1950 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. II, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Потенциальное поле наэлектризованной сферы с двумя отверстиями

К. А. Бреус

В настоящей статье дается решение граничной задачи теории потенциала для наэлектризованной сферы с двумя отверстиями. Применяя соответствующим образом выбранную систему циклидических координат, решение уравнения потенциала приводится к интегрированию системы обыкновенных диференциальных уравнений. Поверхность сферы с двумя отверстиями получается как предельный случай поверхности вращения циклидических кривых, которые в плоскости (z, r) комплексного переменного определяются как кривые $u=\text{const}$ или $v=\text{const}$ из уравнения

$$z+ir=i\frac{1-\text{cn}\,(u+iv)}{\text{sn}\,(u+iv)},$$

причем эти кривые имеют вид

$$(z^2+r^2)^2+A\,(z^2+r^2)+Bz^2+Cr^2+D=0.$$

§ 1. ГЕОМЕТРИЯ ЦИКЛИДИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Рассмотрим в плоскости комплексного переменного (z, r) семейство кривых, определяемых уравнением

$$z+ir=i\frac{1-\text{cn}\,(u+iv)}{\text{sn}\,(u+iv)}, \tag{1}$$

где sn и cn — эллиптические функции Якоби с модулем k, который не будем явно обозначать; u и v будем рассматривать как вещественные переменные.

Прежде всего, из уравнения (1), отделяя действительную и мнимую части, имеем

$$z=-\frac{\text{dn}\,u\,\text{sn}\,(v,\,k')}{1+\text{cn}\,u\,\text{cn}\,(v,\,k')},\quad r=\frac{\text{sn}\,u\,\text{dn}\,(v,\,k')}{1+\text{cn}\,u\,\text{cn}\,(v,\,k')}, \tag{2}$$

где k' — дополнительный модуль функций Якоби, связанный с k соотношением $k'^2+k^2=1$.

Далее, имеем

$$|z+ir|=\sqrt{\frac{1-\text{cn}\,u\,\text{cn}\,(v,\,k')}{1+\text{cn}\,u\,\text{cn}\,(v,\,k')}}. \tag{3}$$

Из равенства (3), при условии стремления $|z+ir|$ к бесконечности, получаем

$$u \to 0, \quad v \to 2K',$$

или

$$v \to 0, \quad u \to 2K' \text{ (с точностью до кратности периодов).}$$

K и K' — полные эллиптические интегралы для модулей k и k'.

Исследуем кривые, определяемые равенствами (2). При $u=0$ и произвольном v имеем

$$z = -\frac{\operatorname{sn}(v, k')}{1+\operatorname{cn}(v, k')}, \quad r=0,$$

и при изменении v от нуля до $\pm K'$ z пробегает все значения от 0 до ∓ 1; для $v=-K'$, $z=1$ (точка C). Если же $v=+K'$, $z=-1$ (точка G) (рис. 1).

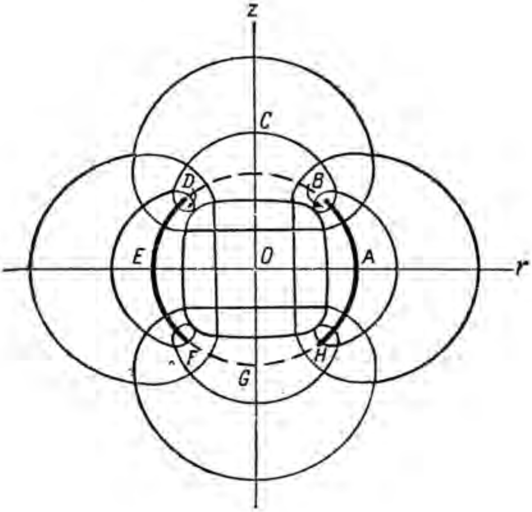

Рис. 1.

При изменении v от K' до $2K'$ z изменяется от -1 до $-\infty$, а при изменении v от $-K'$ до $-2K'$ изменяется от 1 до ∞.

Вообще, при $u=\text{const}$ и при изменении v от $-K'$ до $+K'$ получаем замкнутые циклидические кривые, симметрично расположенные как относительно оси r, так и оси z. Для $u=K$ эти кривые вырождаются в дугу BAH круга единичного радиуса с центром в начале координат.

Действительно, в этом случае имеем

$$z = -k' \operatorname{sn}(v, k'), \quad r = \operatorname{dn}(v, k')$$

и далее

$$z^2+r^2=k'^2\,\mathrm{sn}^2(v,k')+\mathrm{dn}^2(v,k')=1.$$

При $u=-K$ и при изменении v от $-K'$ до $+K'$ эти же кривые вырождаются в дугу DEF того же круга единичного радиуса.

Для значений u, равных $+K$ и $-K$, и значений v, соответственно равных $+K'$ и $-K'$, получаем такие точки на круге (рис. 1):

$$\begin{aligned}
&\text{при } u=K, \quad v=-K' \text{ имеем } z=k', \quad r=k \quad (\text{точка } B)\\
&\text{„} \quad u=K, \quad v=+K' \quad \text{„} \quad z=-k', \ r=k \quad (\text{точка } H)\\
&\text{„} \quad u=-K, \ v=+K' \quad \text{„} \quad z=-k', \ r=-k \ (\text{точка } F)\\
&\text{„} \quad u=-K, \ v=-K' \quad \text{„} \quad z=k', \quad r=-k \ (\text{точка } D).
\end{aligned} \tag{a}$$

Для $u=K$ и $v=0$ получаем $z=0$, $r=1$ (точка A) и для $u=-K$, $v=0$ получаем $z=0$, $r=-1$ (точка E).

При $v=0$ и произвольном u имеем

$$z=0, \ \ r=\frac{\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}.$$

При изменении u от $-K$ до $+K$, когда $v=0$, r изменяется от -1 до $+1$.

При $v=\mathrm{const}$ и произвольном u, изменяющемся от $-K$ до $+K$, в плоскости (z, r) получаем кривые, симметрично расположенные относительно обеих координатных осей, которые для $v=\pm K'$ вырождаются в дуги FGH и BCD круга единичного радиуса с центром в начале координат.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В ЦИКЛИДИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим уравнение Лапласа для случая пространственных задач, удовлетворяющих условиям симметрии относительно оси вращения.

Рассматривая ось z в декартовской системе координат (x, y, z) как ось симметрии задачи, введем в плоскости (x, y) полярные координаты (r, φ). Плоскость (z, r) будем рассматривать как плоскость комплексного переменного $z+ir$; введем в этой плоскости новые криволинейные ортогональные координаты (u, v), связанные с предыдущими с помощью равенства

$$z+ir=i\,\frac{1-\mathrm{cn}\,(u+iv)}{\mathrm{sn}\,(u+iv)}.$$

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах для случая осевой симметрии, как известно, имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0, \tag{4}$$

где w — потенциальная функция. После введения в (4) переменных (u, v) получаем

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(r\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(r\frac{\partial w}{\partial v}\right)=0 \tag{5}$$

и после подстановки

$$\sqrt{r} \cdot w = \psi \tag{6}$$

получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{\mu^2}{u} \psi = 0, \tag{7}$$

где

$$\mu^2 = \left(\frac{\partial \lg r}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lg r}{\partial v}\right)^2. \tag{8}$$

Вычислим теперь μ^2 для рассматриваемого случая криволинейных координат (u, v) по формулам (2).

Имеем

$$\mu^2 = \frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u} + \frac{k'^2\, \mathrm{cn}^2 (v, k')}{\mathrm{dn}^2 (v, k')}. \tag{9}$$

Подставляя полученное значение для μ^2 в уравнение (7), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u} + \frac{k'^2\, \mathrm{cn}^2 (v, k')}{\mathrm{dn}^2 (v, k')}\right] \psi = 0. \tag{10}$$

Последнее уравнение позволяет интегрирование разделением переменных. Действительно, положив в последнем уравнении

$$\psi (u, v) = \psi_1 (u) \cdot \psi_2 (v), \tag{11}$$

получим

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d^2 \psi_1}{du^2} + \frac{1}{\psi_2} \frac{d^2 \psi_2}{dv^2} + \frac{1}{4} \frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u} + \frac{k'^2}{4} \frac{\mathrm{cn}^2 (v, k')}{\mathrm{dn}^2 (v, k')} = 0.$$

Вводя постоянную λ и разделяя переменные, мы приходим окончательно к интегрированию такой системы обыкновенных диференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 \psi_1}{du^2} + \left(\frac{1}{4} \frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u} - \lambda\right) \psi_1 = 0, \tag{12}$$

$$\frac{d^2 \psi_2}{dv^2} + \left(\frac{k'^2}{4} \frac{\mathrm{cn}^2 (v, k')}{\mathrm{dn}^2 (v, k')} + \lambda\right) \psi_2 = 0. \tag{12'}$$

причем λ будем определять из граничных условий задачи (характеристические числа).

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Переходим к исследованию вопроса о распределении потенциального поля, создаваемого проводником, заряженным до некоторого постоянного потенциала, поверхность которого есть поверхность вращения дуги BAH около оси z. Чтобы получить аналитическое выражение распределения потенциала заряженной сферы с двумя отверстиями, мы приходим математически к решению следующей граничной задачи.

Найти регулярное (дважды непрерывно диференцируемое) решение уравнения Лапласа:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,$$

которое на поверхности этого проводника имеет данное конечное значение w_0, а на бесконечности становится равным нулю, причем

$$\lim wR = e,$$

где e — некоторое конечное число (электрический заряд), а

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Решение данной задачи с помощью введенной системы криволинейных координат приводится к интегрированию системы обыкновенных диференциальных уравнений (12) при определенных условиях относительно функций $\psi_1(u)$ и $\psi_2(v)$. Принимая во внимание однозначность потенциальной функции и симметричность задачи, можно утверждать, что существует разложение потенциала в виде

$$w = \frac{\psi(u, v)}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(v, k')}}{\sqrt{\operatorname{sn} u \operatorname{dn}(v, k')}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_{1,n}(u) \psi_{2,n}(v), \tag{13}$$

где $\psi_{1,n}(u)$ и $\psi_{2,n}(v)$ обозначают характеристические функции, соответствующие характеристическому числу λ_n.

Исходя из геометрии циклидических кривых, на поверхности сферы с отверстиями $(u = K)$ имеем

$$w_0 \sqrt{\operatorname{dn}(v, k')} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_{2,n}(v), \tag{14}$$

полагая

$$\psi_{1,n}(K) = 1. \tag{14'}$$

На бесконечности имеем

$$\lim_{|z+ir| \to \infty} w\,|z + ir| = \lim_{n \to 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{cn} u}}{\sqrt{\operatorname{sn} u}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_{1,n}(u) \psi_{2,n}(2K') = e.$$

Кроме того, для определения характеристических чисел λ_n и функций $\psi_{2,n}(v)$ и $\psi_{1,n}(u)$ имеем такие условия: функция $\psi_{2,n}(v)$ должна быть четной, периодической функцией с периодом $2K'$, что соответствует полному обходу по циклидической кривой и однозначности потенциала. Для функции $\psi_{1,n}(u)$, кроме условия (14′), имеем еще условие конечности выражения

$$\lim_{n \to 0} \frac{\psi_{1,n}(u)}{\sqrt{\operatorname{sn} u}}\,.$$

§ 4. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ И ФУНКЦИЙ

Перейдем к определению характеристических чисел и функций уравнения (12′):

$$\frac{d^2\psi_2}{dv^2}+\left(\frac{k'^2}{4}\frac{\mathrm{cn}^2(v,\,k')}{\mathrm{dn}^2(v,\,k')}+\lambda\right)\psi_2=0.$$

Этому уравнению можно придать такой вид:

$$\frac{d^2\psi_2}{dv^2}+(\omega f(v)+\lambda)\psi_2=0,$$

где положено

$$\omega=\frac{k'^2}{4},\quad f(v)=\frac{\mathrm{cn}^2(v,\,k')}{\mathrm{dn}^2(v,\,k')}=\mathrm{sn}^2(v+K',\,k').$$

При определении характеристических чисел и функций этого уравнения нужно принять во внимание, что при ω, стремящемся к нулю, они переходят в характеристические числа и функции уравнения

$$\psi_2''+\lambda\psi_2=0$$

при тех же граничных условиях; имеем

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{K'^2},\qquad \psi_{2,\,n}=\cos n\frac{\pi v}{K'}\qquad (n=0,\,1,\,2,\ldots).$$

Поэтому для определения первой характеристической функции уравнения (12′) полагаем

$$\lambda_0=A\omega+B\omega^2+\ldots$$
$$\psi_{2,0}=1+F_1(v)\,\omega+F_2(v)\,\omega^2+\ldots$$

Подставляя в данное диференциальное уравнение эти выражения и приравнивая нулю коэфициенты при соответствующих степенях ω, получаем выражения для определения A, $B,\ldots$, а также функций $F_1(v)$, $F_2(v),\ldots$.

Для определения $F_1(v)$, таким образом, получаем такое диференциальное уравнение:

$$F_1''+f+A=0.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$F_1'=-\int\limits_0^v f\,dv-Av.$$

Принимая во внимание, что мы ищем решение для $\psi_{2,\,n}(v)$ четное и периодическое с периодом $2K'$, имеем для определения A такое условие:

$$F_1'(K')=-\int\limits^{K'} f\,dv-AK'=0.$$

Откуда

$$A = -\frac{1}{K'}\int_0^{K'} f\,dv = -\frac{1}{K'}\int_0^{K'} \mathrm{sn}^2(v+K',\,k')\,dv =$$

$$= \frac{1}{K'\,k'^2}\left|\frac{\theta'(v+K',\,k')}{\theta(v+K',\,k')} - (v+K')\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}\right|_0^{K'}.$$

Окончательно, для A получаем такое выражение:

$$A = -\frac{1}{k'^2}\,\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}.$$

Подставляя найденное значение A в выражение для F_1', получим

$$F_1' = -\int_0^v f\,dv + \frac{v}{k'^2}\,\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}.$$

Далее, имеем

$$F_1' = \frac{1}{k'^2}\left|\frac{\theta'(v+K',\,k')}{\theta(v+K',\,k')} - (v+K')\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}\right]_0^v + \frac{v}{k'^2}\,\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} =$$

$$= \frac{1}{k'^2}\left[\frac{\theta'(v+K',\,k')}{\theta(v+K',\,k')} - (v+K')\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}\right] + \frac{K'}{k'^2}\,\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} + \frac{v}{k'^2}\,\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}.$$

Окончательно для F_1' получаем такое выражение:

$$F_1' = \frac{1}{k'^2}\,\frac{\theta'(v+K',\,k')}{\theta(v+K',\,k')},$$

откуда

$$F_1 = \frac{1}{k'^2}\int_0^v \frac{\theta'(v+K',\,k')}{\theta(v+K,\,k')}\,dv = \frac{1}{k'^2}\lg\frac{\theta(v+K',\,k')}{\theta(K',k')}.$$

Для определения F_2 получаем уравнение

$$F_2' + (A+f)\,F_1 + B = 0.$$

Согласно вышеуказанным соображениям для B получим такое выражение:

$$B = -\frac{1}{K'}\left[A\int_0^{K'} F_1\,dv + \int_0^{K'} f\,F_1\,dv\right],$$

соответственно для F_2 получим

$$F_2 = -\int_0^v dv\int_0^v f\,F_1\,dv - A\int_0^v dv\int_0^v F_1\,dv - \frac{Bv^2}{2}.$$

Таким образом все последовательные приближения характеристического числа λ_0 и характеристической функции $\psi_{2,0}(v)$ находим последовательными квадратурами.

В общем случае, для произвольного n, полагаем

$$\lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{K'^2} + A\omega + B\omega^2 + \ldots$$

$$\psi_{2,n}(v) = \cos n \frac{\pi v}{K'} + F_1\omega + F_2\omega^2 + \ldots$$

Как и раньше, для определения F_1 получаем уравнение

$$F_1'' + n^2 \frac{\pi^2}{K'^2} F_1 + \cos n \frac{\pi v}{K'} f + A \cos n \frac{\pi v}{K'} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, мы получим

$$F_1 = \frac{K'}{n\pi}\left[\int\limits_0^v \cos n \frac{\pi x}{K'} \sin n \frac{\pi}{K'}(x-v) f(x)\, dx - \frac{A}{2} v \sin n \frac{\pi v}{K'}\right].$$

Коэфициент A находим из условия $F_1'(K') = 0$. Поэтому имеем

$$A = -\frac{2}{K'} \int\limits_0^{K'} \cos^2 n \frac{\pi x}{K'} f(x)\, dx.$$

Дальнейшие приближения λ_n и $\psi_{2,n}(v)$, как легко убедиться, также определяются последовательными квадратурами.

Так, для второго приближения, имеем

$$F_2(v) = \frac{K'}{n\pi}\left[\int\limits_0^v (f(x) + A) \sin n \frac{\pi}{K'}(x-v) F_1(x)\, dx - \frac{1}{2} Bv \sin n \frac{\pi v}{K'}\right],$$

$$B = -\frac{2}{K'} \int\limits_0^{K'} (f(x) + A) \cos n \frac{\pi x}{K'} F_1(x)\, dx.$$

После определения функций $\psi_{2,n}(v)$ коэфициенты разложения в равенстве (14) получаем в виде

$$A_n = w_0 \int\limits_0^{K'} \psi_{2,n}(v) \sqrt{\operatorname{dn}(v, k')}\, dv,$$

считая решения $\psi_{1,n}(v)$ выбранными так, чтобы

$$\int\limits_0^{K'} \psi_{2,n}(v)\, dv = 1.$$

Переходя к интегрированию уравнения (12)

$$\frac{d^2\psi_1}{du^2} + \left(\frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u} - \lambda\right)\psi_1 = 0,$$

в котором λ — одно из характеристических чисел, определенных раньше, заметим, что это уравнение можно привести к уравнению типа Фукса; так, положив

$$\operatorname{sn}^2 u = t,$$

мы приходим к решению такого диференциального уравнения:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{k^2}{k^2t-1}\right)\frac{d\psi_1}{dt} +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\,\frac{1}{t^2(1-k^2t)} + \frac{\lambda}{t(t-1)(1-k^2t)}\right)\psi_1 = 0. \qquad (15)$$

Изменению u от $-K$ до нуля соответствует изменение t от единицы до нуля и, далее, при изменении u от нуля до $+K$, t изменяется от нуля до единицы.

Характеристические показатели в точке $t=0$ (соответственно $u=0$) будут $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$, а в точке $t=1$ ($u=K$) будут $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$.

Из двух решений уравнения (15) в окрестности $t=0$ (на оси симметрии) мы выбираем то решение, при котором удовлетворяется условие конечности выражения

$$\lim_{n\to 0}\frac{\psi_1(u)}{\sqrt{\operatorname{sn} u}},$$

а именно, решение

$$\psi_1(t) = t^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \qquad c_0 = 1.$$

Для вычисления функции $\psi_1(t)$ в окрестности $t=0$ полагаем:

$$f_0(\varrho) = \varrho(\varrho-1) + \frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{16} = \left(\varrho - \frac{1}{4}\right)^2,$$

$$f_1(\varrho) = -\frac{1}{2}(1+k^2)\varrho + \frac{1}{16}\left[\frac{4\lambda}{k'^2}(k^2-1) + k^2\right],$$

$$f_2(\varrho) = -\frac{1}{2}(1+k^4)\varrho + \frac{1}{16}\left[\frac{4\lambda}{k'^2}(k^4-1) + k^4\right],$$

. . . .

$$f_n(\varrho) = -\frac{1}{2}(1+k^{2n})\varrho + \frac{1}{16}\left[\frac{4\lambda}{k'^2}(k^{2n}-1) + k^{2n}\right].$$

Вычисление коэфициентов c_n проводим, пользуясь такими формулами:

$$f_1\left(\frac{1}{4}\right) + c_1 f_0\left(\frac{1}{4}+1\right) = 0,$$

$$f_2\left(\frac{1}{4}\right) + c_1 f_1\left(\frac{1}{4}+1\right) + c_2 f_0\left(\frac{1}{4}+2\right) = 0,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$f_n\left(\frac{1}{4}\right) + c_1 f_{n-1}\left(\frac{1}{4}+1\right) + \ldots + c_n f_0\left(\frac{1}{4}+n\right) = 0.$$

Окончательно, соответствующее решение уравнения (15) получим в виде

$$\psi_1(t) = t^{\frac{1}{4}}\left\{1 + \frac{1}{16}(2+k^2+4\lambda)\,t + \frac{1}{4\cdot 16^2}\left[16(2+k^4+4\lambda)(1+k^2) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (10+9k^2+4\lambda)(2+k^2+4\lambda)\right]t^2\ldots\right\}.$$

§ 5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛА СФЕРЫ С ДВУМЯ ОТВЕРСТИЯМИ ДЛЯ ГРАНИЧНЫХ СЛУЧАЕВ

Как было раньше показано, определение характеристических чисел λ_n из уравнения (12′) и соответствующих характеристических функций $\psi_{2,n}(v)$, хотя и приводится к квадратурам, но их действительное нахождение встречает определенные трудности. Поэтому здесь дадим для двух граничных случаев сферы с большими и малыми отверстиями приближенное выражение потенциальной функции, используя аппроксимацию функций, входящих в коэфициенты уравнений (12) и (12′), соответствующими выражениями.

А. *Случай сферы с большими отверстиями*

1. Определение величины отверстия сферы. Рассмотрим в плоскости (z, r) сечение сферы с отверстиями, симметрично расположенными относительно оси z. Величину отверстия будем характеризовать углом COB (рис. 2), который обозначим через δ. На основании равенств (а) (рис. 1) имеем

$$\sin\delta = k,$$

поэтому

$$\delta = \arc\sin k.$$

Таким образом величина отверстия сферы (рис. 2) характеризуется величиною k (модуль эллиптической функции).

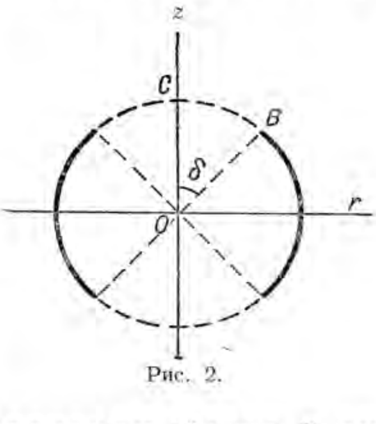

Рис. 2.

2. Приведение задачи к уравнению Матье. В случае сферы с большими отверстиями, то есть в случае k, близком

к единице соответственно k', близком к нулю, используем разложение:

$$\frac{\operatorname{cn}(v,k')}{\operatorname{dn}(v,k')}=\frac{2\pi}{K'k'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q_1^{n+\frac{1}{2}}\cos(2n+1)\frac{\pi v}{2K'}}{1-q_1^{2n+1}},$$

где

$$q_1=e^{-\pi\frac{K}{K'}}.$$

Для значений k', близких к нулю, можно функцию

$$\frac{k'^2}{4}\frac{\operatorname{cn}^2(v,k')}{\operatorname{dn}^2(v,k')},$$

входящую коэфициентом в уравнение (12′), аппроксимировать таким выражением:

$$\frac{k'^2}{4}\frac{\operatorname{cn}^2(v,k')}{\operatorname{dn}^2(v,k')}\approx\frac{k'^2}{4}\cos^2\frac{\pi v}{2K'},$$

причем для q_1 и K' приближенные их значения возьмем в следующем виде:

$$q_1=\frac{1}{16}k'^2,\quad K'=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k'^2\right).$$

Заметим, что при такой аппроксимации пренебрегаются члены разложения порядка выше k'^2, сохраняется четность функции и ее период $2K'$.

Уравнение (12′) после такой замены принимает вид

$$\frac{d^2z}{dv^2}+\left(\frac{k'^2}{4}\cos^2\frac{\pi v}{2K'}+\lambda\right)z=0. \tag{16}$$

Вводя в последнее уравнение новую независимую переменную x с помощью подстановки

$$x=\frac{\pi v}{2K'}.$$

приходим к уравнению Матье:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+(a+16p\cos 2x)z=0,$$

где

$$a=\frac{k'^2}{8}+\lambda\left(1+\frac{1}{2}k'^2\right);\quad 16p=\frac{k'^2}{8}.$$

3. *Определение функций Матье, соответствующих условиям задачи.* Принимая во внимание условия задачи, мы

выбираем только четные, периодические с периодом $2K'$ решения уравнения Матье, а именно:

$$z_n = ce_n\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,\,2m} \cos 2m \frac{\pi v}{2K'} \qquad (n=0, 2, 4, \ldots). \tag{17}$$

Для нахождения характеристических функций в нашем приближении получим такие разложения:

$$ce_0\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right) = 1 + 4p \cos 2 \frac{\pi v}{2K'},$$

$$ce_2\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right) = \cos 2 \frac{\pi v}{2K'} + p\left(\frac{2}{3} \cos 4 \frac{\pi v}{2K'} - 2\right),$$

$$ce_4\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right) = \cos 4 \frac{\pi v}{2K'} + 2p\left(\frac{1}{5} \cos 6 \frac{\pi v}{2K'} - \frac{1}{3} \cos 2 \frac{\pi v}{2K'}\right),$$

. . . .

$$ce_n\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right) = \cos n \frac{\pi v}{2K'} + 2p\left[\frac{\cos (n+2) \frac{\pi v}{2K'}}{n+1} - \frac{\cos (n-2) \frac{\pi v}{2K'}}{n-1}\right] (n > 4).$$

Соответственно, для нахождения характеристических чисел получим

$$a_n = n^2 \qquad (n=0, 2, 4, \ldots).$$

Следовательно, приближенные значения характеристических чисел уравнения (12′) будут

$$\lambda_n = \frac{n^2}{2}(2 - k'^2) - \frac{k'^2}{8}.$$

Приближенное выражение потенциального поля, создаваемого заряженной сферой с отверстиями, будет

$$w_1 = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(v, k')}}{\sqrt{\operatorname{sn} u \operatorname{dn}(v, k')}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \psi_{1,\,n}(u)\, ce_n\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right).$$

Удовлетворяя граничные условия, для потенциала на поверхности проводника получим такое выражение в этой приближенной форме:

$$w_0 \sqrt{\operatorname{dn}(v, k')} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\, ce_n\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right).$$

Отсюда, на основании ортогональности функций Матье первого рода, получим

$$B_n = \frac{w_0 \int\limits_0^{2K'} ce_n\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right) \sqrt{\operatorname{dn}(v, k')}\, dv}{\int\limits_0^{2K'} ce_n^2\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right) dv}.$$

Мы подчиним выбранные функции условиям

$$\int\limits_0^{2K'} ce_0^2\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right) dv = 2K',$$

$$\int\limits_0^{2K'} ce_n^2\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right) dv = K'.$$

Для вычисления коэфициентов B_n используем разложение $\sqrt{\mathrm{dn}\,(v, k')}$ в ряд косинусов; имеем

$$\mathrm{dn}\,(v, k') = \sqrt{k}\,\frac{\theta_1(v, k')}{\theta(v, k')} = \sqrt{k}\,\frac{1+2q_1\cos 2\frac{\pi v}{2K'}+2q_1^4\cos 4\frac{\pi v}{2K'}+\ldots}{1-2q_1\cos 2\frac{\pi v}{2K'}+2q_1^4\cos 4\frac{\pi v}{2K'}\ldots}.$$

Поэтому

$$\sqrt{\mathrm{dn}\,(v, k')} = \sqrt[4]{k}\left(1+q_1\cos 2\frac{\pi v}{2K'}-\frac{1}{2}q_1^2\cos^2 2\frac{\pi v}{2K'}+\ \ldots\right)\times$$
$$\times\left(1+q_1\cos 2\frac{\pi v}{2K'}+\frac{3}{2}q_1^2\cos^2 2\frac{\pi v}{2K'}+\ldots\right).$$

После соответствующих преобразований окончательно получаем такое приближенное выражение

$$\sqrt{\mathrm{dn}\,(v, k')} = \sqrt[4]{k}\left(1+2q_1\cos 2\frac{\pi v}{2K'}\right).$$

Для коэфициентов B_n получим такие приближенные значения:

$$B_0 = w_0\sqrt[4]{k},$$
$$B_2 = w_0\sqrt[4]{k}\,(2q_1-4p),$$
$$B_4 = B_6 = \ldots = 0.$$

4. Приведение второго уравнения системы к гипергеометрическому уравнению.

Переходя к приближенному интегрированию уравнения (12)

$$\frac{d^2\psi_1}{du^2}+\left(\frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{cn}^2(u, k)}{\mathrm{sn}^2(u, k)}-\lambda\right)\psi_1 = 0$$

в случае сферы с большими отверстиями, то есть при значениях модуля k близких к единице, используем аппроксимацию выражения:

$$\frac{\mathrm{cn}^2(u, k)}{\mathrm{sn}^2(u, k)},$$

входящего в коэфициент уравнения (12).

На основании формул

$$\mathrm{sn}\,(u,\ k)=-i\frac{\mathrm{sn}\,(iu,\ k')}{\mathrm{cn}\,(iu,\ k')},$$

$$\mathrm{cn}\,(u,\ k)=\frac{1}{\mathrm{cn}\,(iu,\ k')},$$

$$\mathrm{dn}\,(u,\ k)=\frac{\mathrm{dn}\,(iu,\ k')}{\mathrm{cn}\,(iu,\ k')},$$

имеем

$$\frac{\mathrm{cn}^2\,(u,\ k)}{\mathrm{sn}^2\,(u,\ k)}=-\frac{1}{\mathrm{sn}^2\,(iu,\ k')}.$$

Далее, используя разложение

$$\frac{1}{\mathrm{sn}\,(iu,\ k')}=\frac{\pi}{2K'}\frac{1}{\sin\frac{\pi iu}{2K'}}+\frac{2\pi}{K'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_1^{2n+1}\sin\,(2n+1)\frac{\pi iu}{2K'}}{1-q_1^{2n+1}},$$

причем это разложение имеет место для значений u в интервале $(-2K,\ +2K)$, получим приближенное выражение для $\frac{\mathrm{cn}^2\,(u,\ k)}{\mathrm{sn}^2\,(u,\ k)}$, пренебрегая членами порядка выше k'^2 этого разложения, а именно:

$$\frac{\mathrm{cn}^2\,(u,\ k)}{\mathrm{sn}^2\,(u,\ k)}=-\left[\frac{\pi^2}{4K'^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi iu}{2K'}}+\frac{4\pi^2}{2K'^2}q_1\right].$$

Беря в этом приближении

$$q_1=\frac{1}{16}k'^2,\quad K'=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k'^2\right)$$

и используя соотношение

$$\sin\frac{\pi iu}{2K'}=i\,\mathrm{sh}\frac{\pi u}{2K'}$$

получим

$$\frac{\mathrm{cn}^2\,(u,\ k)}{\mathrm{sn}^2\,(u,\ k)}\approx\frac{\pi^2}{4K'^2}\frac{1}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi u}{2K'}}-\frac{\pi^2 k'^2}{8K'^2}.$$

Имея в виду вычисление распределения потенциала вдоль оси симметрии, то есть для значений $u=0$, при указанном способе аппроксимации мы сохраняем порядок перехода в бесконечность обеих функций при $u=0$.

Уравнение (12) после указанных преобразований принимает вид

$$\frac{d^2y}{du^2}+\left[\frac{\pi^2}{16\,K'^2}\frac{1}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi u}{2K'}}-\left(\frac{\pi^2 k'^2}{32K'^2}+\lambda\right)\right]y=0. \tag{18}$$

Если в уравнении (18) сделать замену независимой переменной

$$\frac{\pi u}{2K'}=x,$$

оно переходит в такое:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{4\,\mathrm{sh}^2 x}-h\right)y=0.$$

где

$$h=\frac{k'^2}{8}+\frac{4K'^2\lambda}{\pi^2}=\frac{k'^2}{8}+\left(1+\frac{1}{2}k'^2\right)\lambda.$$

Если, далее, в последнем уравнении применить подстановку

$$y=\sqrt{\mathrm{sh}\,x}\cdot z,$$

получим

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}\frac{dz}{dx}+\left(\frac{1}{4}-h\right)z=0. \tag{19}$$

Наконец, в уравнении (19) сделаем замену независимой переменной с помощью подстановки

$$\mathrm{sh}^2 x=-t.$$

После этого уравнение (19) переходит в такое:

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2}+\left(1-\frac{3}{2}t\right)\frac{dz}{dt}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-h\right)z=0. \tag{20}$$

Следовательно, имеем гипергеометрическое уравнение, вида

$$x(1-x)y''+[\gamma-(1+\alpha+\beta)x]y'-\alpha\beta y=0,$$

в котором

$$\alpha=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{h},\quad \beta=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{h},\quad \gamma=1. \tag{21}$$

Для определения распределения потенциала вдоль оси симметрии z надо взять разложение интеграла уравнения (19) в окрестности точки $t=0$ (соответственно, $u=0$) имеем

$$y=\sqrt{\mathrm{sh}\frac{\pi u}{2K'}}\cdot F\left(\alpha,\beta,1;\ -\mathrm{sh}^2\frac{\pi u}{2K'}\right), \tag{22}$$

причем значения α, β даются равенствами (21).

Таким образом, приближенное решение $\overline{\psi}_{1,n}(u)$ уравнения (18), удовлетворяющее условиям задачи, получим в следующем виде:

$$\overline{\psi}_{1,n}(u)=c_n y=c_n\sqrt{\mathrm{sh}\frac{\pi u}{2K'}}\cdot F\left(\alpha_n,\beta_n,1;\ -\mathrm{sh}^2\frac{\pi u}{2K'}\right). \tag{23}$$

Постоянные c_n выбираем из условия

$$\overline{\psi}_{1,n}(K)=1.$$

5. Приближенное выражение потенциальной функции для сферы с двумя отверстиями (случай больших отверстий). Пользуясь решениями уравнений (12) и (12′) в виде (17) и 23), получим приближенное выражение потенциальной функции в таком виде:

$$\overline{w} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cn} u \operatorname{cn}(v, k')}}{\sqrt{\operatorname{sn} u \operatorname{dn}(v, k')}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n' \sqrt{\operatorname{sh}\frac{\pi u}{2K'}}\, F\left(\alpha_n, \beta_n, 1; -\operatorname{sh}^2\frac{\pi u}{2K'}\right) ce_n\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right). \tag{24}$$

где

$$B_n = B_n \cdot c_n.$$

Для приближенного вычисления распределения потенциала вдоль оси симметрии z имеем из (24), положив в нем $u=0$;

$$\overline{w}(u=0,\ v) = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cn}(v, k')}}{\sqrt{\operatorname{dn}(v, k')}} \sqrt{\frac{\pi}{2K'}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n' ce_n\left(\frac{\pi v}{2K'}, p\right). \tag{25}$$

В. *Случай сферы с малыми отверстиями*

1. Приведение задачи к уравнению Матье с мнимым аргументом.

В случае малых отверстий сферы, соответственно, когда k близко к нулю, а k' близко к единице, приближенное решение системы уравнений (12) и 12′) разыскиваем так:

Для аппроксимации выражения

$$\frac{k'^2}{4} \frac{\operatorname{cn}^2(v, k')}{\operatorname{dn}^2(v, k')},$$

входящего в коэфициент уравнения (12), используем такое преобразование:

$$\frac{k' \operatorname{cn}(v, k')}{\operatorname{dn}(v, k')} = \frac{k'}{\operatorname{dn}(iv, k)},$$

а также разложение

$$\frac{k'}{\operatorname{dn}(iv, k)} = \frac{2\pi}{K} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos n \frac{\pi i v}{K} + \frac{\pi}{2K}.$$

Пренебрегая в этом разложении членами порядка выше k^2 и беря также

$$q = \frac{1}{16} k^2, \quad K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4} k^2\right),$$

получим

$$\frac{k' \operatorname{cn}(v, k')}{\operatorname{dn}(v, k')} \approx \frac{\pi}{2K}\left(1 - \frac{1}{4} k^2 \operatorname{ch}\frac{\pi v}{K}\right).$$

Поэтому, в принятом приближении, имеем

$$\frac{k'^2}{4}\frac{\operatorname{cn}^2(v, k')}{\operatorname{dn}^2(v, k')} \approx \frac{\pi^2}{16K^2}\left(1-\frac{1}{2}k^2 \operatorname{ch}\frac{\pi v}{K}\right).$$

В таком случае уравнение (12′) переходит в следующее:

$$\frac{d^2z}{dv^2}+\left[\frac{\pi^2}{16K^2}\left(1-\frac{1}{2}k^2 \operatorname{ch}\frac{\pi v}{K}\right)+\lambda\right]z=0.$$

Следовательно, имеем уравнение Матье

$$\frac{d^2z}{dx^2}+(a+16p \operatorname{ch} 2x)\, z=0, \tag{26}$$

если положим

$$x=\frac{\pi v}{2K}, \quad a=\frac{1}{4}+\lambda\left(1+\frac{1}{2}k^2\right), \quad 16p=-\frac{1}{8}k^2.$$

2. Применение гипергеометрического уравнения. Переходя к приближенному интегрированию уравнения (12)

$$\frac{d^2\psi_1}{du^2}+\left(\frac{1}{4}\frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u}-\lambda\right)\psi_1=0$$

в случае сферы с малыми отверстиями, для аппроксимации функций

$$\frac{1}{4}\frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u}.$$

используем разложение

$$\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}=\frac{\pi}{2K}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2K}-\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin n\frac{\pi u}{K}.$$

Беря приближенное выражение q для значений k, близких к нулю, в таком виде

$$q=\frac{1}{16}k^2,$$

аппроксимируем функцию $\frac{1}{4}\frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u}$ в этом же приближении, то есть пренебрегая в разложении этой функции членами, содержащими k в степени выше второй, таким выражением

$$\frac{1}{4}\frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u}\approx\frac{\pi^2}{16K^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi u}{2K}. \tag{27}$$

При такой аппроксимации сохраняется периодичность функций, переход в нуль и бесконечность в тех же точках; кроме того, отношение этих функций стремится к единице при приближении u к нулю. При приближении k к нулю обе функции становятся равными $\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2 u$.

Применяя указанную аппроксимацию, получим такое уравнение:

$$\frac{d^2y}{du^2}+\left(\frac{\pi^2}{16K^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi u}{2K}-\lambda\right)y=0. \tag{28}$$

Если в уравнении (28) сделаем замену независимой переменной u с помощью подстановки

$$\frac{\pi u}{2K}=x,$$

получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-h\right)y=0, \tag{29}$$

где $h=\lambda+\frac{1}{4}$.

Уравнение (29) приводится к уравнению гипергеометрического ряда; действительно, положим

$$y=\sqrt{\sin x}\cdot z.$$

Тогда для z получим уравнение

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\operatorname{ctg}x\frac{dz}{dx}-\left(\frac{1}{4}+h\right)z=0.$$

Если в последнем уравнении сделаем подстановку

$$\sin^2 x=t,$$

получим уравнение

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2}+\left(1-\frac{3}{2}t\right)\frac{dz}{dt}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+h\right)z=0.$$

Следовательно, имеем гипергеометрическое уравнение, в котором

$$\alpha=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{-h},\quad \beta=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{-h};\quad \gamma=1. \tag{30}$$

Таким образом, интеграл уравнения (29), удовлетворяющий условию конечности выражения

$$\lim_{n\to 0}\frac{\psi_1(u)}{\sqrt{\operatorname{sn} u}},$$

будет

$$y=\sqrt{\sin\frac{\pi u}{2K}}\cdot F\left(\alpha,\beta,1;\quad \sin^2\frac{\pi u}{2K}\right), \tag{31}$$

причем значения α, β даются равенствами (30).

3. **Приближенное выражение потенциальной функции для сферы с двумя отверстиями** (случай малых отверстий).

Пользуясь решениями уравнений (25) и (28), получим приближенное выражение потенциальной функции $\overline{w}$ в таком виде:

$$\overline{w} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cn} u \operatorname{cn}(v, k')}}{\sqrt{\operatorname{sn} u \operatorname{dn}(v, k')}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\sqrt{\sin\frac{\pi u}{2K}} \cdot F\left(\alpha_n, \beta_n, 1; \sin^2\frac{\pi u}{2K}\right)}{F(\alpha_n, \beta_n, 1; 1)} ce_n(v), \tag{32}$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{-\left(\lambda_n + \frac{1}{4}\right)}; \quad \beta_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{-\left(\lambda_n + \frac{1}{4}\right)},$$

а $ce_n(v)$ — решения уравнения (26), удовлетворяющие условиям задачи. Делением на $F(\alpha_n, \beta_n, 1; 1)$ мы удовлетворяем условие

$$\psi_{1, n}(K) = 1.$$

Для приближенного вычисления распределения потенциала вдоль оси симметрии z имеем, по (32), положив в нем $u=0$

$$\overline{w}(u=0, v) = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cn}(v, k')}}{\sqrt{\operatorname{dn}(v, k')}} \sqrt{\frac{\pi}{2K}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{ce_n(v)}{F(\alpha_n, \beta_n, 1; 1)}. \tag{33}$$

В общем случае сферы с двумя отверстиями произвольной величины распределение потенциала получаем, исходя из точных решений уравнений (12) и (12′).

4. **Преобразование гипергеометрического ряда** $F(\alpha_n, \beta_n, 1; 1)$.

В заключение рассмотрим преобразование ряда $F(\alpha_n, \beta_n, 1; 1)$, встречающегося в формулах для выражения потенциальной функции сферы с двумя отверстиями, причем α_n и β_n — сопряженные комплексные величины.

Известно, что гипергеометрический ряд $F(a, b, c; 1)$ можно представить в таком виде:

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)},$$

если параметры этого ряда удовлетворяют условию

$$R(c-a-b) > 0.$$

В нашем случае это условие выполняется, так как

$$c = 1,$$

$$a = \alpha_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{-\left(\lambda_n + \frac{1}{4}\right)},$$

$$b = \beta_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{-\left(\lambda_n + \frac{1}{4}\right)}.$$

Поэтому имеем

$$F(\alpha_n, \beta_n, 1; 1) = \frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1-\alpha_n)\;\Gamma(1-\beta_n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-\alpha_n)\;\Gamma(1-\beta_n)}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma(1-\alpha_n)\cdot\Gamma(1-\beta_n) = \Gamma[2-(\alpha_n+\beta_n)]\cdot B(1-\alpha_n, 1-\beta_n) =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,B(1-\alpha_n, 1-\beta_n),$$

окончательно имеем

$$F(\alpha_n, \beta_n; 1; 1) = \frac{2}{B(1-\alpha_n);(1-\beta_n)}.$$

Интеграл Эйлера первого рода $B(m, n)$, как известно, имеет такое представление:

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt.$$

В данном случае имеем

$$m = 1-\alpha_n = \frac{3}{4} - ik_n,$$

$$n = 1-\beta_n = \frac{3}{4} + ik_n,$$

$$k_n = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n + \frac{1}{4}}.$$

Таким образом имеем

$$B(1-\alpha_n, 1-\beta_n) = \int_0^1 \frac{t^{-ik_n}(1-t)^{ik_n}\,dt}{\sqrt[4]{t(1-t)}}.$$

Далее имеем

$$B(1-\alpha_n, 1-\beta_n) = \int_0^1 \frac{\cos\left(k_n \lg\frac{1-t}{t}\right)}{\sqrt[4]{t(1-t)}}\,dt + i\int_0^1 \frac{\sin\left(k_n \lg\frac{1-t}{t}\right)}{\sqrt[4]{t(1-t)}}\,dt.$$

Если сделаем подстановку

$$\lg\frac{1-t}{t} = s,$$

получим

$$B(1-\alpha_n, 1-\beta_n) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(k_n s)}{\sqrt{\operatorname{ch}^3\frac{s}{2}}}\,ds + \frac{i}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k_n s)}{\sqrt{\operatorname{ch}^3\frac{s}{2}}}\,ds =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty} \frac{\cos(k_n s)}{\sqrt{\operatorname{ch}^3\frac{s}{2}}}\,ds.$$

Следовательно, для гипергеометрического ряда $F(\alpha_n, \beta_n, 1; 1)$ получаем такое удобное для вычислений представление:

$$F(\alpha_n, \beta_n, 1; 1) = \frac{2\sqrt{2}}{\int\limits_0^\infty \frac{\cos(k_n s)}{\sqrt{\operatorname{ch}^3 \frac{s}{2}}} ds}.$$

Таким образом для приближенного вычисления распределения потенциала вдоль оси симметрии z в случае сферы с малыми отверстиями, имеем по (33)

$$\overline{w}(u=0, v) = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{cn}(v, k')}}{\sqrt{\operatorname{dn}(v, k')}} \sqrt{\frac{\pi}{K}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n ce_n(v) \int\limits_0^\infty \frac{\cos(k_n s)}{\sqrt{\operatorname{ch}^3 \frac{s}{2}}} ds.$$

Поступила 20. XI 1949.