Некоторые упруго-пластические задачи с линейным упрочнением

Г. Н. Савин и *О. С. Парасюк*

Рассмотрим основные соотношения теории пластичности Генки [1] при плоском деформированном состоянии, в предположении несжимаемости материала

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\psi}{2G}(\sigma_x - \sigma), \\
e_{yy} &= \frac{\psi}{2G}(\sigma_y - \sigma), \\
e_{xy} &= \frac{\psi}{2G}\tau_{xy}, \\
0 = e_{zz} &= \frac{\psi}{2G}(\sigma_z - \sigma), \\
\sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \\
\sigma_z &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

или

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\psi}{2G}\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right], \\
e_{yy} &= \frac{\psi}{2G}\left[\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right], \\
e_{xy} &= \frac{\psi}{2G}\tau_{xy}, \\
e_{zz} &= 0.
\end{aligned}
$$

Пусть E — интенсивность деформации сдвига, S — интенсивность касательных напряжений.

Тогда из (1) следует, что

$$
E = \frac{\psi}{G} S, \tag{2}
$$

где G — обычный модуль сдвига.

Предположим, что упрочнение линейно

$$S = k(mE + \mu), \tag{3}$$

и положим $n = \frac{km}{G}$, а также примем [2], что

$$n + \mu = 1.$$

Постоянные m и μ характеризуют механические свойства рассматриваемых материалов.

В этом случае для ψ получаем выражение

$$\psi = \frac{1}{n}\left[1 - \frac{\mu k}{S}\right]. \tag{4}$$

Добавляя к соотношениям (1) уравнения равновесия

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

и условия совместности деформаций

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} e_{yy} = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e_{xy}, \tag{6}$$

мы получаем полную систему уравнений, для которой можно ставить обычные краевые задачи. К сожалению, решение таких задач чрезвычайно трудно.

В этой заметке мы ставим задачу о разыскании таких решений системы уравнений (1), (5), (6), для которых добавочно выполнено условие

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \tag{7}$$

или другими словами, решений, для которых компоненты напряжений (но не деформаций) являются одновременно решениями плоской задачи теории упругости.

С этой целью представим компоненты напряжений в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \omega(x, y) - K(x, y)\cos\varphi(x, y), \\ &\sigma_y = \omega(x, y) + K(x, y)\cos\varphi(x, y), \\ &\tau_{xy} = K(x, y)\sin\varphi(x, y). \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда из (7) следует, что $\omega(x, y)$ функция гармоническая. Если подставить компоненты напряжений (8) в уравнения равновесия (5) и исключить с помощью уравнения (7) функцию $\omega(x, y)$, то легко получаются такие соотношения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)K\cos\varphi(x, y)=-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}K\sin\varphi(x, y),$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)K\sin\varphi(x, y)=2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}K\cos\varphi(x, y). \tag{9}$$

Но так как в нашем случае $S=K(x, y)$, то, подставляя (1) в (6) и учитывая (8), (9), получаем соотношение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\cos\varphi(x, y)=-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sin\varphi(x, y). \tag{10}$$

Таким образом, задача о разыскании тех напряженных состояний, которые соответствуют одновременно как упругим, так и пластическим напряженным состояниям, приводится к разысканию двух функций $K(x, y)$ и $\varphi(x, y)$, удовлетворяющих трем уравнениям (9) и (10).

Система (9), если выполнить диференцирование и принять во внимание соотношение (10), перейдет в следующую:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}+2\frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+2\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=K\sin\varphi\left[2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\cos\varphi-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sin\varphi\right],$$
$$2\frac{\partial^2 K}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+2\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-K\cos\varphi\left[2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\cos\psi-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sin\varphi\right]. \tag{11}$$

Укажем некоторые частные решения системы (10) и (11). С этой целью предположим, что $\varphi(x, y)$ удовлетворяет, кроме уравнения (10), еще следующему уравнению:

$$2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\cos\varphi-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sin\varphi=0. \tag{12}$$

Подобно тому, как было показано в одной из наших заметок [3], можно показать, что следствием (10) и (12) будет

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0 \tag{13}$$

и что общее решение (10) и (12) будет

$$\varphi(x, y)=-2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}-2\alpha. \tag{14}$$

Система (11) переходит теперь в следующую:

$$K_{yy}-K_{xx}+2K_y\varphi_x+2K_x\varphi_y=0,$$
$$2K_{xy}-2K_y\varphi_y+2K_x\varphi_x=0, \tag{15}$$

которая имеет решение не только при $\varphi(x, y)$ из (14), но и при любом гармоническом $\varphi(x, y)$. Это следует из того, что условие совместности для системы (15)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)[-2K_y\varphi_y+2K_x\varphi_x]=2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[2K_y\varphi_x+2K_x\varphi_y] \tag{16}$$

выполняется при любой гармонической функции $\varphi(x, y)$ тождественно. Мы можем поэтому рассматривать систему

$$\begin{aligned} &dK_{xx}-K_{xxx}\,dx-K_{xxy}\,dy=0,\\ &dK_{yy}-K_{yyx}\,dx-K_{yyy}\,dy=0,\\ &dK_{xy}-K_{xxy}\,dx-K_{yyx}\,dy=0, \end{aligned} \tag{17}$$

из которой, используя соотношение (15) и гармоничность функции $\varphi(x, y)$, найдем соотношение

$$dK_{xx}+dK_{yy}+2\varphi_x(K_{xx}+K_{yy})\,dy-2\varphi_y(K_{xx}+K_{yy})\,dx=0 \tag{18}$$

и, вводя функцию ψ, гармонически сопряженную с $\varphi(x, y)$,

$$\varphi_x=\psi_y \quad \varphi_y=-\psi_x,$$

легко найдем

$$K_{xx}+K_{yy}=2ae^{-2\psi}, \tag{19}$$

где a — константа.

Из (15) и (19) имеем

$$\begin{aligned} &K_{xx}=K_y\varphi_x+K_x\varphi_y+ae^{-2\psi},\\ &K_{yy}=-K_y\varphi_x-K_x\varphi_y+ae^{-2\psi},\\ &K_{xy}=K_y\varphi_y-K_x\varphi_x,\\ &\psi_y=\varphi_x \quad \psi_x=-\varphi_y. \end{aligned} \tag{20}$$

Легко проверить, что эта система совместна.

В нашем конкретном случае

$$\begin{aligned} &\varphi=-2\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}-2\alpha,\\ &\psi=\ln(x^2+y^2), \end{aligned} \tag{21}$$

и система (20) легко интегрируется. Для $K(x, y)$ получаем

$$K(x, y)=\frac{ny-mx}{x^2+y^2}+\frac{a}{2(x^2+y^2)}+c,$$

или

$$K(x, y)=e^{-\psi}\left[ny-mx+\frac{a}{2}\right]+\mathrm{const}, \tag{22}$$

где m, n, a, c — константы, ψ — функция (21).

Для выяснения физического смысла этого решения вычислим такую комбинацию напряжений:

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\tau_{xy} i = 2K(x, y)\,[\cos\varphi + i\sin\varphi] = 2K(x, y)\, e^{i\varphi(x, y)}. \tag{23}$$

Простой подсчет дает нам

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\tau_{xy} i = \frac{\bar z(-m+ni) - z(m+ni) + a}{z^2} e^{-2i\alpha} + 2c\frac{\bar z}{z} e^{-2i\alpha}, \tag{24}$$

где

$$z = x + iy, \quad \bar z = x - iy.$$

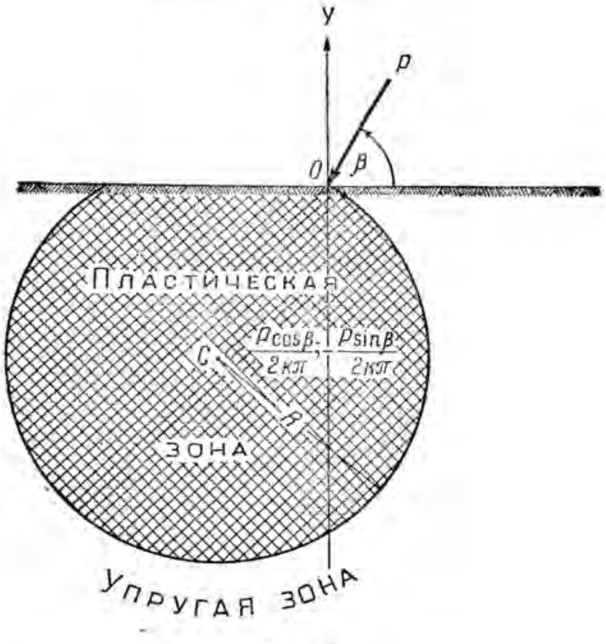

Рис. 1.

С другой стороны, по условию, компоненты напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} являются одновременно решениями плоской задачи теории упругости, т. е. для них должны быть справедливы формулы

$$\sigma_y - \sigma_x + i2\tau_{xy} = 2\,[\,\bar z\Phi'(z) + \Psi(z)\,], \tag{25}$$

где $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — функции напряжений Н. И. Мусхелишвили **[4]**. Сравнивая правые части (24) и (25), найдем, что

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= \frac{c\, e^{-2i\alpha}}{z} - \frac{(m - in)\, e^{-2i\alpha}}{2} \cdot \frac{1}{z^2}, \\ \Psi(z) &= \frac{a e^{-2i\alpha}}{2} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{(m + in)\, e^{-2i\alpha}}{2} \cdot \frac{1}{z}. \end{aligned} \tag{26}$$

Если в (26) положим $a=c=\alpha=0$, то будем иметь

$$\Phi(z)=\frac{m-in}{2}\cdot\frac{1}{z}+\text{const},$$
$$\Psi(z)=-\frac{m+in}{2}\cdot\frac{1}{z}, \tag{27}$$

где m и n — вещественные постоянные.

Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ (27) соответствуют случаю сосредоточенной силы, приложенной к границе полуплоскости [4], если в них положить

$$m=\frac{P}{\pi}\cos\beta;\quad n=-\frac{P}{\pi}\sin\beta,$$

где P — величина приложенной силы (рис. 1),

β — угол между силой P и осью ox.

Функция $K(x, y)$ (22) для этого случая будет

$$K(x, y)=\frac{ny-mx}{x^2+y^2}=-\frac{P}{\pi}\cdot\frac{y\sin\beta+x\cos\beta}{x^2+y^2}. \tag{28}$$

Чтобы найти границу, отделяющую упругую область от пластической, следует приравнять функцию $K(x, y)$ (28) постоянной пластичности $k=\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_T$, где σ_T — предел текучести при одностороннем растяжении.

Приравнивая $K(x, y)$ (28) постоянной пластичности $k=\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_T$, мы получим окружность

$$\left(x+\frac{P\cos\beta}{2k\pi}\right)^2+\left(y+\frac{P\sin\beta}{2k\pi}\right)^2=\left(\frac{P}{2k\pi}\right)^2. \tag{29}$$

Решение этой упруго-пластической задачи при $\beta=\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 1) дано (иным путем) К. Н. Шевченко [2].

Если в (6) положить $m=n=c=0$, но $a\neq 0$, то $\Phi'(z)$ и $\Psi(z)$ будут

$$\Phi'(z)=0,\quad \Psi(z)=\frac{ae^{-2i\alpha}}{2}\cdot\frac{1}{z^2}.$$

Эти функции характеризуют напряженное состояние в бесконечной плоскости под действием сосредоточенной пары M, приложенной в начале координат.

Если положить $ae^{-2i\alpha}=-i\frac{M}{\pi}$ и постоянную в функции $\Phi(z)$ принять равной нулю, то функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ примут вид [4]

$$\Phi(z)=0,\quad \Psi(z)=-i\frac{M}{2\pi}\cdot\frac{1}{z^2}.$$

Пластическая область в этом случае будет кругом радиуса $R=\sqrt{\frac{M}{2k\pi}}$

$$x^2+y^2=\frac{M}{2k\pi}. \tag{30}$$

Если в (26) положить $m=n=a=\alpha=0$, но $c=k=\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_T$, то

$$\Phi'(z)=\frac{k}{z};\quad \Psi(z)=0.$$

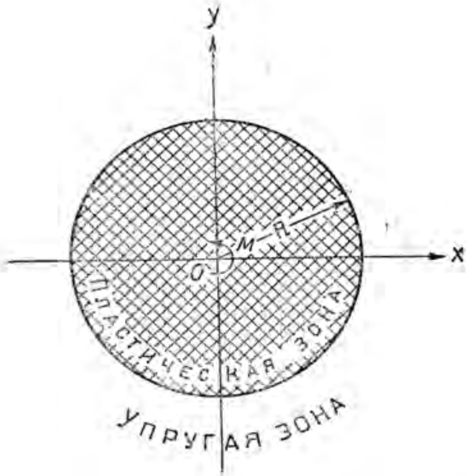

Рис. 2.

В этом случае, по формуле Гурса [4], легко находим функцию напряжений

$$U(x,y)=kr^2\ln\frac{r}{R}+\frac{p-k}{2}r^2,$$

где p и R — некоторые постоянные.

А это есть функция напряжений, которая одновременно удовлетворяет бигармоническому уравнению и уравнению пластичности Сен-Венана. Для этой функции Л. А. Галин [5] решил интересную упруго-пластическую задачу.

Важно, что, несмотря на нелинейность теории, эти три случая накладываются.

Естественно возникает вопрос: имеет ли система уравнений (9) и (10) иные решения, кроме указанных выше.

Для ответа на этот вопрос рассмотрим сначала задачу о разыскании решений следующей системы:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\cos\varphi=-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sin\varphi(x,y),$$

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0, \tag{31}$$

или после диференцирования и очевидных упрощений

$$[\varphi_{yy} - \varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_y]\sin\varphi - [2\varphi_{xy} + \varphi_x^2 - \varphi_y^2]\cos\varphi = 0,$$
$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0. \tag{32}$$

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{aligned} 2\varphi_{yy} &= -2\varphi_x\varphi_y + ae^{-\psi}\cos\varphi, \\ 2\varphi_{xx} &= 2\varphi_x\varphi_y - ae^{-\psi}\cos\varphi, \\ 2\varphi_{xy} &= \varphi_y^2 - \varphi_x^2 + ae^{-\psi}\sin\varphi, \\ \psi_x &= -\varphi_y, \quad \psi_y = \varphi_x. \end{aligned} \tag{33}$$

Исключая ψ из системы (33), мы приходим к системе (32) или к системе (31). Отсюда следует, что каждая функция $\varphi(x, y)$, удовлетворяющая системе уравнений (33), будет также решением системы (32).

Покажем теперь, что система (33) приводится к квадратурам. Для этой цели положим

$$\varphi_x = p, \quad \varphi_y = q, \quad \varphi_{xx} = r, \quad \varphi_{yy} = t, \quad \varphi_{xy} = s$$

и рассмотрим систему Пфаффа

$$\begin{aligned} dp - r\,dx - s\,dy &= 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy &= 0, \\ d\varphi - p\,dx - q\,dy &= 0, \\ d\psi + q\,dx - p\,dy &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Учитывая (33), легко получаем

$$2dp + p\,d\psi - q\,d\varphi + ae^{-\psi}\cos\varphi\,dx - ae^{-\psi}\sin\varphi\,dy = 0,$$
$$2dq + p\,d\varphi + q\,d\psi - ae^{-\psi}\sin\varphi\,dx - ae^{-\psi}\cos\varphi\,dy = 0,$$

или

$$2e^{\psi}\,dp + e^{\psi}p\,d\psi - e^{\psi}q\,d\varphi + a\cos\varphi\,dx - a\sin\varphi\,dy = 0,$$
$$2e^{\psi}\,dq + e^{\psi}p\,d\varphi + e^{\psi}q\,d\psi - a\sin\varphi\,dx - a\cos\varphi\,dy = 0.$$

Или, разрешив относительно dx и dy, получаем

$$-(2e^{\psi}dp + e^{\psi}p\,d\psi - e^{\psi}q\,d\varphi)\cos\varphi + [2e^{\psi}dq + e^{\psi}p\,d\varphi + e^{\psi}q\,d\psi)\sin\varphi = a\,dx,$$
$$(2e^{\psi}dp + e^{\psi}p\,d\psi - e^{\psi}q\,d\varphi)\sin\varphi + (2e^{\psi}dq + e^{\psi}p\,d\varphi + e^{\psi}q\,d\psi)\cos\varphi = a\,dy.$$

Умножая первое из этих соотношений на $p(-q)$, второе на $q(p)$ и складывая, получаем

$$d(2pq\,e^{\psi}\sin\varphi) + d(q^2e^{\psi}\cos\varphi) - d(p^2e^{\psi}\cos\varphi) = a\,d\varphi,$$
$$d(2pq\,e^{\psi}\cos\varphi) + d(e^{\psi}p^2\sin\varphi) - d(q^2e^{\psi}\sin\varphi) = a\,d\psi,$$

или

$$p^2 - q^2 = e^{-\psi}(a\psi + b_2)\sin\varphi - e^{-\psi}(a\varphi + b_1)\cos\varphi,$$
$$2pq = e^{-\psi}(a\psi + b_2)\cos\varphi + e^{-\psi}(a\varphi + b_1)\sin\varphi.$$

Умножая второе из этих соотношений на $-i$ и складывая с первым, получаем

$$p - iq = \pm ie^{\frac{iw}{2}} \sqrt{aw + b_1 + ib_2}, \tag{35}$$

где положено

$$w = \varphi + i\psi.$$

Но, с другой стороны, из (34) получаем

$$dx + i\,dy = \frac{d\varphi + i\,d\psi}{p - iq} = \frac{dw}{p - iq}.$$

Учитывая (35), получаем интегрируемое соотношение

$$dz = \frac{\mp ie^{-\frac{iw}{2}}\,dw}{\sqrt{aw + b_1 + ib_2}}. \tag{36}$$

При $a=0$ мы можем получить из (36) функции (21). Полученный результат можно интерпретировать с точки зрения идеальной пластичности. В самом деле, если принять, что

$$\sigma_x = \omega - k \sin\varphi,$$
$$\sigma_y = \omega + k \sin\varphi,$$
$$\tau_{xy} = - k \cos\varphi,$$

где k — постоянная пластичности, то решению системы (31) будут соответствовать те решения идеальной пластичности Сен-Венана, при которых функция $\varphi(x, y)$ гармоническая. Эти решения интересны тем, что при $a=0$ они превращаются в хорошо известную функцию характеристик (21).

Теперь покажем, что если $\varphi(x, y)$ есть гармоническая функция, то система (11) разрешима относительно $K(x, y)$. Это легко видеть, так как, если подставить (8) в (5) и сравнить смешанные вторые производные функции $K(x, y)$, мы придем к соотношению

$$K(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) = [-2\omega_{xy} - 2\omega_x\varphi_x + 2\omega_y\varphi_y] \cos\varphi + \\ + [2\omega_y\varphi_x + 2\omega_x\varphi_y + \omega_{yy} - \omega_{xx}] \sin\varphi. \tag{37}$$

Это соотношение удовлетворяется тождественно при условии, когда функция $\varphi(x, y)$ гармоническая и, например, когда

$$\begin{aligned} -2\omega_{xy} - 2\omega_x\varphi_x + 2\omega_y\varphi_y &= 0,\\ \omega_{yy} - \omega_{xx} + 2\omega_x\varphi_y + 2\omega_y\varphi_x &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Присоединяя к (38) условие

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} = 0, \tag{39}$$

мы найдем функцию $\omega(x, y)$, что всегда возможно, ибо система уравнений (38) и (39) тождественна системе (15) для функции $K(x, y)$. Взяв функцию $\varphi(x, y)$ из решения системы (32), получим функцию $K(x, y)$ из уравнений равновесия. Но любопытно заметить, что в нашем случае функцию $K(x, y)$ можно написать сразу в виде

$$K(x, y) = e^{-\psi}\left[ny - mx + \frac{a}{2}\right]. \tag{40}$$

Это следует из того, что выражение

$$K(x, y)\, e^{i\varphi}$$

может быть записано в виде

$$K(x, y)\, e^{i\varphi} = [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)],$$

где $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ есть функции Н. И. Мусхелишвили.

Отметим, что, приравнивая функцию $K(x, y)$ постоянной пластичности

$$K(x, y) = k = \text{const},$$

получаем уравнение контура, отделяющего пластическую область от упругой. В пластической области компоненты деформаций определяются из соотношения (1), а в упругой области по обычному закону Гука.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соколовский, Теория пластичности, Изд. АН СССР, 1946.

2. К. Н. Шевченко, Сосредоточенная сила, приложенная к границе полуплоскости, Прикладная математика и механика, т. 12, вып. 4, 1948.

3. Г. Н. Савин и О. С. Парасюк, Характеристики бигармонического пластического состояния, ДАН УССР № 4, 1947.

4. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. АН СССР, 1935.

5. Л. А. Галин, Плоская упруго-пластическая задача, Прикладная математика и механика, т. X, вып. 3, 1946.

Поступила 15. XII 1949.