal{E}_\nu$ $(\nu \in N)$ — некоторая унитарная матрица, при этом, очевидно, разным U_ν будут отвечать разные.

Представляя еще иначе $\overline{\varphi}$ в виде:

$$\overline{\varphi} = \sum_{\nu \in N} S(\mathcal{E}_\nu^{-1} \overline{A}_\nu \mathcal{E}_\nu V_\nu),$$

находим, что

$$\|\,\overline{\varphi}\,\| = \sum_{\nu \in N} \|\,\mathcal{E}_\nu^{-1} \overline{A}_\nu \mathcal{E}_\nu\,\|_l = \sum_{\nu \in N} \|\,A_\nu\,\| = \|\varphi\|.$$

Таким образом, отображение $\varphi \to \overline{\varphi}$ обладает всеми свойствами инволюции в нормированном кольце (см. [7]).

Поэтому отсутствие нильпотентных элементов в кольце $\mathfrak{R}$ будет обеспечено, если мы покажем, что в $\mathfrak{R}$ существует линейный строго позитивный функционал (см. [7], [16в]), т. е. функционал F, обладающий свойством

$$F(\varphi\overline{\varphi}) > 0, \quad \text{если } \varphi \neq 0. \tag{10.13}$$

Пусть ε — тот индекс из N, для которого $U_\varepsilon = e$.

Положим для любого $\varphi \in \mathfrak{R}$ вида (10.8)

$$F(\varphi) = A_\varepsilon.$$

Если $\varphi = S(AU)$ ($U \in \mathfrak{U}$), то, пользуясь (10.2) и (10.6), легко показать, что в произведении

$$\varphi\overline{\varphi} = S(AU)\, S(\overline{A}\,\overline{U}) = S\{(A \times \overline{A})\,(U \times \overline{U})\} =$$
$$= S\{\mathcal{E}_{u\bar{u}}(A \times \overline{A})\,\mathcal{E}_{u\bar{u}}^{-1}(W_1 \oplus \ldots \oplus W_p)\}$$

коэфициент при $W_1 = e$, т. е. $F(\varphi\overline{\varphi})$ имеет следующее значение:

$$F(\varphi\overline{\varphi}) = \frac{1}{n}\,S(AA^*).$$

С другой стороны, если $\varphi = S(AU)$, $\psi = S(BV)$ ($U, V \in \mathfrak{U}$) и $V \neq U$, то согласно условию 4° определения блок-алгебры в произведении

$$\varphi\overline{\psi} = S\{(A \times \overline{B})\,(U \times \overline{V})\}$$

коэфициент при e будет равняться нулю и поэтому $F(\varphi\overline{\psi}) = 0$.

Отсюда нетрудно получить сперва для элементов φ алгебры $\mathfrak{A}$ и затем всего кольца $\mathfrak{R}$, что

$$F(\varphi\overline{\varphi}) = \sum_{\nu \in N} \frac{S(A_\nu A_\nu^*)}{n_\nu},$$

что и доказывает (10.13).

Для $U \in \mathfrak{U}$ и $g \in \mathcal{G}(\mathfrak{A})$ будем писать $U(g)$, вместо $g(U)$.

Для фиксированного $U = \| u_{ik} \|_1^n \in \mathfrak{U}$ и переменного $g \in \mathcal{G}(\mathfrak{A})$ матрица-функция $U(g)$ дает унитарное представление группы $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathfrak{A})$.

Это представление неприводимо. В самом деле, неприводимость представления $U(g)$ равносильна тому, что для любой матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n \neq 0$:

$$S(AU(g)) \not\equiv 0,$$

а последнее равносильно утверждению, что элемент $\varphi = S(AU) \neq 0$ кольца $\mathfrak{R}$ не нильпотентен.

Так как для двух различных представлений $g_1, g_2 \in \mathcal{G}(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$ всегда найдется блок $U \in \mathfrak{A}$, для которого $g_1(U) \neq g_2(U)$, то есть $U(g_1) \neq U(g_2)$, то система $\{U_\nu(g)\}_{\nu \in N}$ неприводимых унитарных представлений группы $\mathcal{G}$ является достаточной.

Кроме того, она алгебраически замкнута (линейная оболочка $\mathfrak{U}(\mathcal{G})$ элементов всех представлений $U_\nu(g)$ образует алгебру); следовательно (см. [18]), она является полной.

Изоморфизм между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}(\mathcal{G})$, определяемый соответствием $U_\nu \to U_\nu(g)$, очевидно, является искомым изоморфизмом.

Теорема доказана.

Первая часть теоремы 16 была впервые доказана Т. Таннака [32] и независимо, но позже, автором [9з].

Недавно [9л] автор обнаружил, что именно те методы, которым он пользовался, позволяют установить и вторую, более тонкую часть теоремы.

Укажем, что теорема 16 является полным обобщением принципа двойственности для бикомпактных и дискретных групп, установленного Л. С. Понтрягиным [15].

§ 11. О КОЛЬЦАХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Укажем на одно возможное обобщение некоторых из предыдущих результатов.

Пусть Q — произвольное однородное топологическое пространство, а G — некоторая группа его гомеоморфизмов.

Непрерывная на Q функция $\varphi(q)$ называется *G-почти-периодической*, если семейство функций $\varphi(sq)$ с параметром $s \in G$ компактно в смысле равномерной сходимости.

Непрерывная матрица-функция

$$\Omega(q) = \|\omega_{jk}(q)\| \qquad (j=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, m;\ m < n)$$

называется *элементарной G-гармонической*, если для любого $s \in G$

$$\Omega(sq) = U(s)\,\Omega(q),$$

где $U(s)$ — некоторое неприводимое унитарное представление группы G.

Ясно, когда две элементарные G-гармонические матрицы будут называться *унитарно эквивалентными*.

Обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность всех формальных рядов

$$\sum_{\nu \in N} S(A_\nu \Omega_\nu(q)), \tag{11.1}$$

где $\{\Omega_\nu(q)\}_{\nu \in N}$ — полная система унитарно неэквивалентных гармонических матриц, а квадратные матрицы удовлетворяют условию:

$$\sum_{\nu \in N} \|A_\nu\|_t < \infty.$$

Можно показать, что всякий ряд (11.1) равномерно сходится на Q. Функции, определяемые рядами (11.1), образуют некоторое полное по норме и аналитически кольцо почти-периодических функций.

Ряды (11.1) с конечным числом слагаемых образуют некоторую алгебру $\mathfrak{A}$. Теорема 14 естественно обобщится на случай алгебраически положительных функционалов на этой алгебре $\mathfrak{A}$.

Рассмотрев на алгебре $\mathfrak{A}$ бикомпактное множество $\mathfrak{Q}$ элементарных функционалов, можно будет непрерывно отобразить Q в плотную часть $\mathfrak{Q}_1$ бикомпакта $\mathfrak{Q}$, при этом G гомоморфно отобразится в некоторую транзитивную группу $\mathcal{G}$ гомеоморфизмов $\mathfrak{Q}$, а система $\{\Omega_\nu(q)\}$ перейдет в полную систему $\{\Omega_\nu(\mathfrak{q})\}$ гармонических матриц однородного бикомпакта $\mathfrak{Q}$.

Собственно, из одного этого результата уже вытекают остальные упомянутые здесь положения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артеменко А. П., О позитивных линейных функционалах в пространстве почти периодических функций H. Bohr'a, Сообщение Харьковского математического общества, сер. 4, 16 (1940), 111—114.

2. Березанский Ю. М., О центре группового кольца компактной группы. (печатается в ДАН).

3. Березанский Ю. М. и Крейн С. Г.,
   а) Континуальные алгебры (печатается в ДАН).
   б) Некоторые классы континуальных алгебр (печатается в ДАН).

4. Гельфанд И. М.
   а) Normierte Ringe, Математический сборник, 9 (51), (1941), 3—24.
   б) О кольце почти периодических функций, ДАН, 25 (1939), 575—577.

5. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А.
   а) Унитарные представления группы Лоренца, ИАН, сер. матем., 11 (1947), 411—504.
   б) Кольца с инволюцией и их представления, ИАН, сер. матем., 12 (1948), 445—480.

6. Гельфанд И. М. и Райков Д. А., Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, Математический сборник, 13 (55), (1943), 301—316.

7. Гельфанд И. М. и Райков Д. А. и Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца. Успехи математических наук, 1 : 2 (12), (1946), 48—146.

8. Данилевский А. М. и Крейн М. Г., О билинейных разложениях симметрических ядер, положительных в смысле Мерсера, ДАН, 1 (1936), 303—306.

9. Крейн М. Г.
   а) Sur les dérivées des noyaux de Mercer, C. R. Acad. Sci., 200 (1935), 797—799.
   б) Sur les développement des fonctions arbitraires en séries de fonctions fondamentales d'un problème aux limites quelconque, Математический сборник, 2 (44) (1937), 923—934.
   в) Sur les opérateurs différentiels autoadjoints et leurs fonctions de Green symétriques, Математический сборник, 2 (44), (1937), 1023—1072.
   г) Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха, ДАН, 28 (1940), 13—17.
   д) Об одном кольце функций, определенных на топологической группе, ДАН, 29 (1940), 275—280.
   е) Об одном специальном кольце функций, ДАН, 29 (1940), 355—359.
   ж) К теории почти периодических функций на топологической группе, ДАН 30 (1941), 5—8.
   з) О положительных функционалах на почти периодических функциях, ДАН, т. 30, № 1 (1941), 9—12.

и) Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения, ДАН, 53 (1946), 3—6.

к) Про ермітові оператори з напрямними функціоналами, Збірник праць Інституту математики АН УРСР, 10 (1948), 83—105.

л) Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры, ДАН, т. 69, № 6 (1949).

10. Крейн М. Г. и Крейн С. Г., Sur l'espace des fonctions continues définies sur un bicompact de Hausdorff et ses sousespaces semiordonnés, Математический сборник, 13 (55), (1943), 1—38.

11. Крейн М. Г. и Мильман Д. П., On extreme points of regularly convex sets, Studia Math., 9 (1940), 133—138.

12. Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, Успехи математических наук, 3 : 1 (23), (1948), 3—95.

13. Крейн М. Г. и Шмульян В. Л., On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach Space, Ann. of Math., 41 (1940), 556—583.

14. Наймарк М. А., Кольца с инволюцией, Успехи математических наук, 3 : 5 (27), (1948), 52—145.

15. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М.—Л. 1938.

16. Райков Д. А.

а) О разложении законов Гаусса и Пуассона, ИАН, сер. матем., 2 (1938), 91—120.

б) Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров, Труды Математического института им. Стеклова, 14 (1945), 1—86.

в) К теории нормированных колец с инволюцией, ДАН, 54 (1946), 391—394.

17. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. II, М.—Л., 1934.

18. Шевалле К., Теория групп Ли, М. 1948.

19. Шилов Г. Е., К теории идеалов в нормированных кольцах функций, ДАН, 27 (1940), 900—903.

20. Agnew R. P. and Morse A. P., Extensions of linear functionals, with applications to limits, integrals, measures and densities, Ann. of Math., 39 (1938), 20—30.

21. Bochner S.

a) A theorem on Fourier-Stieltjes integrals, Bull. Amer. Math. Soc., 40 (1934).

b) On a theorem of Tannaka and Krein, Ann. of Math., 43 (1942), 56—58.

22. Cameron R. H., Analytic functions of absolutely convergent generalised trigonometric sums, Duke Math. Journ., 3 (1937), 682—688.

23. Cartan E., Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos, Rendiconti di Palermo, 53 (1929).

24. Godement R., Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math., Soc., 63 (1948), 1—84.

25. Haar A., Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math., 34 (1933).

26. Kampen E. R., Almost periodic functions and compact groups, Ann. of Math., 37 (1936), 78—91.

27. Lévy P., L'arithmétique des lois des probabilités, C. R. Acad. Sci, 204 (1937).

28. Neumann J. v.

a) Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, Comp. Math., 1 (1934). Имеется русский перевод в „Успехах математических наук", т. 2 (1936), 168—176.

b) Almost periodic functions in a group, Trans Am. Math. Soc., 37 (1935).
s) Some matrix-inequalities and metrization of matrix space, Известия Института математики и механики при Томском государственном университете (1937), 286—300.

29. Peter F. und Weyl H., Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen Kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann., 97 (1927), 737—755. Имеется русский перевод в „Успехах математических наук", т. 2 (1936), 144—167.

30. Schoenberg I. J., Metric spaces and completely monotone functions, Ann. of Math., 39 (1938), 811—841.

31. Stone M., Applications of the theory of Boolean Rings to General Topology, Trans. Amer. Math. Soc., 41, (1937) 375—481.

32. Tannaka T., Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen, Tohoku Mathem. J., 45 (1938), 1—12.

33. Watson G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, New Jork, 1945.

34. Wiener N., The Fourier Integral and Certain of its Applications, Cambridge, 1933.

35. Weil A., L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, 1940.

36. Weyl H., Harmonics on homogeneous manifolds, Ann. of Math.. 35 (1934), 486—499.

Поступила 22. XII 1949.