1950 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. II, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# Альтернативные тела

*Л. А. Скорняков*

Альтернативные тела (см. определение в § 1) представляют интерес ввиду их связи с проективными плоскостями, в которых проективно выполняется малая теорема Дезарга (см. Муфанг [5], [6]). Шафер [7] дал полное описание неассоциативных альтернативных тел, имеющих конечный ранг над своим центром: все они являются центральными алгебрами Кэли-Диксона.

В настоящей работе (см. § 5) доказывается следующая основная теорема: Всякое альтернативное тело, характеристика которого отлична от 2 и 3*), или ассоциативно, или же имеет конечный ранг над своим центром. Таким образом, описание альтернативных неассоциативных тел можно считать в основном законченным.

Эта основная теорема позволяет уточнить результат Смайли [8] о регулярных и алгебраических альтернативных кольцах без нильпотентных элементов, а также обобщить на альтернативный случай результат Джекобсона [4] о локальной конечности алгебраических алгебр без нильпотентных элементов. С другой стороны, в § 6 основная теорема статьи используется для решения одной проблемы Холла [3] об альтернативных плоскостях для случая характеристики, отличной от 2 и 3.

## § 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Альтернативным кольцом (телом) называется кольцо (тело), в котором ассоциативный закон заменен альтернативным **):

$$(ab)\,b = ab^2, \quad a^2b = a\,(ab).$$

В альтернативных телах всегда существует единственная единица и единственный обратный для каждого элемента, отличного от нуля.

В настоящей работе предполагается, что характеристика тела отлична от 2 и 3.

Укажем следующие соотношения, имеющие место в альтернативных телах ***):

$$(ab)\,a = a\,(ba). \tag{1}$$

$$a^{-1}\,(ab) = b = (ba)\,a^{-1}. \tag{2}$$

$$(ab)\,(ca) = a\,(bc)\,a. \tag{3}$$

---

*) См. [5] и [6].

**) [6].

***) В настоящее время автором снято ограничение, наложенное на характеристику (Примечание при корректуре).

Ассоциатором элементов $a$, $b$, $c$ некоторого кольца называется функция этих элементов, определяемая соотношением $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$. Известно, что ассоциатор линеен относительно каждого из своих аргументов. В альтернативных кольцах он меняет знак при перестановке каких-либо двух из его элементов и потому не меняется при циклических перестановках *).

Отметим некоторые из других свойств ассоциаторов альтернативных колец.

$$6[a, b, c] = [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b], \text{ где } [a, b] = ab - ba. \tag{4}$$

$$[ab, c, d] - [a, bc, d] + [a, b, cd] = a[b, c, d] + [a, b, c]d \text{ **)}. \tag{5}$$

$$[ab, a, c] + [ba, a, c] - [b, a^2, c] = 0. \tag{6}$$

$$[ab, a, c] + [a, b, ac] = 0. \tag{7}$$

$$[ba, a, c] = -a[a, b, c] \text{ ***)}. \tag{8}$$

Применяя (3), получим:

$$-[ab, a, c] = [ab, c, a] = [(ab)c]a - (ab)(ca) = [(ab)ca] - [a(bc)]a = [a, b, c]a.$$

Таким образом, имеем

$$[ab, a, c] = -[a, b, c]a. \tag{9}$$

Сопоставление (6), (8) и (9) дает

$$a[a, b, c] + [a, b, c]a = [a^2, b, c]. \tag{10}$$

Используя (6) и (7), приходим к

$$[ba, a, c] = [b, a^2, c] - [ab, a, c] = -[c, a^2, b] - [ab, a, c] =$$
$$= -[ac, a, b] - [ca, a, b] - [ab, a, c] = -[a, b, ca] -$$
$$- \{[ab, a, c] + [a, b, ac]\} = -[a, b, ca],$$

т. е.

$$[ba, a, c] + [a, b, ca] = 0. \tag{11}$$

Докажем несколько лемм, на которые постоянно будем опираться в дальнейшем.

Лемма 1. *Если $ab = -ba$, то при всяком $t$*

$$a[a, b, t] = -[a, b, t]a.$$

Результат вытекает из (8) и (9)

$$a[a, b, t] = -[ba, a, t] = [ab, a, t] = -[a, b, t]a.$$

Лемма 2. *Если $ab = ba$, то при всяком $t$*

$$a[a, b, t] = [a, b, t]a.$$

Аналогично предыдущему

---

*) [9]. Формулы (1), (4), (5).

**) [9]. Формулы (6) и (2).

***) [10]. Формулы (1.8), (1.7), (1.6).

Лемма 3. *Если* $ab = ba$, $ac = -ca$, *то* $[a, b, c] = 0$.

Вытекает из лемм 1 и 2.

Лемма 4. *Если* $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = -cb$, *то* $a(bc) = (bc)a$.

Из леммы 3 следует, что $[a, b, c] = 0$, а тогда утверждение очевидно.

Лемма 5. *Если* $ab = -ba$, *то* $a(bc) = -b(ac)$, $(ca)b = -(cb)a$.

Поскольку $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$ и $[b, a, c] = (ba)c - b(ac)$, сложением этих равенств доказывается первое соотношение. Доказательство второго проводится аналогично.

Лемма 6. *Если* $ab = -ba$, $ac = -ca$, *то* $[a, b, c] = [bc, a]$.

В самом деле, используя лемму 5, получаем

$$[a, b, c] = (ab)c - a(bc) = -(ba)c - a(bc) = (bc)a - a(bc) = [bc, a].$$

Лемма 7. *Если* $ab = -ba$, $ac = -ca$, *то* $[bc + cb, a] = 0$.

Лемма 6 дает: $[a, b, c] = [bc, a]$, $[a, c, b] = [cb, a]$ и остается лишь сложить полученные равенства.

Лемма 8. *Если* $ab = ba$, $ac = ca$, *то* $3[a, b, c] = [a, cb]$.

Запишем:
$$[a, b, c] = (ab)c - a(bc),$$
$$[b, a, c] = (ba)c - b(ac),$$

и вычтем из верхнего равенства нижнее. Получим

$$2[a, b, c] = b(ac) - a(bc).$$

Формула (4) вместе с только что полученным равенством дает

$$6[a, b, c] = [[b, c], a] = (bc)a - (cb)a - a(bc) + a(cb) =$$
$$= [b(ac) - a(bc)] + [(bc)a - b(ac)] + [a(cb) - (cb)a] =$$
$$= 2[a, b, c] + [b, c, a] + [a, cb].$$

Отсюда $3[a, b, c] = [a, cb]$.

Лемма 9. *Если* $ab = ba$, $ac = ca$, *то* $[bc + cb, a] = 0$.

Ввиду леммы 8, $3[a, b, c] = [a, cb]$, $3[a, c, b] = [a, bc]$, после чего сложение дает искомую формулу.

Лемма 10. *Если* $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = cb$, *то* $[bc, a] = 0$.

Следует из леммы 9.

Лемма 11. *Если* $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = cb$, *то* $[a, b, c] = 0$.

Вытекает из леммы 10 и формулы (4).

## § 2. АССОЦИАТИВНЫЙ ЦЕНТР

**Центром** $P$ альтернативного кольца называется совокупность элементов, перестановочных со всеми элементами кольца. Если это кольцо является телом $K$, то, как легко проверяется с помощью леммы 11, $P$ оказывается полем, и $K$ можно рассматривать как алгебру над $P$.

Ассоциативным центром $A$ альтернативного кольца называется совокупность элементов, каждый из которых аннулирует всякий ассоциатор, в который он входит.

Теорема 1. *Во всяком неассоциативном альтернативном теле $K$ ассоциативный центр совпадает с центром.*

Лемма 1. $K = A \cup M$, *где $M$ — подтело в $K$, порожденное множеством ассоциаторов.*

Если $\alpha \notin A$, то найдутся такие $b, c \in K$, что $[\alpha, b, c] \neq 0$. Из формулы (8) имеем: $[b\alpha, \alpha, c] = -\alpha[\alpha, b, c]$, откуда $\alpha = [b\alpha, \alpha, c]\ ([\alpha, b, c])^{-1}$, то есть $\alpha \in M$.

Лемма 2. $A \subset K^M$, *где $K^M$ — централизатор множества $M$ в $K$.* Из формулы (5) имеем

$$[\alpha a, b, c] = \alpha[a, b, c], \tag{I}$$

$$[a\alpha, b, c] = [a, b, c]\alpha, \tag{II}$$

$$[\alpha a, b, c] = [c, \alpha a, b] = [c\alpha, a, b], \tag{III}$$

где $\alpha \in A$, $a, b, c \in K$.

Применяя (I), (III) и (II), получим

$$\alpha[a, b, c] = [\alpha a, b, c] = [c\alpha, a, b] = [c, a, b]\alpha = [a, b, c]\alpha.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Пусть $\alpha, \beta \in A$, $a, b, c \in K$. Из (5) следует

$$[\alpha\beta, a, b] = [\alpha, \beta a, b] - [\alpha, \beta, ab] + \alpha[\beta, a, b] + [\alpha, \beta, a]b = 0.$$

Отсюда $\alpha\beta \in A$, то есть $A$ является кольцом. Но из (I) следует, что $\alpha[\alpha^{-1}, a, b] = [1, a, b] = 0$, то есть $[\alpha^{-1}, a, b] = 0$, $\alpha^{-1} \in A$ и $A$ оказывается телом.

Пусть теперь $[a, b, c] \neq 0$. Из (I) следует, что $\alpha[a, b, c] \in M$, а значит $\alpha \in M$ и $A \subset M$. Из леммы 1 следует, что $K = M$, откуда $A \subset K^K = P$. Так как из (4) вытекает, что $P \subset A$, теорема доказана.

## § 3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТРОЙКИ

Тройку $a, b, c$ отличных от нуля элементов альтернативного тела $K$ будем называть специальной, если

$$ab = -ba,\ ac = -ca,\ bc = -cb,\ (ab)c = -a(bc)\ ^{*)}.$$

Лемма 1. *Для специальной тройки $a, b, c$ справедливы следующие соотношения:*

$$(ac)b = -a(cb),\quad (ba)c = -b(ac),\quad (bc)a = -b(ca),$$

$$(ca)b = -c(ab),\quad (cb)a = -c(ba).$$

---

*) Последнее требование равносильно равенству $[a, b, c] = 2[ab]c$.

Докажем первую формулу, используя лемму 5 § 1

$$(ac)\,b=-(ab)\,c=a\,(bc)=-a\,(cb).$$

Остальные формулы доказываются аналогично.

Лемма 2. *Если* $a, b, c$ — *специальная тройка, то элементы* $a, b, c, ab, ac, bc, a(bc)$ *попарно антикоммутативны.*

Соотношения $a(ab)=-(ab)a$, $a(ac)=-(ac)a$, $b(ab)=-(ab)b$, $b(bc)=-(bc)b$, $c(ac)=-(ac)c$, $c(bc)=-(bc)c$ очевидны.

Используя лемму 5 § 1, получим

$$a(bc)=-(ab)c=(ac)b=-(ca)b=(cb)a=-(bc)a,$$

$$c(ab)=a(bc)=-(ab)c,$$

$$b(ac)=-a(bc)=(ab)c=-(ac)b.$$

Из только что полученных соотношений выведем следующие формулы:

$$a[a(bc)]=-a[(bc)a]=-[a(bc)]a,$$

$$(bc)[a(bc)]=-[a(bc)](bc),$$

$$(ab)[a(bc)]=-(ab)[(ab)c]=[(ab)c](ab)=-[a(bc)](ab).$$

Из тех же соотношений с помощью леммы 5 § 1 будем иметь

$$b[a(bc)]=-b[b(ac)]=[b(ac)]b=-[a(bc)]b,$$

$$c[a(bc)]=c[c(ab)]=-[c(ab)]c=-[a(bc)]c.$$

Формула (3) дает

$$(ab)(ac)=-(ab)(ca)=-a(bc)a=a(cb)a=-(ac)(ab),$$

$$(ac)(bc)=-(ca)(bc)=-c(ab)c=c(ba)c=-(bc)(ac),$$

$$(ab)(bc)=(ba)(cb)=b(ac)b=-b(ca)b=-(bc)(ab).$$

Для доказательства оставшегося соотношения применим лемму 1.

$$(ac)[a(bc)]=-(ac)[a(cb)]=(ac)[(ac)b]=-[(ac)b](ac)=$$

$$=[(ab)c](ac)=-[a(bc)](ac).$$

Лемма 3. *Если элемент* $u$ *тела* $K$ *коммутирует со всеми элементами специальной тройки, то он коммутирует и с элементами* $a, b, c, ab, ac, bc, a(bc)$.

Следует из леммы 4 § 1 и леммы 2 настоящего параграфа.

Лемма 4. *Если элементы* $a, b, c$ *образуют специальную тройку, то элементы* $1, a, b, c, ab, ac, bc, a(bc)$ *линейно независимы над* $T=K^a\cap K^b\cap K^c$.

Пусть

$$\alpha+\beta a+\gamma b+\delta c+\varepsilon ab+\lambda ac+\mu bc+\nu a(bc)=0,\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\lambda,\mu,\nu\in T.\quad (i)^{*)}$$

---

*) В доказательстве леммы 4 для однообразия следовало бы всюду заменить *i* на I, *ii* на II, но тогда требуется больше поправок (три).

Умножим ($i$) на $a$ сначала слева, а потом справа, и результаты сложим. Ввиду леммы 2 настоящего параграфа и леммы 3 § 1 в слагаемых не появится новых скобок, и мы получим

$$2\alpha a + 2\beta a^2 = 0. \tag{ii}$$

Далее легко видеть, что $a^2 b = ba^2$. Отсюда ввиду леммы 11 § 1 $[\beta, a^2 b] = 0$. Поэтому после умножения ($ii$) справа и слева на $b$ и сложения полученных результатов будем иметь $4\beta a^2 b = 0$, откуда $\beta = 0$, а значит $\alpha = 0$.

Аналогичными методами доказывается равенство нулю остальных коэфициентов, поскольку ввиду леммы 4 § 1 элементы из $T$ коммутируют со всеми указанными в формулировке элементами.

Лемма 5. *Если $a$, $b$, $c$ — специальная тройка, то элементы* 1, $a$, $b$, $c$, $ab$, $ac$, $bc$, $a(bc)$ *образуют базу подтела $P(a, b, c)$ тела $K$ над полем $P(a^2, b^2, c^2)$.*

Из леммы 3 вытекает, что $a^2$, $b^2$, $c^2$ коммутируют со всеми указанными элементами. По лемме 3 § 1 $[a^2, b, c] = 0$. Отсюда с помощью обобщенной теоремы Артина*) следует, что $P(a^2, b^2, c^2)$ является полем. Индукция, проводимая по длине слова с помощью леммы 10 §1, показывает, что все элементы из $P(a^2, b^2, c^2)$ коммутируют со всеми элементами, приведенными в формулировке теоремы.

Теперь составим следующую таблицу умножения:

| $1$ | $a$ | $b$ | $c$ | $ab$ | $ac$ | $bc$ | $a(bc)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a^2$ | $ab$ | $ac$ | $a^2b$ | $a^2c$ | $a(bc)$ | $a^2(bc)$ |
| $b$ | $-ab$ | $b^2$ | $bc$ | $-b^2a$ | $-a(bc)$ | $b^2c$ | $-b^2(ac)$ |
| $c$ | $-ac$ | $-bc$ | $c^2$ | $a(bc)$ | $-c^2a$ | $-c^2b$ | $c^2(ab)$ |
| $ab$ | $-a^2b$ | $b^2a$ | $-a(bc)$ | $-a^2b^2$ | $a^2(bc)$ | $-b^2(ac)$ | $a^2b^2c$ |
| $ac$ | $-a^2c$ | $a(bc)$ | $c^2a$ | $-a^2(bc)$ | $-a^2c^2$ | $c^2(ab)$ | $-a^2c^2b$ |
| $bc$ | $-a(bc)$ | $-b^2c$ | $c^2b$ | $b^2(ac)$ | $-c^2(ab)$ | $-b^2c^2$ | $b^2c^2a$ |
| $a(bc)$ | $-a^2(bc)$ | $b^2(ac)$ | $-c^2(ab)$ | $-a^2b^2c$ | $a^2c^2b$ | $-b^2c^2a$ | $a^2b^2c^2$ |

Приведем некоторые менее тривиальные вычисления, которые пришлось сделать при составлении таблицы:

$b(ac) = -a(bc)$ (лемма 5 § 1),

$b[a(bc)] = -b[b(ac)] = -b^2(ac)$ (то же)

$c(ab) = -a(cb) = a(bc)$ (то же)

$c[a(bc)] = -c(ab)c = c^2(ab)$ (лемма 2 настоящего параграфа),

$(ab)(ac) = -(ab)(ca) = -a(bc)a = a^2(bc)$ (то же и формула (3)),

$(ab)(bc) = (ba)(cb) = b(ac)b = -b^2(ac)$ (то же),

*) [6], стр. 417 и § 3.

$$(ac)(bc) = -(ca)(bc) = -c(ab)c = a^2(ab) \qquad \text{(то же)},$$

$$(ab)[a(bc)] = -(ab)[(bc)a] = a(b^2c)a = a^2b^2c \quad \text{(то же и лемма 3 § 1)},$$

$$(ac)[a(bc)] = -(ac)[(bc)a] = a(c^2b)a = -a^2c^2b \qquad \text{(то же)}.$$

При составлении таблицы следует также иметь в виду лемму 2. Из полученной таблицы видно, что $1, a, b, c, ab, ac, bc, a(bc)$ образуют базу кольца, порожденного в $K$ элементами $a, b, c$ и полем $P$ над кольцом, порожденным элементами $a^2, b^2, c^2$ и полем $P$.

Далее, если $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda, \mu, \nu \in P(a^2, b^2, c^2)$, то простое перемножение дает

$$[\alpha + \beta a + \gamma b + \delta c + \varepsilon ab + \lambda ac + \mu bc + \nu a(bc)] \times$$
$$\times [\alpha - \beta a - \gamma b - \delta c - \varepsilon ab - \lambda ac - \mu bc - \nu a(bc)] =$$
$$= \alpha^2 - \beta^2a^2 - \gamma^2b^2 - \delta^2c^2 - \varepsilon^2a^2b^2 + \lambda^2a^2c^2 + \mu^2b^2c^2 - \nu^2a^2b^2c^2 = \Delta.$$

Ясно, что $\Delta \in P(a^2, b^2, c^2)$, а из леммы 4 видно, что $\Delta \neq 0$, если хотя бы один из коэфициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda, \mu, \nu$ отличен от нуля. Отсюда вытекает, что и обратные элементы выражаются через элементы базы, а значит $P(a, b, c)$ является телом конечного ранга над полем $P(a^2, b^2, c^2)$.

Л е м м а 6. *Поле $P(a^2, b^2, c^2)$ есть центр тела $P(a, b, c)$.*

Пусть $z = \alpha + \beta a + \gamma b + \delta c + \varepsilon ab + \lambda ac + \mu bc + \nu a(bc)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda, \mu, \nu \in P(a^2, b^2, c^2)$, входит в центр тела $P(a, b, c)$. Тогда ввиду леммы 2.

$$0 = [a, z] = 2\gamma ab + 2\delta ac + 2\varepsilon a^2b + 2\lambda a^2c + 2\mu a(bc) + 2\nu a^2(bc),$$

откуда в силу леммы 4 $\gamma = \delta = \varepsilon = \lambda = \mu = \nu = 0$. Но элемент $z = \alpha + \beta a$ может коммутировать с $b$ лишь при $\beta = 0$, откуда $z = \alpha \in P(a^2, b^2, c)$.

Л е м м а 7. *Тело $P(a, b, c)$ порожденное специальной тройкой $a, b, c$ есть тело Кэли-Диксона*) над $P(a^2, b^2, c^2)$.*

Согласно лемме 6 тело $P(a, b, c)$ является неассоциативным телом конечного ранга и потому согласно Шаферу **), является телом Кэли-Диксона над своим центром $P(a^2, b^2, c^2)$.

---

*) Алгебра $C$ называется алгеброй К э л и-Д и к с о н а над полем $P$, если $C = Q + gQ$ с элементами $x = x_1 + gx_2$, где $x_1, x_2$ — кватернионы над $P$, а умножение определяется формулой:

$$(x_1 + gx_2)(y_1 + gy_2) = (x_1y_1 + \gamma y_2 \cdot x_2S) + g(x_1S \cdot y_2 + y_1x_2),$$

где $S$ — инволюция в алгебре кватернионов $Q$, а $g^2 = \gamma \neq 0$ лежит в основном поле.

Алгебра $C$ является телом тогда и только тогда, если в основном поле не существует таких элементов $\lambda, \mu, \varrho, \sigma$, что

$$\gamma = \lambda^2 + \lambda\mu - \alpha\mu^2 - \beta\varrho^2 - \beta\varrho\sigma + \alpha\beta\sigma^2,$$

где $\alpha, \beta$ — элементы, входящие в определение обобщенных кватернионов по Альберту (Albert, Structure of Algebras, NY, 1939, 145): алгебра $Q$ есть алгебра кватернионов, если $Q = P(1, u_2, u_3, u_4)$, причем $u_4 = u_3u_2$, $u_2^2 = u_2 + \alpha$, $u_3^2 = \beta$, $u_2u_3 = u_3(1 - u_2)$, $\alpha, \beta \neq 0$, $-4\alpha \neq 1$ (см. [7], 552).

**) [7]. Теоремы 1 и 2

Л е м м а 8. *Если элемент $u$ тела $K$ коммутирует со всеми элементами специальной тройки $a$, $b$, $c$, то он коммутирует со всеми элементами из $P(a, b, c)$.*

Ясно, что $u$ коммутирует с $a^2$, $b^2$, $c^2$. Индукция, проводимая с помощью леммы 10 § 1, показывает, что $u$ коммутирует со всеми элементами из $P(a^2, b^2, c^2)$. Так как в силу леммы 3 $u$ коммутирует со всеми элементами базы $P(a, b, c)$ над $P(a^2, b^2, c^2)$, то из леммы 10 § 1 следует утверждение леммы.

Л е м м а 9. *Если $a, b, c$ — специальная тройка, то тройки $a, b, (ab)c$; $ab, c, b$; $a, bc, b$; $b, c, a$ — также являются специальными.*

Так как $(ab)c = -a(bc)$, то антикоммутативность вытекает из леммы 2. Справедливость последнего соотношения, входящего в определение специальной тройки, проверяется элементарным подсчетом, проводимым с помощью таблицы умножения, приведенной в доказательстве леммы 5.

Л е м м а 10. *Если $ab = -ba$ и $c = [a, b, d] \neq 0$, то $a$, $b$, $c$ — специальная тройка.*

Антикоммутативность сразу вытекает из леммы 1 § 1.

Далее, формула (8) дает

$$ac = a[a, b, d] = -a[a, d, b] = [da, a, b],$$

откуда с помощью леммы 1 § 1 получаем $b(ac) = -(ac)b$, после чего из леммы 6 § 1 имеем: $[b, a, c] = [ac, b] = 2(ac)b$. Значит, $b, a, c$ — специальная тройка, и из леммы 1 вытекает справедливость настоящей леммы.

## § 4. ПОДТЕЛА КЭЛИ-ДИКСОНА

Т е о р е м а 2. *Пусть $a, b, c$ — специальная тройка тела $K$ и поэтому $C = P(a, b, c)$ — тело Кэли-Диксона над $P(a^2, b^2, c^2)$. Если элемент $d$ из $K$ таков, что $[a, b, d] \neq 0$, то*

$$d = \alpha + \beta a + \gamma b + \delta c + \varepsilon ab + \lambda ac + \mu bc + \nu a(bc),$$

*где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda, \mu, \nu \in K^C$.*

Л е м м а 1. *Если $a, b, c$ и $a, b, d$ — специальные тройки, то*

$$c^2 d = dc^2.$$

Из (6) следует

$$[a, c^2, t] = [b, c^2, t] = 0, \tag{I}$$

где $t$ — произвольный элемент из $K$.

Далее, с помощью (I) получаем

$$[a, d, b]c^2 = [(ad)b]c^2 - [a(db)]c^2 = (ad)(bc^2) - a[(db)c^2] =$$
$$= (ad)(bc^2) - a[d(bc^2)] = [a, d, bc^2]$$

и

$$c^2(a, d, b] = -c^2[b, d, a] = -c^2[(bd)a] + c^2[b(da)] =$$
$$= -[(c^2b)d]a + (c^2b)(da) = -[c^2b, d, a] = [a, d, c^2b]$$

Так как $bc^2=c^2b$, сравнение полученных результатов дает

$$[d, a, b]c^2=c^2[d, a, b]. \tag{II}$$

Из (8), помня (I), а также $ad=-da$, $bc^2=c^2b$, получим

$$d[da, d, bc^2]=d[d, c^2b, da]=-[c^2bd, d, da]=[d, ad, c^2bd]$$

и

$$d[c^2bd, d, a]=d[d, a, c^2bd]=-[ad, d, c^2bd]=[d, ad, c^2bd].$$

Отсюда

$$[da, d, bc^2]=[c^2bd, d, a]. \tag{III}$$

Теперь используем (3), (I), а также $bd=-db$

$$[da, c^2, db]=[(da)c^2](db)-(da)[c^2(db)]=-[d(ac^2)](bd)+$$
$$+(da)[(c^2b)d]=-d(ac^2b)d+d(ac^2b)d=0.$$

Таким образом

$$[da, c^2, db]=0. \tag{IV}$$

Ввиду (I), из формулы (9) имеем

$$[c^2, db, d]=[db, d, c^2]=[d, b, c^2]d=0. \tag{V}$$

Теперь используем (5), (I) и (IV):

$$[da, db]c^2=[dad, b, c^2]-[da, db, c^2]+[da, d, bc^2]-$$
$$-(da)[d, b, c^2]=[da, d, bc^2].$$

Кроме того, (7), (5), (I), (IV), (V) дают

$$c^2[da, d, b]=-c^2[d, a, db]=-c^2[db, d, a]=$$
$$=[c^2, db, d]a-[c^2db, d, a]+[c^2, dbd, a]-[c^2, db, da]=[c^2bd, d, a].$$

Отсюда ввиду (III)

$$[da, d, b]c^2=c^2[da, d, b]. \tag{VI}$$

Из (9) следует

$$d=-([d, a, b])^{-1}[da, d, b]. \tag{VII}$$

Положим $u=[d, a, b]$, $v=[da, d, b]$.

Так как $bd=-db$, то по лемме 1 § 1 $ud=-du$, $dv=-vd$ и значит $u^{-1}d=-du^{-1}$. Отсюда, поскольку

$$d=-u^{-1}v, \tag{VIII}$$

получаем

$$u^{-1}d=-u^{-2}v=u^{-1}vu^{-1}. \tag{IX}$$

Так как согласно (II) $u^{-1}c^2=c^2u^{-1}$, а согласно (VI) $vc^2=c^2v$, то из (VIII) и (IX), ввиду леммы 4 § 1, следует

$$dc^2=c^2d.$$

Лемма 2. *Если $a, b, c$ и $a, b, d$ — специальные тройки, то $d=\alpha c+$ $+\beta ac+\gamma bc+\delta a(bc)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in K^C$.*

Ввиду леммы 1 и леммы 7 § 1 имеем

$$cd+dc=\lambda\in K^a\cap K^b\cap K^c\cap K^d;$$

поэтому из леммы 8 § 3 следует, что $\lambda \in K^C \cap K^d$. Если теперь положить $d' = d - \frac{\lambda c^{-1}}{2}$, то, приняв во внимание лемму 3 § 1, нетрудно проверить, что

$$ad' + d'a = bd' + d'b = cd' + d'c = 0.$$

Теперь, аналогично предыдущему, положим

$$(ac)\,d' + d'\,(ac) = \mu.$$

Как и раньше, ввиду леммы 7 § 1 и леммы 8 § 3 следует, что $\mu \in K^C \cap K^{d'}$. Положим далее $d'' = d' - \frac{\mu\,(ac)^{-1}}{2}$. Тогда, приняв во внимание те же самые леммы, а также лемму 2 § 3, нетрудно проверить следующие равенства:

$$ad'' + d''a = bd'' + d''b = cd'' + d''c = (ac)\,d'' + d''\,(ac) = 0.$$

Точно так же:

$$(bc)\,d'' + d''\,(bc) = \nu \in K^C \cap K^{d''},$$

$$d''' = d'' - \frac{\nu\,(bc)^{-1}}{2},$$

$$ad''' + d'''a = bd''' + d'''b = cd''' + d'''c = (ac)\,d''' + d'''\,(ac) = (bc)\,d''' + d'''\,(bc) = 0,$$

и, наконец,

$$[a\,(bc)]\,d''' + d'''\,[a\,(bc)] = \sigma \in K^C \cap K^{d'''},$$

$$d^{IV} = d''' - \frac{\sigma\,[a\,(bc)]^{-1}}{2},$$

$$ad^{IV} + d^{IV}a = bd^{IV} + d^{IV}b = cd^{IV} + d^{IV}c = (ac)\,d^{IV} + d^{IV}\,(ac) = (bc)\,d^{IV} + d^{IV}\,(bc) =$$

$$= [a\,(bc)]\,d^{IV} + d^{IV}\,[a\,(bc)] = 0. \tag{X}$$

Отсюда по лемме 6 § 1

$$[d^{IV},\, a,\, bc] = [a\,(bc),\, d^{IV}] = 2\,[a\,(bc)]\,d^{IV}. \tag{XI}$$

Так как ввиду леммы 11 § 1

$$d^{IV} = d - \frac{\lambda c^{-1}}{2} - \frac{\mu\,(ac)^{-1}}{2} - \frac{\nu\,(bc)^{-1}}{2} - \frac{\sigma\,[a\,(bc)]^{-1}}{2} =$$

$$= d - \frac{\lambda c^{-2}}{2}\,c - \frac{\mu\,(ac)^{-2}}{2}\,ac - \frac{\nu\,(bc)^{-2}}{2}\,bc - \frac{\sigma\,[a\,(bc)]^{-2}}{2}\,[a\,(bc)], \tag{XII}$$

то из леммы 2 § 3 и лемм 3 и 10 § 1, применяя таблицу умножения, приведенную в § 3, можно проверить, что

$$(ad^{IV})\,b = -\,b\,(ad^{IV}),$$

после чего, применяя несколько раз лемму 5 § 1 и соотношения из (X), получим

$$d^{IV}[a(bc)] = -d^{IV}[b(ac] = b[d^{IV}(ac)] = -b[(ac)d^{IV}] = b[(ad^{IV})c] =$$
$$= -(ad^{IV})(bc) = (d^{IV}a)(bc), \quad \text{то есть} \quad [d^{IV}, a, bc] = 0.$$

Отсюда ввиду (XI) следует, что $d^{IV} = 0$. Если теперь положить $\alpha = \frac{\lambda c^{-2}}{2}$, $\beta = \frac{\mu(ac)^{-2}}{2}$, $\gamma = \frac{\nu(bc)^{-2}}{2}$, $\delta = \frac{\sigma[a(bc)]^{-2}}{2}$, то, поскольку $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\sigma$ и все квадраты входят в $K^C$, лемма 10 § 1 показывает, что $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta \in K^C$, чем, ввиду (XII), заканчивается доказательство леммы.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть $u = [a, b, d] \neq 0$. По лемме 10 § 3 тройка $a$, $b$, $u$ оказывается специальной. Лемма 9 § 3 обеспечивает специальность тройки $a$, $b$, $(ab)u$, и мы имеет: $[a, b, (ab)u] = 2(ab)^2u$. Отсюда

$$[a, b, (ab)^{-1}u) = (ab)^{-2}\,[a, b, (ab)u] = 2u = [a, b, 2d],$$

то есть

$$[a, b, 2d - (ab)^{-1}u] = 0. \tag{XIII}$$

Положим $(ab)^{-1}u = v$, $2d - v = w$. Тогда (XIII) перепишется в виде

$$[a, b, w] = 0. \tag{XIV}$$

Теперь с помощью леммы 5 § 1 и соотношения (XIV) вычислим

$$[a, b, cw] = (ab)(cw) - a[b(cw)] = -c[(ab)w] - c[a(bw)] =$$
$$= -2c[(ab)w] = 2(ab)(cw).$$

Положим $[a, b, cw] = u'$. Тогда можно записать:

$$u' = 2(ab)(cw) + 2(ab)(cv) - 2(ab)(cv),$$

откуда

$$2(ab)[c(w+v)] = u' + 2(ab)(cv),$$
$$4d = c^{-1}[(ab)^{-1}u'] + 2(ab)^{-1}u. \tag{XV}$$

Из леммы 10 § 3 и леммы 2 вытекает

$$u = \alpha c + \beta ac + \gamma bc + \delta a(bc),$$

$$u' = \lambda c + \mu ac + \nu bc + \varrho a(bc),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \varrho \in K^C$. Если теперь подставить полученные выражения для $u$ и $u'$ в (XV), то, ввиду лемм 3 и 10 § 1 и леммы 2 § 3, с помощью таблицы умножения из § 3 нетрудно завершить доказательство теоремы.

Теорема 3. *Если в альтернативном теле $K$ с центром $P$ существует подтело Кэли-Диксона $C = P(a, b, c)$ над $P(a^2, b^2, c^2)$ ($a$, $b$, $c$ — специальная тройка), то $K = C \times K^C$, причем $K^C$ или совпадает с $P$ или является неассоциативным телом, а $P(a^2, b^2, c^2) = P$.*

Лемма. *Всякий элемент в $K$ имеет вид, указанный в теореме 2.*

Пусть элемент $t$ из $K$ не имеет указанного вида. Если вспомнить леммы 9 и 7 из § 3, то из теоремы 2 следует $[b, c, t]=[ab, c, t]=[a, bc, t]=[a, b, ct]=0$, после чего формула (5) дает $[a, b, c]t=0$, откуда $t=0$.

Переходя к доказательству теоремы, заметим, что, если $\lambda, \mu \in K^C$, а $x, y$ — какие-либо два из элементов $a, b, c, ab, ac, bc, a(bc)$, то из леммы 3 § 1 следует

$$[x, \lambda y, \mu] = 0. \tag{I}$$

Применив (5), установим

$$[\lambda, x, \mu] y = -\lambda[x, \mu, y] + [\lambda x, \mu, y] - [\lambda, x\mu, y] + [\lambda, x, \mu y] = 0,$$

то есть

$$[\lambda, \mu, x] = 0. \tag{II}$$

Отсюда с помощью леммы 8 § 3 получаем, что $\lambda\mu \in K^C$ и значит $K^C$ является телом.

Из леммы настоящей теоремы и леммы 10 § 1 следует, что $a^2, b^2, c^2 \in P$, ибо они коммутируют со всеми элементами $K$.

Соотношения (I) и (II) вместе с леммами 3 § 1 и 2 § 3 дают:

$$(\lambda x)(\mu y) = -[(\lambda x)\mu] y = [(x\lambda)\mu] y = [x(\lambda\mu)] y = (\lambda\mu)(xy).$$

Полученное равенство и лемма показывают, что $K = C \times K^C$.

Теперь предположим, что $K^C$ ассоциативно. Тогда согласно (5) и (II)

$$[\lambda, \mu, \nu t] = [\lambda, \mu, \nu] t = 0, \quad \lambda, \mu, \nu \in K^C, \quad t \in K. \tag{III}$$

Из (I) и (III) с помощью (5) получаем

$$[\lambda, \mu x, \nu y] = -[\lambda\mu x, \nu, y] + [\lambda, \mu x\nu, y] + \lambda[\mu x, \nu, y] + [\lambda, \mu x, \nu] y = 0,$$

$\lambda, \mu, \nu \in K^C$, $x, y$ — те же, что и в начале доказательства.

Поэтому $\left[\lambda, \sum\limits_{i=1}^{8} \mu_i x_i, \sum\limits_{j=1}^{8} \nu_j x_j\right] = 0$, то есть $\lambda$ входит в ассоциативный центр тела $K$, совпадающий, ввиду теоремы 1, с $P$. Значит $K^C = P$, откуда $K = C$.

Теорема 4. *Если в альтернативном теле $K$ в центре $P$ существуют такие элементы $a, b, c$, что $ab = -ba$ и $u = [a, b, c] \neq 0$, то в $K$ содержится тело Кэли-Диксона над $P$.*

Вытекает из лемм 10 и 7 § 3 и теоремы 3.

Теорема 5. *Если в неассоциативном альтернативном теле $K$ существует пара ненулевых антикоммутативных элементов, то в $K$ содержится тело Кэли-Диксона над $P$.*

Пусть элементы $a, b \in K$ таковы, что для любого $t \in K$ $[a, b, t] = 0$. Тогда для этих элементов справедливы следующие леммы:

Лемма 1. *Для любых $c, d \in K$*

$$[[a, b], c, d] - [a, [b, c], d] = [a, [b, c, d]].$$

Из формулы (5) мы получаем

$$[ab, c, d]-[a, bc, d]=a[b, c, d], \tag{I}$$

$$-[d, cb, a]+[d, c, ba]=[d, c, b]a. \tag{II}$$

Переписав (II) в виде:

$$[ba, c, d]-[a, cb, d]=[b, c, d]a \tag{III}$$

и вычитая (III) из (I), имеем

$$[[a, b], c, d]-[a, [b, c], d]=[a, [b, c, d]].$$

Л е м м а 2. *Для любых* $c, d \in K$

$$[[a, d], b, c]=[[b, c, d], a].$$

Снова применяем (5)

$$[da, b, c]-[d, ab, c]+[d, a, bc]=0. \tag{IV}$$

Перестановка $a c b$ и $c c d$ дает

$$[cb, a, d]-[c, ba, d]+[c, b, ad]=0,$$

что равносильно

$$[ad, b, c]-[d, ba, c]+[d, a, cb]=0. \tag{V}$$

Вычитая (V) из (IV), получим

$$-[[a, d], b, c]-[d, [a, b], c]+[d, a, [b, c]]=0,$$

откуда

$$[[a, b], c, d]-[a, [b, c], d]=-[[a, d], b, c].$$

Применение леммы 1 дает искомую формулу.

Л е м м а 3. *Для любых* $c, d \in K$

$$[a, [b, c, d]]=[b, [a, c, d]].$$

Используя формулу (5), получим

$$[ac, d, b]+[a, c, db]=a[c, d, b]+[a, c, d]b,$$

$$[bd, c, a]+[b, d, ca]=b[d, c, a]+[b, d, c]a.$$

Складываем и меняем знаки:

$$[[b, d], a, c]+[[a, c], b, d]=[a, [b, d, c]]+[b, [a, c, d]]. \tag{VI}$$

Заменяем левую часть (VI) по формуле леммы 2:

$$[[a, c, d], b]+[[b, d, c], a]=0,$$

или

$$[a, [b, c, d]]=[b, [a, c, d]].$$

Л е м м а 4. $[a, b]$ *входит в центр тела* $K$.

Ввиду лемм 3 и 2

$$[a, [b, c, d]]=[b, [a, c, d]]=[[a, d, c], b]=[[b, c], a, d]=-[a, [b, c], d].$$

Лемма 1 дает

$$[[a, b], c, d]=0.$$

Таким образом $[a, b]$ входит в ассоциативный центр, а значит, в силу теоремы 1, и в центр $P$.

Лемма 5. *Если* $ab = -ba$, $a, b \in K$, $a, b \neq 0$, *то найдется такой элемент* $c \in K$, *что* $[a, b, c] \neq 0$.

Если такого элемента не существует, то, согласно лемме 4, $\frac{1}{2}[a, b] = ab$ входит в центр, но $(ab)a = -a(ab)$.

Теперь утверждение теоремы сразу следует из теоремы 4.

Теорема 6. *Если в неассоциативном альтернативном теле* $K$, *отличном от тела Кэли-Диксона над* $P$, *существует пара отличных от нуля антикоммутативных элементов, то оно разлагается над своим центром* $P$ *в прямое произведение тела Кэли-Диксона и неассоциативного тела, не содержащего подтел Кэли-Диксона.*

Ввиду теоремы 5 в $K$ имеется подтело Кэли-Диксона $C$, а по теореме 3 $K = C \times K^C$. Пусть в $K^C$ содержится тело Кэли-Диксона $C'$ над некоторым центром $Z$. Так как $Z$ включается в $K^C$, то $Z$ является полем, коммутирующим со всеми элементами из $C$, и поэтому $C$ может быть расширено внутри $K$ до тела Кэли-Диксона $C'' = C \times Z$ с центром $Z$. Тогда, ввиду теоремы Тихомирова*) $C'' \times_Z C'$ является простой неассоциативной альтернативной алгеброй конечного ранга над $Z$. Нетрудно проверить, что она центральна над $Z$. Действительно, пусть $t$ входит в центр алгебры $C'' \times C'$. Ясно, что $t \in K^C$, а тогда $t \in (K^C)^{C'} = Z$.

Значит, согласно Шаферу**), $C'' \times C'$ является алгеброй Кэли-Диксона и должна иметь ранг 8 над своим центром $Z$, в то время как на самом деле ее ранг равен 64.

## § 5. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Теорема 7. *Если в альтернативном теле* $K$ *не существует ни одной пары отличных от нуля антикоммутативных элементов, то* $K$ *ассоциативно.*

Пусть $u = [a, b, c] \neq 0$.

Из формул (8) и (10) следует

$$c[a^2, b, c] = -c[c, b, a^2] = [bc, c, a^2] = [a^2, bc, c] = \\ = a[a, bc, c] + [a, bc, c]a = a(cu) + (cu)a. \tag{I}$$

С другой стороны, (10) дает

$$c[a^2, b, c] = c(au) + c(ua). \tag{II}$$

Сравнивая (I) и (II), получаем

$$a(cu) + (cu)a = c(au) + c(ua),$$

откуда

$$[c, u, a] = c(au) + a(cu). \tag{III}$$

---

*) [2]. Теорема 2.

**) См. сноску по стр. 76.

Так как

$$[c, u, a] = -[c, a, u] = -(ca)u + c(au),$$

то (III) дает

$$a(cu) = (ca)u.$$

Отсюда

$$[a, c, u] = (ac)u - a(cu) = (ac)u - (ca)u = [a, c]u. \qquad \text{(IV)}$$

Из аналогичных соображений, только используя (9) вместо (8), получаем следующий ряд равенств:

$$[a^2, b, c]c = a(uc) + (uc)a,$$

$$[a^2, b, c]c = (au)c + (ua)c,$$

$$[a, u, c] = (uc)a - (ua)c,$$

$$[a, u, c] = -[u, a, c] = -(ua)c + u(ac),$$

$$(uc)a = u(ac), \qquad \text{(V)}$$

$$[u, c, a] = (uc)a - u(\ a) = u[a, c]. \qquad \text{(VI)}$$

Сравнивая (IV) и (V), получаем

$$[a, c]u = -u[a, c]. \qquad \text{(VII)}$$

Так как по предположению в теле не существует ни одной пары ненулевых антикоммутативных элементов, то из (VI) следует, что $[a, c] = 0$.

Теми же рассуждениями можно получить $[a, b] = 0$ и $[b, c] = 0$. Но тогда из леммы 11 § 1 вытекает, что $u = [a, b, c] = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Основная теорема. *Всякое альтернативное тело $K$, характеристика которого отлична от 2 и 3, или ассоциативно, или же является телом Кэли-Диксона над своим центром.*

Пусть тело $K$ неассоциативно. Тогда, согласно теоремам 7 и 6, $K = C \times K^C$, где $C$ — тело Кэли-Диксона. В $K^C$ нет ненулевых антикоммутативных элементов, ибо оно не содержит подтел Кэли-Диксона. По теореме 7 $K^C$ — ассоциативно, что ввиду теоремы 6 невозможно. Значит $K = C$.

## § 6. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Холлом*) была поставлена проблема: „Будет ли альтернативная плоскость транзитивна относительно четырехвершинников?“. Эта проблема равносильна следующей: „Изоморфны ли все натуральные тела одной и той же альтернативной проективной плоскости?“ **). Автором настоящей статьи было показано***), что все натуральные тела одной и той же

*) [3], теорема 6.4.

**) [1], п. 36, 37.

***) [1], п. 35.

альтернативной проективной плоскости изотопны. Отсюда, ввиду основной теоремы настоящей статьи и теоремы Шафера*), следует положительный ответ на эти вопросы для случая, когда характеристика отлична от 2 и 3, поскольку для дезарговых плоскостей (ассоциативных тел) этот факт хорошо известен**).

Теорема. *Если характеристика альтернативной плоскости отлична от 2 и 3, то эта плоскость транзитивна относительно четырехвершинников, а все ее натуральные тела изоморфны между собой.*

---

ЛИТЕРАТУРА

1. Скорняков Л. А., Натуральные тела веблен-веддербарновой проективной плоскости, Изв. АН СССР (сер. матем.), т. 13 (1949), 447—472.

2. Тихомиров А. И., Новое доказательство одной теоремы о простых кольцах. Изв. АН СССР (сер. матем.), т. 8 (1944), 139—142.

3. Hall M., Projective planes, Trans. of the Am. Math. Soc., v. 54 (1943), 229—277.

4. Jacobson N., Structure theory for algebraic algebras, Ann. of Math, v. 46 (1945), 695—707.

5. Moufang R., Alternativkörper und der Satz von vollsändiger Vierseit, Hamb. Abhandlungen, Bd. 9 (1932), 207—222.

6. Moufang R., Struktur von Alternativkörper, Math. Ann., Bd. 110 (1934), 416—430.

7. Schafer R., Alternative algebras over an arbitrary field, Bull. of the Am. Math. Soc., v. 49 (1943), 549—555.

8. Smiley M., Alternative rings without nilpotent elements, Bull. of the Am. Math. Soc., v. 53 (1947), 775—778.

9. Zorn M., Theory der alternativen Ringen, Hamb. Abhandlungen, Bd. 8 (1930), 123—147.

10. Zorn M., Alternative rings, An. of Math., v. 42 (1941), 676—686.

Поступила 28. X 1949.

---

*) [7], теорема 4.

**) См., например, [1], п. 36.